

PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Definisi: Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Selanjutnya jika dalam persamaan tersebut turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dan bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP).

Contoh:

1. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$ (Persamaan Diferensial Parsial)
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$ (Persamaan Diferensial Biasa)

Definisi Order: Order suatu PDB adalah order tertinggi dari turunan dalam persamaan $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Contoh no.2 adalah persamaan differensial biasa order dua.

Definisi Linieritas dan Homogenitas: Persamaan differensial biasa order n dikatakan linier bila dapat dinyatakan dalam bentuk.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \text{ dengan } a_0(x) \neq 0.$$

1. Jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk di atas dikatakan tidak linier.
2. Jika koefisien $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ konstan maka disebut persamaan differensial linier dengan koefisien konstan, jika tidak disebut persamaan differensial linier dengan koefisien variable.
3. Jika $F(x) = 0$, maka disebut persamaan differensial linier homogen, jika $F(x) \neq 0$ disebut tidak homogen.

Solusi (Penyelesaian) PDB.

Definisi: Tinjau suatu PDB

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0 \quad \text{dengan } F \text{ fungsi real dengan } (n+2) \text{ argumen}$$
$$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}.$$

1. Jika f adalah fungsi real yang terdefinisi untuk semua x dalam interval real I dan mempunyai derivative ke- n untuk semua $x \in I$. Fungsi f disebut solusi eksplisit PDB di atas pada I jika memenuhi

$$F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] \text{ terdefinisi untuk semua } x \in I, \text{ dan}$$

$$F[x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)] = 0 \text{ untuk semua } x \in I$$

2. Suatu relasi $g(x, y) = 0$ disebut solusi implisit dari PDB di atas jika g dapat ditransformasi ke minimal satu fungsi f dengan variable $x \in I$ sedemikian sehingga f merupakan solusi eksplisit dari PDB pada interval tersebut.
3. Kedua penyelesaian yaitu penyelesaian implicit dan penyelesaian eksplisit biasanya secara singkat disebut penyelesaian PDB.

Secara umum kedua solusi tersebut masih dikategorikan lagi dalam tiga jenis solusi yaitu:

1. Solusi Umum (Penyelesaian Umum): solusi PDB yang masih mengandung konstanta misalnya **C** atau **c**. Contoh: $y' = 3$ mempunyai penyelesaian umum $y = 3x + C$.
2. Solusi Khusus/Partikular (Penyelesaian Khusus/Partikular): solusi yang tidak mengandung konstanta karena adanya syarat awal pada suatu PDB. Contoh: $y' = 3$ dengan syarat $y(0) = 1$, maka penyelesaian khususnya adalah $y = 3x + 1$
3. Solusi Singular (Penyelesaian Singular): solusi yang tidak diperoleh dari hasil mensubstitusikan suatu nilai pada konstanta pada solusi umumnya. Contoh: $y = Cx + C^2$ adalah solusi umum dari PDB $(y')^2 + xy' = y$, namun demikian disisi lain PDB tersebut mempunyai penyelesaian singular $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Metode Penyelesaian.

Metoda yang digunakan untuk mencari solusi (menyelesaikan) Persamaan Differensial antara lain:

1. Metoda Analitik: Metoda ini dapat menghasilkan dua bentuk solusi yaitu bentuk eksplisit dan implicit yang dicari melalui teknik deduktif analogis dengan menggunakan konsep-konsep matematik. Kelebihannya dapat mengetahui bentuk fungsi solusinya namun tidak cukup fleksibel untuk masalah-masalah yang kompleks. Dengan komputer dapat diselesaikan dengan software MATLAB atau MAPLE.

2. Metoda Kualitatif: Solusi ini hanya dapat memberikan gambaran secara geometris bagaimana visualisasi dari solusi PDB. Dengan mengamati pola grafik gradien “field” (direction field) maka dapat diestimasi solusi PDB itu. Keunggulannya dapat memahami secara mudah kelakuan solusi suatu PDB namun fungsi asli dari solusinya tidak diketahui dan juga kurang fleksibel untuk kasus yang kompleks
3. Metoda Numerik. Pada saat sekarang metoda ini merupakan metoda yang fleksibel. Metoda ini berkembang sesuai dengan perkembangan computer, dan dapat menyelesaikan PDB dari level yang mudah sampai pada level yang kompleks. Meskipun fungsi tidak solusi tidak diketahui secara eksplisit maupun implicit namun data yang diberikan dapat divisualisir dalam bentuk grafik sehingga dapat dianalisis dengan baik. Metoda ini berdasarkan prinsip-prinsip pendekatan (aproksimasi) sehingga solusi yang diperoleh adalah solusi hampiran (solusi pendekatan).

Pada kuliah ini hanya akan dibicarakan metode analitik yang dikhususkan untuk menyelesaikan Persamaan Differensial Biasa. Metoda numerik diberikan pada mata kuliah yang lain.

Persamaan Differensial Order satu (*First Order DE's*)

1. **Variabel terpisah (*Separable differential equations*) dan variabel tidak terpisah tapi mudah dipisahkan**

Bentuk: $N(y)dy + M(x)dx = 0$, dan

$$N_1(y)M_2(x)dy + N_2(y)M_1(x)dx = 0$$

Untuk menyelesaikannya, integralkan.

$$\int N(y)dy + \int M(x)dx = \int 0 \Rightarrow F_1(y) + F_2(x) = C$$

$$\int \frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy + \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx = \int 0$$

Contoh:

$$1. \frac{dy}{dx} = 6y^2x \Rightarrow y^{-2}dy - 6x dx = 0 \Rightarrow \int y^{-2}dy - \int 6x dx = \int 0$$

$$\text{PU PD: } -\frac{1}{y} - 3x^2 = c$$

$$2. 1 + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln|x| + \ln|y| = \ln|c| \Rightarrow x y = c$$

$$3. y' = 2xy \Rightarrow dy = 2xy dx \Rightarrow dy - 2xy dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} - 2x dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} - \int 2x dx = \int 0 \Rightarrow \ln|y| - x^2 = c$$

$$4. \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4} \Rightarrow (2y - 4) dy = (3x^2 + 4x - 4) dx$$

$$\Rightarrow \int (2y - 4) dy - \int (3x^2 + 4x - 4) dx = \int 0$$

$$\text{PUPD: } (y^2 - 4y) - (x^3 + 2x^2 - 4x) = c$$

Jika persamaan tersebut diberi syarat bahwa $y(1) = 3$, maka syarat ini disubstitusikan ke PU PD untuk mendapatkan nilai c .

$$(3)^2 - 4(3) - \{(1)^3 + 2(1^2) - 4(1)\} = c \Rightarrow c = -2$$

Jadi Penyelesaian Khusus PD:

$$y^2 - 4y - (x^3 + 2x^2 - 4x) + 2 = 0$$

2. Variabel tercampur dan tidak mudah dipisahkan.

a). Bentuk: $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; Untuk bentuk ini diambil

$$\text{substitusi } v = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

Contoh:

$$1. x y y' + 4x^2 + y^2 = 0;$$

Bagi kedua ruas dengan X^2 sehingga PD jadi berbentuk:

$$\frac{y}{x} y' + 4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0; \text{ dengan substitusi } v = \frac{y}{x} \text{ diperoleh}$$

$$v(v + x \frac{dv}{dx}) + 4 + v^2 = 0 \Rightarrow (2v^2 + 4)dx + v x dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{v dv}{2v^2 + 4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \ln|2v^2 + 4| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$\Rightarrow x (2v^2 + 4)^{\frac{1}{4}} = c$$

Penyelesaian Umum PD: $x \left\{ 2 \frac{y^2}{x^2} + 4 \right\}^{\frac{1}{4}} = c$

b). Bentuk: $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$; untuk bentuk ini dapat diambil substitusi $x/y = u \Rightarrow x = uy$

$$+ y dx = du$$

Contoh:

$$2. (1+xy)y dx + (1-xy)x dy = 0$$

$$\Rightarrow y dx + x dy + xy(y dx - x dy) = 0$$

$$\Rightarrow d(xy) + xy(y dx - x dy) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(xy)}{xy} + y^2 \left\{ \frac{y dx - x dy}{y^2} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{d(xy)}{xy} + y^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\text{Ambil substitusi } xy = u \text{ dan } \frac{x}{y} = v \Rightarrow y^2 = \frac{u}{v}$$

Sehingga PD menjadi:

$$\frac{du}{u} + \frac{u}{v} dv = 0 \Rightarrow \frac{du}{u^2} + \frac{dv}{v} = 0 \Rightarrow \ln|v| - \frac{1}{u} = \ln|c|$$

$$\Rightarrow v = c e^{1/u} \Rightarrow x = c y e^{1/xy}$$

SILAKAN KERJAKAN SOAL-SOAL BERIKUT DAN JAWABAN

KIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. $Y' = 2XY$

2. $Dy/dx = e^y(2x-4)$

3. $6. \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$; untuk $r(1) = 2$

4. $Dy/dt = e^{y-t}(\sec(y))(1+t^2)$

5. $8. \sec x \cos^2 y dx = \cos x \sin y dy$

PERSAMAAN DIFFERENSIAL (PD)

①

Persamaan yang mengandung variable dan beberapa fungsi.
Khusus terhadap variabel tersebut.

1). $y' = 2xy$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\Rightarrow dy = 2xy dx$$

$$\Rightarrow -2xy dx + dy = 0 \quad \Rightarrow \quad y \text{ bagi } y.$$

$$\Rightarrow -2x dx + \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \int -2x dx + \int \frac{1}{y} dy = \int 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2} x^2 + \ln y = C$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-x^2 + \ln y = C}}$$

2). $\frac{dy}{dx} = e^x (2x-4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-4}{e^x}$$

$$dy = (e^x)(2x-4) dx$$

$$e^x dy = 2x-4 dx$$

$$\int e^x dy = \int 2x-4 dx$$

$$e^x y = \frac{2}{1+1} x^{1+1} - 4x$$

$$e^x y = \frac{2}{2} x^2 - 4x$$

$$\underline{\underline{e^x y = x^2 - 4x}}$$

$$\text{atau} \quad e^x dy = 2x-4 dx$$
$$\Rightarrow (2x-4) dx + e^x dy = 0$$

$$\int -2x + 4 dx + \int e^x dy = 0$$

$$\left(\frac{-2}{2} x^2 + 4x \right) + (e^x) = C$$

$$\underline{\underline{-x^2 + 4x + e^x = C}}$$

3). $b \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\theta}$; untuk $r(1) = 2$.

$$b \theta \cdot dr = r^2 d\theta \text{ dibagi } \theta$$

$$\frac{b \theta}{\theta} dr = \frac{r^2}{\theta} d\theta \quad \therefore \quad \therefore$$

$$b dr = \frac{1}{\theta} r^2 d\theta \text{ dibagi } r^2.$$

$$\frac{b}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} \frac{r^2}{r^2} d\theta.$$

$$-\frac{1}{\theta} d\theta + \frac{b}{r^2} dr = 0$$

$$\int -\frac{1}{\theta} d\theta + \int \frac{b}{r^2} dr = \int 0.$$

$$-\ln \theta + \frac{b}{-2+1} r^{-2+1} = C$$

$$-\ln \theta + \frac{b}{-2+1} r^{-2+1} = C$$

$$-\ln \theta + \frac{b}{-1} r^{-1} = C, \text{ Untuk } r(1) = 2.$$

$$-\ln \theta + \frac{-b}{r} = C$$

$$-\ln \theta + \frac{b}{2} = C.$$

$$-\ln \theta + \frac{3}{2} = C$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t} (\cos y) (1+t^2).$$

$$dy = e^{y-t} (\cos y) (1+t^2) dt \text{ di bagi } \cos y.$$

$$\frac{1}{\cos y} dy = e^{y-t} \frac{(\cos y)}{(\cos y)} (1+t^2) dt.$$

$$\frac{1}{\cos y} dy = e^{y-t} (1+t^2) dt \text{ kal. } (e^x)_x.$$

$$\frac{1}{\cos y} \cdot e^{-y} dy = e^y \cdot e^{-t} \cdot e^{-y} (1+t^2) dt.$$

$$\frac{e^{-y}}{\cos y} dy = e^{-t} (1+t^2) dt.$$

$$e^{-y} \cdot \cos y dy = e^{-t} (1+t^2) dt.$$

$$-(e^{-t} (1+t^2)) dt - e^{-y} (\cos y dy) = 0.$$

$$-\int e^{-t} (1+t^2) dt + \int e^{-y} \cos y dy = 0.$$

$$\Rightarrow -(-3e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t} - 2te^{-t}) + \frac{-\cos y + \sin y}{2 \cos y} = C$$

$$\Rightarrow 3e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{\cos y + \sin y}{2 \cos y} = C.$$

✓ 8. $\sec x \cos^2 y \cdot dx = \cos x \sin y \cdot dy$.

$$\frac{\cancel{\sec x} \cdot \cos^2 y \cdot dx}{\cancel{\cos x}} = \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} \sin y \cdot dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sec x \cdot \cos^2 y \cdot dx = \sin y \cdot dy \text{ + ds bagi } \cos^2 y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sec x \cdot \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} \cdot dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \cdot dy$$

$$\partial \frac{\sec x}{\cos x} \cdot dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \cdot dy$$

$$= \frac{\sin y}{\cos^2 y} \cdot dy + \partial \frac{\sec x}{\cos x} \cdot dx = 0$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos^2 y} \cdot dy + \int \partial \frac{\sec x}{\cos x} \cdot dx = \text{se}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\cos y} + \partial \tan x = c$$

Jaya Purwa
 Nm. 202710010

* Persamaan Differensial Variabel Terpisah

①. $y' = 2xy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\Rightarrow dy = 2xy dx$$

$$\Rightarrow -2xy dx + dy = 0 \Rightarrow : y \text{ dibagi } y$$

$$\Rightarrow -2x dx + \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\Rightarrow \int -2x dx + \int \frac{1}{y} dy = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{2}x^2 + \ln y = C$$

$$\Rightarrow \boxed{-x^2 + \ln y = C}$$

②. $\frac{dy}{dx} = e^y \cdot (2x-4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-4}{e^y}$$

$$dy \cdot (e^y) = (2x-4) dx$$

$$e^y dy = 2x-4 dx$$

$$\int e^y dy = \int 2x-4 dx$$

$$e^y = \frac{2}{1+1} x^{1+1} - 4x$$

$$e^y = \frac{2}{2} x^2 - 4x$$

$$\boxed{e^y = x^2 - 4}$$

atau $e^y dy = 2x-4 dx$

$$-(2x-4) dx + e^y dy = 0$$

$$\int -2x+4 dx + \int e^y dy = 0$$

$$\left(-\frac{2}{2}x^2 + 4x\right) + (e^y) = C$$

$$\boxed{-x^2 + 4x + e^y = C}$$

$$(3). \quad 6. \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta} \quad \text{untuk } r(1) = 2.$$

$$6\theta \cdot dr = r^2 d\theta \quad \text{dikali } \theta$$

$$\frac{6\theta}{\theta} dr = \frac{r^2}{\theta} d\theta.$$

$$6dr = \frac{1}{\theta} r^2 d\theta \quad \text{dikali } r^2$$

$$\frac{6}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} \frac{r^2}{r^2} d\theta$$

$$\frac{6}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} d\theta$$

$$-\frac{1}{\theta} d\theta + \frac{6}{r^2} dr = 0$$

$$\int -\frac{1}{\theta} d\theta + \int \frac{6}{r^2} dr = \int 0:$$

$$-\ln \theta + \frac{6}{-2+1} r^{-2+1} = C.$$

$$-\ln \theta + \frac{6}{-2+1} r^{-2+1} = C$$

$$-\ln \theta + \frac{6}{-1} r^{-1} = C$$

$$\boxed{-\ln \theta - \frac{6}{r} = C} \rightarrow$$

$$\text{untuk } r(1) = 2$$

$$-\ln \theta - \frac{6}{2} = C$$

$$-\ln \theta - 3 = C$$

$$=.$$

$$4) \quad \frac{dy}{dt} = e^{y-t} (\sec y) (1+t^2).$$

$$dy = e^{y-t} (\sec y) (1+t^2) dt \text{ dibagi } (\sec y)$$

$$\frac{1}{\sec y} dy = e^{y-t} \frac{(\sec y)}{(\sec y)} (1+t^2) dt$$

$$\frac{1}{\sec y} dy = e^{y-t} \cdot (1+t^2) dt \text{ dikali } (e^{-y}) \text{ dikali } (e^{-y})$$

$$\frac{1}{\sec y} \cdot e^{-y} dy = \cancel{e^y} \cdot e^{-t} \cdot \cancel{e^{-y}} (1+t^2) dt$$

$$\frac{e^{-y}}{\sec y} dy = e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$e^{-y} \cdot \cos y dy = e^{-t} (1+t^2) dt$$

$$- (e^{-t} (1+t^2)) dt + e^{-y} \cdot \cos y dy = 0$$

$$- \int e^{-t} (1+t^2) dt + \int e^{-y} \cdot \cos y dy = 0$$

$$\Rightarrow - (-3e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t} - 2te^{-t}) + \frac{-\cos y + \sin y}{2e^y} = C$$

$$\Rightarrow \boxed{3e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{\cos y + \sin y}{2e^y} = C}$$

5.

$$8. \sec u \cdot \cos^2 y \, du = \cos u \sin y \, dy \Rightarrow \text{dibagi } \cos u$$

$$\frac{8 \cdot \sec u \cdot \cos^2 y \, du}{\cos u} = \frac{\cancel{\cos u}}{\cancel{\cos u}} \sin y \, dy$$

$$\frac{8}{\cos u} \sec u \cdot \cos^2 y \, du = \sin y \, dy \rightarrow \text{dibagi } \cos^2 y$$

$$\frac{8}{\cos u} \sec u \cdot \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} \, du = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$8 \frac{\sec u}{\cos u} \, du = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$- \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy + 8 \frac{\sec u}{\cos u} \, du = 0$$

$$\int - \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy + \int 8 \frac{\sec u}{\cos u} \, du = \int 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{\cos y} + 8 \tan u = C}$$

NAMA : SELAMAT, ST
NIM : 202710025

SOAL:

1. $y' = 2xy$

2. $Dy/dx = e^y (2x-4)$

3. 6. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$: UNTUK $r(1) = 2$

4. $Dy/dt = e^{y-t} (\sec(y)) (1+t^2)$

5. 8. $\sec x \cos^2 y \, dx = \cos x \sin y \, dx$

JAWABAN

1. $y' = 2xy$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 2xy$$

$$\partial y = 2xy \partial x$$

$$\Rightarrow -2xy \partial x + \partial y = 0 \rightarrow y \text{ DIBAGI } y$$

$$-2x \partial x + \frac{1}{y} \partial x = 0$$

$$\Rightarrow \int -2x \partial x + \int \frac{1}{y} \partial x = \int 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2} x^2 + \ln y = C$$

$$\Rightarrow -x^2 + \ln x = C$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = e^y (2x-4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x-4}{e^y}$$

$$\partial y (e^y) = (2x-4) \partial x$$

$$e^y \partial x = 2x-4 \partial x$$

$$\int e^y \partial y = \int 2x-4 \partial x$$

$$e^y = \frac{2}{1+1} x^{1+1} - 4x$$

$$e^y = \frac{2}{2} x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow e^y = x^2 - 4 \quad \text{ATAU}$$



$$e^y \partial y = 2x-4 \partial x$$

$$-(2x-4) \partial x + e^y \partial x = 0$$

$$\int -2x+4 \partial x + \int e^y \partial y = \int 0$$

$$\left(\frac{-2}{2} x^2 + 4x \right) + (e^y) = c$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + e^y = c$$

3. $G = \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta}$ UNTUK $r(1) = 2$

$$G \cdot d\theta = r^2 d\theta \text{ DIBAGI } \theta$$

$$G \frac{\theta}{\theta} dr = \frac{r^2}{\theta} d\theta$$

$$G dr = \frac{1}{\theta} r^2 d\theta \text{ DIBAGI } r^2$$

$$\frac{G}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} \frac{r^2}{r^2} d\theta$$

$$\frac{G}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} d\theta$$

$$-\frac{1}{\theta} d\theta + \frac{G}{r^2} dr = 0$$

$$\int -\frac{1}{\theta} d\theta + \int \frac{G}{r^2} dr = \int 0$$

$$-\ln \theta + \frac{G}{-2+1} r^{-2+1} = C$$

$$-\ln \theta + \frac{G}{-1} r^{-1} = C$$

$$\boxed{-\ln \theta - \frac{G}{r} = C} \Rightarrow \text{UNTUK } r(1) = 2$$

$$-\ln \theta - \frac{G}{2} = C$$

$$-\ln \theta - 3 = C$$

$$4. \frac{\partial y}{\partial t} = e^{y-t} (\sec y) (1+t^2)$$

$$\partial y = e^{y-t} (\sec y) (1+t^2) \partial t \quad \text{Dikali sec y}$$

$$\frac{1}{\sec y} \partial y = e^{y-t} \left(\frac{\sec y}{\sec y} \right) (1+t^2) \partial t$$

$$\frac{1}{\sec} \partial x = e^{y-t} (1+t^2) \partial t \quad \text{Dikali } e^{-y}$$

$$\frac{1}{\sec y} e^{-y} \partial y = e^y \cdot e^{-t} \cdot e^{-y} (1+t^2) \partial t$$

$$\frac{e^{-y}}{\sec y} \partial y = e^{-t} (1+t^2) \partial t$$

$$e^{-y} \cdot \cos y \partial y = e^{-t} (1+t^2) \partial x$$

$$-(e^{-t} (1+t^2)) \partial t - e^{-y} \cos y \partial y = 0$$

$$-\int e^{-t} (1+t^2) \partial t + \int e^{-y} \cos y \partial y = 0$$

$$-(-3e^{-t} - t^2 e^{-t} - 2 + t e^{-t} + \frac{-\cos y + \sin y}{2 e^y} = C$$

$$\Rightarrow 3e^{-t} + t^2 e^{-t} + 2t e^{-t} - \frac{\cos y + \sin y}{2 e^y} = C$$

$$D. 8 \cdot \sec x \cos^2 y \, dx = \cos x \sin y \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{8 \cdot \sec x \cdot \cos^2 y \, dx}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} \sin y \, dx \rightarrow \text{DIBAGI } \cos x$$

$$\frac{8}{\cos x} \sec x \cdot \cos^2 y \, dx = \sin y \, dy \rightarrow \text{DIBAGI } \cos^2 y$$

$$\frac{8}{\cos x} \sec x \cdot \cos^2 y \, dx = \sin y \, dy \rightarrow \text{DIBAGI } \cos^2 y$$

$$\frac{8}{\cos x} \sec x \cdot \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} \, dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy$$

$$\frac{8 \sec x}{\cos x} \, dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dx$$

$$- \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy + \frac{8 \sec x}{\cos x} \, dx = 0$$

$$\int \frac{-\sin y}{\cos^2 y} \, dx + \int \frac{8 \sec x}{\cos x} \, dx = \int 0$$

$$\Rightarrow - \frac{1}{\cos y} + 8 \tan x = C$$

$$\textcircled{1} \quad y' = 2xy$$
$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$dy = 2xy \, dx$$

$$-2xy \, dx + dy = 0 \Rightarrow : y \text{ dibagi } y$$

$$-2x \, dx + \frac{1}{y} \, dy = 0$$

$$\int -2x \, dx + \int \frac{1}{y} \, dy = 0$$

$$-\frac{2}{2} x^2 + \ln y = C$$

$$-x^2 + \ln y = C$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y}(2x-4)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-4}{e^y}$$

$$dy(e^y) = (2x-4) \, dx$$

$$e^y dy = 2x-4 \, dx$$

$$\int e^y dy = \int 2x-4 \, dx$$

$$e^y = \frac{2}{1+1} = x^{1+1} - 4x$$

$$e^y = \frac{2}{2} x^2 - 4x$$

$$e^y = x^2 - 4$$

$$b) \quad 6 \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2}{\theta} : \text{Untuk } r(1) = 2$$

$$6\theta \cdot dr = r^2 d\theta \text{ dibagi } \theta$$

$$6 \frac{\theta}{\theta} dr = \frac{r^2}{\theta} d\theta$$

$$6 dr = \frac{1}{\theta} r^2 d\theta \text{ dibagi } r^2$$

$$\frac{6}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} \frac{r^2}{r^2} d\theta$$

$$\frac{6}{r^2} dr = \frac{1}{\theta} d\theta$$

$$-\frac{1}{\theta} d\theta + \frac{6}{r^2} dr = 0$$

$$\int -\frac{1}{\theta} d\theta + \int \frac{6}{r^2} dr = \int 0$$

$$= \ln \theta + \frac{6}{-2+1} r^{-2+1} = C$$

$$= \ln \theta + \frac{6}{1} r^{-1} = C$$

$$= \ln \theta - \frac{6}{r} = C$$

$$\text{Untuk } r(1) = 2$$

$$\ln \theta - \frac{6}{-2} = C$$

$$= \ln \theta - 3 = C$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A} \quad \frac{dy}{dt} &= e^{y-t} (\sec y) (1+t^2) \\
 dy &= e^{y-t} (\sec y) (1+t^2) dt \text{ dibagi } \sec y \\
 \frac{1}{\sec y} dy &= e^{y-t} \left(\frac{\sec y}{\sec y} \right) (1+t^2) dt \\
 \frac{1}{\sec y} dy &= e^{y-t} (1+t^2) dt \text{ dikali } e^{-y} \\
 \frac{1}{\sec y} \cdot e^{-y} dy &= e^y \cdot e^{-t} \cdot e^{-t} (1+t^2) dt \\
 \frac{e^{-y}}{\sec y} dy &= e^{-t} (1+t^2) dt \\
 e^{-y} \cos y dy &= e^{-t} (1+t^2) dt \\
 -(e^{-t} (1+t^2)) dt - e^{-y} \cos y dy &= 0 \\
 -\int e^{-t} (1+t^2) dt + \int e^{-y} \cdot \cos y dy &= 0 \\
 \Rightarrow -(-3e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t} - 2te^{-t}) + \frac{\cos y + \sin y}{2e^y} \\
 \Rightarrow 3e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t} + 2te^{-t} - \frac{\cos y + \sin y}{2e^y}
 \end{aligned}$$

$$⑤ \quad 8 \sec x \cos^2 y \, dx = \cos x \times \sin y \, dy.$$

$$\frac{8 \sec x \cos^2 y \, dx}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \sin y \, dy.$$

$$\frac{8}{\cos x} \sec x \cdot \cos^2 y \, dy = \sin y \, dy \Rightarrow \text{Integrasi } \cos^2 y$$

$$\frac{8}{\cos x} \sec x \cdot \frac{\cos^2 y \, dx}{\cos^2 y} = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy.$$

$$8 \frac{\sec x}{\cos x} \, dx = \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy.$$

$$- \frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy + 8 \frac{\sec x}{\cos x} \, dx = 0$$

$$\int -\frac{\sin y}{\cos^2 y} \, dy + \int \frac{8 \sec x}{\cos x} \, dx = \int 0$$

$$\frac{-1}{\cos y} + 8 \tan x = C$$