DERET TAYLOR DAN DERET MACLUOREN

1. Deret Taylor

   Teorema: hanya ada satu deret pangkat dalam (x-c) yang memenuhi untuk f(x) sehingga:

   $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots\dots = \sum_0^\infty a_n(x-c)^n$ berlaku untuk semua x dalam beberapa interval di sekitar c dengan $a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$

Deret: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$ disebut deret Taylor

Bukti:

Jika $f(x)$ kontinu dalam selang $(c-h, c+h)$ dengan $0 \le h \le \infty$ dan andaikan f didefinisikan sebagai:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots\cdots + a_n(x-c)^n + \cdots\cdots \qquad (1)$$

Untuk semua x dalam selang $(c-h, c+h)$, maka:

$$f^1(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots\cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots\cdots$$

$$f^{11}(x) = 2a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-c) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-c)^2 + 4\cdot 5 a_5(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

$$f^{111}(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-c) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-c)^2 + 4\cdot 5\cdot 6a_6(x-c)^3 + \cdots\cdots + \cdots$$

. . . .

. . . .

$$f^n(x) = n!a_n + (n+1)!\,a_{n+1}(x-c) + (n+2)!\,a_{n+2}(x-c)^2 + (n+3)!\,a_{n+3}(x-c)^3 + \cdots\cdots$$

Jika pada fungsi turunan di atas ditetapkan $x = c$, maka diperoleh:

$$f(c) = a_0\,;\; f^1(c) = 1!a_1\,;\; f^{11}(c) = 2!a_2\,;\; f^{111}(c) = 3!a_3\,;\; \ldots\ldots\; f^n(c) = n!a_n$$

atau

$$a_0 = f(c)\,;\; a_1 = \frac{f^1(c)}{1!}\,;\; a_2 = \frac{f^{11}(c)}{2!}\,;\; a_3 = \frac{f^{111}(c)}{3!}\,;\; \ldots\ldots\; a_n = \frac{f^n(c)}{n!}$$

Jika harga $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots\ldots$ dimasukkan ke persamaan (1) di atas, maka akan didapat:

$$f(x) = f(c) + \frac{f^1(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{11}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{111}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

2. Deret Mac Laurin

Jika deret Taylor diterapkan untuk c=0 → deret Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots\ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Contoh. Deretkan $f(x) = e^{2x}$

a. di sekitar 0
b. di sekitar 2

Jawab.

a.
$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{2x} \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \\
&f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(0) = 2 \\
&f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(0) = 4 \\
&f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(0) = 8 \\
&dst
\end{aligned}$$

shg deret Mc Laurin → $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \ldots.. + \frac{2^n}{n!}x^n$

b.
$$\begin{aligned}
&f(x) = e^{2x} \rightarrow f(2) = e^4 \\
&f'(x) = 2e^{2x} \rightarrow f'(2) = 2e^4 \\
&f''(x) = 4e^{2x} \rightarrow f''(2) = 4e^4 \\
&f'''(x) = 8e^{2x} \rightarrow f'''(2) = 8e^4 \\
&dst
\end{aligned}$$
]

shg deret Taylor di sekitar c=2 →

$$e^{2x} = e^4 + 2e^4(x-2) + \frac{4e^4}{2!}(x-2)^2 + \frac{8e^4}{3!}(x-2)^3 + \ldots.. + \frac{2^n e^4}{n!}(x-2)^n$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Tentukan deret Taylor dan Macluoren dari;

   a. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ b. $f(x) = \ln(1+x)$

2. Tentukan deret Taylor dan Macluoren dari;

   a. $f(x) = \sin x$ b. $f(x) = \cos x$

5. Deret Taylor

$F(u) = e^{x} \cdot \cos x$

$f(u) = e^{u}$

$f(u) = e^{u} = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots$

$f(u) = \cos u$

$= 1 - \frac{u^2}{4!} + \frac{u^4}{6!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots$

$f(u) = e^{u} \cdot \cos u$

$= 1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^2}{4!}$

$= 1 + u - \frac{u^4}{8!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^8}{24!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^{12}}{36!} + \ldots$

MID TEST MATEMATIKA TERAPAN

1. Turunan pertama dari fungsi

a. $f(x) = (2x^2-3)(2x^2-5x+7)$

Turunan pertamanya bisa kita cari dengan melakukan perhitungan seperti berikut

$u = (2x^2-3)$; $u' = 2x$

$v = (2x^2-5x+7)$; $v' = 2x-5$

$$f'(x) = u'v + v'u$$
$$= 2x(2x^2-5x+7) + (2x-5)(2x^2-3)$$
$$= 4x^3 - 10x + 14x + 4x^2 - 6 - 10x^2 + 15$$
$$= 4x^3 + 4x - 6x^2 + 9$$

b. $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x^2}$

Misalkan $u = 2x-1$; $u' = 2$

$v = 3+x^2$; $v' = x$

$f(x) = \dfrac{u}{v}$ maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$= \frac{2(3+x^2) - (2x-1)x}{(3+x^2)^2}$$
$$= \frac{6+2x^2 - 2x^2 - x}{(3+x^2)^2}$$
$$= \frac{6-x}{(3+x^2)^2}$$

c. $f(x) = 3(2x-4)^2$

Misalkan

$f(u) = 3u^2$ maka $f'(u) = 3u$

$u(x) = 2x-4$, $u'(x) = 2$

$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

$= 3u \cdot 2$

$= 3(2x-4) \cdot 2$

$= 6(2x-4)$

$= 12x - 24$

d. $f(x) = 5\cos x - \frac{1}{2}x^2$

2. Carilah Integral fungsi berikut

a. $\int \frac{2x-1}{x^2}\,dx$

Jawab

$$\int \frac{2x-1}{x^2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2} - \int \frac{1}{x^2}$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int x^{-2}\,dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \left(\frac{1}{-1}\right)x^{-1} + c$$

$$= 2\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{x} + c$$

b. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c \Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}}\right) -$$

$$- \left(\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} + 2(0)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{28}{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{28}{3}$$

c. $\int x^2 . \sin x^3 \, dx$

$u = x^3$

$du = 3x^2 \, dx$

$\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$\int x^2 . \sin x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int \sin(u) \cdot du$

$= \frac{1}{3}\left(-\cos(u)\right) + c$

$= -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$

d. $\int 3x (x^2+5)^5 \, dx$

misalkan : $u = x^2 + 5$

$du = 2x$

$\frac{1}{2} du = x$

$\int 3x (x^2+5)^5 \, dx = 3 \int x (x^2+5)^5 \, dx$

$= 3 . \frac{1}{2} \int (u)^5 \, dx$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} (4)^6 + c$

$= \frac{1}{4} (x^2+5)^6 + c$

$= \frac{(x^2+5)^6}{4} + c$

3. Suku pertama suatu deret geometri adalah 2 dan jumlah sampai tak berhingga adalah 4 Carilah rasionya
Jawab

$$\text{Jumlah} = \frac{a}{1-r}$$

$$4 = \frac{2}{1-r}$$

$$4(1-r) = 2$$

$$4 - 4r = 2$$

$$-4r = -2$$

$$r = \frac{-2}{-4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

4. Carilah n terkecil sehingga $S_n > 1.000$ pada deret geometri $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots$

Dari deret tersebut diketahui $a = 1$ dan $r = 4$ $(r > 1)$ sehingga jumlah n suku pertamanya dapat ditentukan sebagai berikut :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{1(4^n - 1)}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Nilai n yang mengakibatkan $S_n > 1.000$ adalah

$$\frac{4^n - 1}{3} > 1.000 \iff 4^n > 3.0001$$

Jika kedua ruas dilogaritmakan diperoleh

$\log 4^n > \log 3.001$

$\rightarrow n \log 4 > \log 3.001$

$n > \dfrac{\log 3.001}{\log 4}$

$n > 5{,}78$ (menggunakan kalkulator untuk menentukan nilai Logaritma)

Jadi, nilai n terkecil agar $S_n > 1.000$ adalah $\underline{\underline{6}}$

5. Tentukan deret taylor dan deret Maclauren

$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$ sampai suku ke lima

jawab

$f(x) = e^x \cos(x)$

$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x)$

$f''(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) - e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$

$= -2e^x \sin(x)$

$f'''(x) = -2e^x \sin(x) - 2e^x \cos(x)$

$f^{iv}(x) = -2e^x \sin(x) - 2e^x \cos(x) - 2e^x \cos(x) + 2e^x \sin(x)$

$= -4e^x \cos(x)$

$f^{v}(x) = -4e^x \cos(x) - 4e^x \sin(x)$

maka

$$f(0) = e^0 \cos(0) = 1$$

$$f'(0) = e^0 \cos(0) - e^0 \sin(0) = 1$$

$$f''(0) = -2e^0 \sin(0) = 0$$

$$f'''(0) = -2e^0 \sin(0) - 2e^0 \cos(0) = -2$$

$$f^{IV}(0) = -4e^0 \cos(0) = -4$$

$$f^{V}(0) = -4e^0 \cos(0) - 4e^0 \sin(0) = 4$$

Sehingga deret maclauren dari $f(x) = e^x \cos(x)$ adalah :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$+ \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{V}(0)}{5!}x^5$$

$$= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-2}{3!}x^3 + \frac{-4}{4!}x^4 + \frac{-4}{5!}x^5$$

$$= 1 + x + 0 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5$$

Nama : SUJONO

NIM : 202710020

Deret Taylor $f(x) = e^x \cos x$

$$f(x) = e^x$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$f(x) = \cos x$$
$$= 1 - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$f(x) = e^x \cos^x$$
$$= 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^2}{4!}$$
$$= 1 + x - \frac{x^4}{8!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^8}{24!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^{12}}{36!} + \cdots$$

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

(1) carilah turunan pertama dari fungsi :

a. $f(x) = (2x^2-3)(2x^2-5x+7)$

turunan pertama bisa kita cari dengan. melakukan perhitungan seperti berikut

$U = (2x^2-3) : V' = 2x$

$U = (2x^2-5x+7) ; 0 = 2x-5$

$f(x) = U'v + v'U$

$= 2x(2x^2-5x-7) + (2x-5)(2x^2-3)$

$= 4x^3 - 10x + 14x + 4x^2 - 6 - 10x^2 + 15$

$= 4x^3 + 4x - 6x^2 + 9$

b. $f(x) = \frac{2x-1}{3+x^2}$

misal : $U = 2x-1 \quad : U' = 2$

$v = 3+x^2 \quad ; v = x$

$f(x) = \frac{U}{v}$ maka

$f(x) = \frac{U'v - Uv'}{v^2}$

$= \frac{2(3+x^2) - (2x-1)x}{(3+x^2)}$

$= \frac{6+2x^2-2x^2-x}{(3+x^2)2}$

$= \frac{6-x}{(3+x^2)2}$.

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

c. $f(x) = 3(2x-4)^2$

misal : $f(u) = 3u^2$ maka $f'(u) = 3u$

$u(x) = 2x-4$. $u'(x) = 2$

$f'(x) = f'(u \cdot u'(x))$

$= 3u \cdot 2$

$= 3(2x-4) \cdot 2$

$= 6(2x-4)$

$= 12x - 24$.

D. $f(x) = 5\cos x - \frac{1}{2}x^2$

$f(0) = 5\cos(0) - \frac{1}{2} \times 0^2$

$f(0) = 5 \times 1 - \frac{1}{2} \times 0^2$

$f(0) = 5\cos(0) - \frac{1}{2} \times 0^2$

0 yang di Pangkatkan. bilangan positif apapun sama dengan 0

$f(0) = 5 \times 1 \frac{1}{2} \times 0$

$f(0) = 5 - \frac{1}{2} \times 0$

$f(0) = 5 - 0$

$f(0) = 5$

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

Carilah integral fungsi berikut

a. $\int \frac{2x-1}{x^2} dx$

penyelesaian.

$$\int \frac{2x-1}{x^2} dx = \int \frac{2x}{x} - \int \frac{1}{x^2}$$
$$= 2\int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x} dx - \left(\frac{1}{-1}\right) x^{-1} + c$$
$$= 2\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{x} + c$$

b. $\int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$= \int_0^4 x^{1/2} + x^{-1/2}$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c \Big|_0^4$$
$$= \left(\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{2}{3}(0)^{3/2} + 2(0)^{1/2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0$$
$$= \frac{28}{3}$$

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

c $\int x^2 . \sin x^3 \, dx$

$U = x^3$

$dU = 3x^2 \, dx$

$\frac{1}{3} dU = x^2 \, dx$

$\int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3} \int \sin(U) \cdot du$

$= \frac{1}{3} (-\cos(u) + c$

$= -\frac{1}{3} \cos x^3 + c$

d. $\int 3x(x^2+5)^5 dx$

misal : $U = x^2+5$

$dU = 2x$

$\frac{1}{2} dU = x$

$\int 3x(x^2+5)^5 dx = 3\int x(x^2+5)^5 dx$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} \int (U)^5 dx$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} (4)^6 + c$

$= \frac{1}{4} (x^2+5)^6 + c$

$= \frac{(x^2+5)^6}{4} + c$

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

3. Suku pertama suatu devet geometri adalah 2 dan Jumlah sampai tak terhingga adalah 4 Carilah Rasionya.

Jumlah $= \frac{a}{1-r}$.

$4 = \frac{2}{1-r}$

$4(1-r) = 2$

$4 - 4r = 2$

$-4r = \frac{-2}{-4}$

$= \frac{1}{2}$

4. Carilah n terkecil sehingga $S_n > 1.000$ pada devet geometri $1 + 4 - 16 + 64 + ..$

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{1(4^n - 1}{4-1} = \frac{4^n - 1}{3}$

nilai n yang mengakibatkan $S_n > 1.000$ adalah.

$\frac{4^n - 1}{3} > 1.000 \iff 4^n > 3.0001$

Jika kedua ruas di logaritmakan di peroleh.

$\log 4^n > \log 3.000$

$\rightarrow n \log 4 > \log 3.001$

$n > \frac{\log 3001}{\log 4}$

$n > 5,78$

Jadi nilai n terkecil agar $S_n > 1.000$ adalah

6//

Nama : Agus Putut
NIM : 202710030

Universitas Bina Darma

5 Tentukan deret taylor dan mac lauren
$f(x) = ex \cdot \cos(x)$ sampai suku ke lima

$f(x) = \frac{d}{dx}(e^x x \cos(x))$

$f(x) = \frac{d}{dx}(e \cdot x \cos(5x))$

gunakan aturan defrensial.

$\frac{d}{dx}(f \times g) = \frac{d}{dx}(f) \times g + f \times \frac{d}{dx}(g)$

$f(x) = \frac{d}{dx}(ex) \times \cos(5x) + e^x \times \frac{d}{dx}((\cos(5x))$

$f'(x) e \cdot x \cos(5x) + e^x \times \frac{d}{dx}(\cos(5x))$

$f'(x) e \cdot x \cos(5x) + e^x \times \frac{d}{dx}(\cos(5x))$

$f'(x) = e \times \cos(5x) + e^x \times (-\sin(5x) \times 5)$

$f'(x) = e \times \cos(5x) - e5^x \times \sin(5x)$

$f'(x) = e \times \cos(5x) - e5^x \times \sin(5x)$

QUIZ

MATA KULIAH MATEMATIKA TERAPAN

NAMA : AKHMAD THARMIZI

NIM : 202710001

MATAKULAIH : MATEMATIKA TERAPAN

PROGRAM MAGISTER TEKNIK SIPIL

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS BINA DARMA

PALEMBANG

2020

1). Carilah turunan pertama dari fungsi

a) $f(x) = (2x^2-3)(2x^2-5x+7)$

Penyelesaian:

$f(x) = (2x^2-3)(2x^2-5x+7)$

$= 4x^4 - 10x^3 + 14x^2 - 6x^2 + 15x - 21$

$= 4x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 15x - 21$

$f'(x) = 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15$

b) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3+x^2}$

Penyelesaian:

misal : $U = 2x-1$

$U' = 2$.

$V = 3+x^2$

$V' = 2x$

Maka

$f'(x) = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$

$= \dfrac{2(3+x^2) - (2x-1)2x}{(3+x^2)^2}$.

$= \dfrac{6+2x^2-4x^2-2x}{(3+x^2)(3+x^2)}$

$= \dfrac{-2x^2-2x+6}{9+3x^2+3x^2+x^4}$

$= \dfrac{-2x^2-2x+6}{x^4+6x^2+9}$

c). $f(x) = 3(2x-4)^2$.

Penyelesaian :

$f(x) = 3(2x-4)^2$

$= 3(2x-4)(2x-4)$

$= 3(4x^2 - 8x - 8x + 16)$

$= 3(4x^2 - 16x + 16)$

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 48$

$= 24x - 48$

d). $f(x) = 5\cos x - \frac{1}{2}x^2$.

Penyelesaian :

$f(x) = 5\cos x - 1/2\, x^2$

$= 5 - \sin x - 1/2\, x^2$.

$= 5(-\sin x) - x$

$f'(x) = 5(-\sin x) - x$.

2) Carilah Integral fungsi berikut :

a. $\int \frac{2x-1}{x^2}\, dx$

Penyelesaian :

$\int \frac{2x-1}{x^2}\, dx$

$= \int \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\, dx$

$= \int 2x^{1-2} - x^{-2}\, dx$

$= \int 2x^{-1} - x^{-2}\, dx$.

$= \frac{2}{-1+1} \cancel{x}^{-1+1} - \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$

$= 0 - \frac{1}{-1} x^{-1} + C$.

$= x^{-1} + C$

$= \frac{1}{x} + C$

c. $\int x^2 \sin x^2 \; dx$.

Penyelesaian :

Misal : $U = x^2$.

$dV = \sin x^2 \; dx$

maka : $du = 2x$

$V = \int \sin x^2 \, dx = -\cos x^2$

Sehingga

$\int U \, dV = UV - \int V \, du$

$= x^2(-\cos x^2) - \int -\cos x^2 . 2x$

$= -x^2 \cos x^2 + \sin x^2 + 2$

$= x^2 - \cos x^2 + \sin x^2 + 2$

Jadi hasil dari $\int x^2 \sin x^2 \; dx$ adalah $x^2 - \cos x^2 + \sin x^2 + 2$

d. $\int 3x (x^2+5)^5 \; dx$.

Penyelesaian :

$\int 3x (x^2+5)^5 dx$

$= \frac{3x}{2x} \cdot \frac{1}{6} (x^2+5)^6 + C$

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} (x^2+5)^6 + C$.

$= \frac{3}{12} (x^2+5)^6 + C$.

$= \frac{1}{4} (x^2+5)^6 + C$.

3). Suku pertama suatu deret geometri adalah 2 dan jumlah sampai tak berhingga adalah 4. Carilah rasionya.

Penyelesaian:

Diketahui: $a = 2$

$S\infty : 4$

Untuk menentukan nilai rasionya

$S\infty : 4$

$$\frac{a}{1-r} = 4$$

$$\frac{2}{1-r} = 4$$

$$1-r = \frac{2}{4}$$

$$1-r = \frac{1}{2}$$

$$r = 1-\frac{1}{2}$$

$$r = 1$$

4). Carilah n terkecil sehingga $Sn > 1.000$ pada deret geometri $1+4+16+64+\ldots$

Penyelesaian:

Dari deret tersebut diketahui

$a=1$ dan $r=4$ $(r>1)$ sehingga jumlah n suku pertamanya ditentukan sebagai berikut:

$$Sn = \frac{a+(r^n-1)}{r-1}$$

$$= \frac{1+(4^n-1)}{4-1} = \frac{4^n-1}{3}$$

nilai n yang mengakibatkan $Sn > 1000$ adalah

$$\frac{4^n-1}{3} > 1000 \longrightarrow 4^n > 3.001$$

Jika dua ruas dilogkan diperoleh

$$\log 4^n > \log 3.001$$

$$\log 4 > \log 3.001$$

$$\to n > \log + 4$$

$$\to n > 5.78 \quad C$$

Jadi nilai n terkecil agar $S_n > 1000$

5. Tentukan deret taylor dan deret maclouren $f(x) = e^x . \cos(x)$, sampai suku ke lima.

Penyelesaian:

Bentuk umum deret taylor dapat ditulis dalam formulasi sebagai berikut:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Jika menggunakan pendekatan $a=0$

$f(x) = e^x \to f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \to f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \to f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \to f'''(0) = e^0 = 1$

$f^n(x) = e^x \to f^n(0) = e^0 = 1$

Maka dapat ditulis menurut formulasi deret taylor yaitu:

$$f(x) = e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$+ \dots + \frac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}(x-0)^n$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{(x)}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

hasilnya: $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}(x)^n$ terbukti merupakan deret taylor

Jika menggunakan pendekatan $a=0$ maka

$f(x) = \cos x \rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$

$f'(x) = -\sin x \rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightarrow f''(0) = -\cos 0 = 1$

$f'''(x) = \cos x \rightarrow f'''(0) = \cos 0 = 1$

$f^{IV}(x) = \sin x \rightarrow f^{IV}(0) = \sin 0 = 0$ dan seterusnya.

Jika ditulis dalam bentuk formulasi deret taylor yaitu:

$f(x) = \cos x$

$$f(0) = \cos x = 1 + \frac{0}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}(x-0)^4$$

$$+ \frac{f^{V}(0)}{5!}(x-0)^5 + \dots$$

$$f(x) = \cos x = 1 + \frac{0}{1!}(x) + \frac{-1}{2!}(x^2) + \frac{0}{3}!(x)^3 + \frac{1}{4}(x)^4 + \frac{0}{5}(x)^5$$

$$f(x) = 1 + 0 + \frac{-1}{2!}(x^2) + 0 + \frac{1}{4}(x)^4 + 0 + \dots$$

$$f(x) = 1 + \frac{-1}{2!}(x)^2 + \frac{1}{4}(x)^4 + \dots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1^{n+1}}{(2n-2)!} (x)^{2n-2}$ merupakan deret taylor

Deret mac laurin

$\cos x = \cos 0 + \frac{-\sin 0}{1!} x + \frac{-\cos 0}{2!} x^2 + \frac{\sin 0}{3!} x^3 + \frac{\cos 0}{4!} x^4 + \frac{-\sin 0}{5!} x^5 + \dots$

$= 1 + 0 + \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 + \dots$

$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$