**PENERAPAN INTEGRAL**

**Tujuan Instruksional**

Dalam bab ini diharapkan mahasiswa dapat mengerti dan menyelesaikan tentang penggunaan integral , yang telah dipelajari dalam bab sebelumnya disini diberikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya, serta soal soal yang ada.

**7.1. Menghitung Luas Bidang Rata Stroud KA, (1994 : 534 )**

y

y = f(x)

**A**

**Gambar 4**

x

b

a

0

Daerah diatas sumbu x misalkan y = f(x). Tinjaulah daerah A yang dibatasi oleh x = a dan x = b. A sebagai daeah dibawah y = f(x) antara x = a dan x = b maka luas daerah A ditentukan oleh :

 

**Contoh 1** :

Carilah luas daerah dibawah kurva y = x2 + 2x + 1 diantara x = 1 dan x = 2

**Penyelesaian** :

 



**Contoh 2 (Purcell , 1991 : 312)**

Tentukanlah luas daerah R dibawah kurva y = x4 – 2x3 + 2 antara x = -1 dan x = 2

**Penyelesaian** :

5

4

3

2

**R**

1

-1

1

2

**Gambar 5**

Daerah R diperlihatkan pada gambar :



**Contoh 3 ( Purcell, 1991 : 313 )**

Tentukan l;uas daerah R yang dibatasi oleh y = x3 – 3x2 – x + 3, ruas sumbu x = -1 dan x = 2 dan oleh garis x = 2.

y

Penyelesaian :

3

2

1

x

1

-1

2

3

-1

-2

-3

**Gambar 6**

Daerah R adalah daerah yang diarsir pada gambar, ada sebagian diatas sumbu x dan ada yang dibawah sumbu x. Luas masing-masing bagaian harus dihitung.



**Contoh lain 1.**

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x +1

ruas sumbu diantara x = -4 dan x = 4

**Jawab :**

Untuk menghitung Luas suatu daerah R,kita tentukan terlebih dahulu harga y untuk masing masing nilai x...

Untuk X = -4

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (-4)4 – 2(-4)3 + 2(-4)2 + 3(-4) + 1

 = 256 + 128 + 32 -12 + 1

 = 405

Untuk X = -3

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (-3)4 – 2(-3)3 + 2(-3)2 + 3(-3) + 1

 = 81 + 54 + 18 + (-9) + 1

 = 145

Untuk X = -2

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (-2)4 – 2(-2)3 + 2(-2)2 + 3(-2) + 1

 = 16 + 16 + 8 + (-6) + 1

 = 35

Untuk X = -1

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (-1)4 – 2(-1)3 + 2(-1)2 + 3(-1) + 1

 = 1 + 2 + 2 + (-3) + 1

 = 3

Untuk X = 0

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = 04 – 2(0)3 + 2(0)2 + 3(0) + 1

 = 1

Untuk X = 1

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (1)4 – 2(1)3 + 2(1)2 + 3(1) + 1

 = 1 - 2 + 2 + 3 + 1

 = 5

Untuk X = 2

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (2)4 – 2(2)3 + 2(2)2 + 3(2) + 1

 = 16 – 16 + 8 + 6 + 1

 = 15

Untuk X = 3

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (3)4 – 2(3)3 + 2(3)2 + 3(3) + 1

 = 81 – 54 + 18 + 9 + 1

 = 55

Untuk X = 4

Y = x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1

 = (4)4 – 2(4)3 + 2(4)2 + 3(4) + 1

 = 256 – 128 +32 + 12 + 1

 = 173

Dari harga -harga Y yang didapat dari perhitungan diatas selanjutnya dibuat tabel sbb:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **X** | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **Y** | 405 | 145 | 35 | 3 | 1 | 5 | 15 | 55 | 173 |

Dari tabel diatas selanjudnya di buat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan ordinatnya. Hasil dari gambar baru diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya kita menghitung luas berdasarkan batas integralnya.



A = (x4 – 2x3 + 2x2 + 3x + 1) dx----------- salah

 =

 = -

 = -

 =

 =

 =

 = 481,6 satuan luas

**Contoh lain 2.**

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh Y =

Di antara X = -3 dan X = +3

**Penyelesaian**

Untuk X = -3

Y =

=

= -27 - 27 -3 +4

= -53

Untuk X = -2

Y =

=

 = -8 – 12 – 2 + 4

 = -18

Untuk X = -1

Y =

=

= -1 - 3 - 1 + 4

= -1

Untuk X = 0

Y =

=

= 0 – 0 + 0 + 4

= 4

Untuk X = 1

Y =

=

= 1 – 3 + 1 + 4

= 3

Untuk X = 2

Y =

=

= 8 – 12 + 2 + 4

= 2

Untuk X = 3

Y =

=

= 27 – 27 + 3 + 4

= 7

Dari hasil perhitungan diatas selanjudnya dibuat tabel sbb:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | -53 | -18 | -1 | 4 | 3 | 2 | 7 |

Dari tabel diatas selanjudnya di buat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan ordinatnya. Hasil dari gambar baru diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya kita menghitung luas berdasarkan batas integralnya.

Luas daerah 1

=

= -

= -

 = - 20-26-4 + 8

 = - 42 satuan luas

Luas daerah 2

=

= -

=

=

= 20 – 28 + 4 + 16

= 12 satuan luas

Total luas = luas daerah 1 + luas daerah 2

 = - 42 + 12

 = - 30 satuan luas

**Contoh soal lain 3**

Tentukan luas daerah R yang melalui y = x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

diantara x = -3 dan x = 3

**Jawab:**

Untuk x= -3

Y = x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (-3) 4 + 2(-3)3 – 3(-3)2 + (-3) + 2

 = 81 – 54 – 27 – 3 + 2

 = -1

Untuk x = -2

Y = x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (-2) 4 + 2(-2)3 – 3(-2)2 + (-2) + 2

 = 16 – 16 – 12 -2 + 2

 = -12

Untuk x = -1

Y = x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (-1) 4 + 2(-1)3 – 3(-1)2 + (-1) + 2

 = 1 – 2 – 3 – 1 + 2

 = -3

Untuk x = 0

Y= x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (0) 4 + 2(0)3 – 3(0)2 + (0) + 2

 = 2

Untuk x = 1

 Y= x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (1) 4 + 2(1)3 – 3(1)2 + (1) + 2

 = 1 + 2 – 3 +3

 = 3

Untuk x =2

 Y= x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (2) 4 + 2(2)3 – 3(2)2 + (2) + 2

 = 16 + 16 – 12 + 2 + 2

 = 24

Untuk x = 3

 Y= x4 + 2x3 – 3x2 + x + 2

 = (3) 4 + 2(3)3 – 3(3)2 + (3) + 2

 = 81 + 54 – 27 + 3 + 2

 = 113

Dari hasil perhitungan diatas maka dibuat dalam bentuk tabel sbb

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | -1 | -12 | -3 | 2 | 3 | 24 | 113 |

Dari tabel diatas selanjudnya di buat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan ordinatnya. Hasil dari gambar baru diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya kita menghitung luas berdasarkan batas integralnya.

****

Luas daerah I

|  |  |
| --- | --- |
| = | ₋₃∫⁰ (x⁴ + 2x³ ­- 3x² + x + 2)dx |
| = | [ ¹⁄₅x⁵ + ²⁄₄x⁴ - x³ + ¹⁄₂x² + 2x ]⁰₋₃ |
| = | [0] - [ ¹⁄₅(-3)⁵ + ²⁄₄(-3)⁴ - (-3)³ + ¹⁄₂(-3)² + 2(-3) ] |
| = | -[ -²⁴³⁄₅ + ¹⁶²⁄₄ + 27 + ⁹⁄₂ - 6 ] |
| = | + 48,6 - 40,5 - 27 - 4,5 + 6 |
| = | -17,4 satuan luas |

Luas daerah II

|  |  |
| --- | --- |
| = | ₀∫³ (x⁴ + 2x³ - 3x² + x + 2) |
| = | [ ¹⁄₅x⁵ + ²⁄₄x⁴ - x³ + ¹⁄₂x² + 2x ]³₀ |
| = | [ ¹⁄₅(3)⁵ + ²⁄₄(3)⁴ - (3)³ + ¹⁄₂(3)² + 2(3) ] - [ 0 ] |
| = | [ ²⁴³⁄₅ + ¹⁶²⁄₄ - 27 + ⁹⁄₂ + 6 ] |
| = | 48,6 + 40,5 - 27 + 4,5 + 6 |
| = | 72,6 |

Luas daerah I + luas daerah II

 = -17,4 + 72,6

 = 55,2 satuan luas

**Contoh soal lain 4**

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh y = x4-3x2+2x+3

diantara x = -3 dan x= +3
**Jawaban :**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | Y | 51 | 3 | -1 | 3 | 3 | 11 | 63 |

Untuk x = -3

 y = x⁴-3x2+2x+3

 Y=( -3)4 -3(-3)2+2(-3)+3
 = 81-27-6+3
 = 51

Untuk x = -2

 Y=( -2)4 -3(-2)2+2(-2)+3
 =16 -12- 4 + 3
 = 3

Untuk x = -1

 Y= ( -1)4 -3(-1)2+2(-1)+3
 = 1-3-2+3
 = -1

Untuk x = 0

 Y= (0)4 - 3(0)2 + 2(0) + 3
 = 3

Untuk x = 1

 Y= (1)4 - 3(1)2 + 2(1) + 3
 = 1-3 + 2 + 3
 = 3

untuk x = 2

Y=(2)4 -3(2)2+2(2)+3
 =16-12+4+3
 =11

Untuk x = 3

Y =(3)4 -3(3)2+2(3)+3

 =81-27+6+3

 = 63

Dari hasil perhitungan diatas maka selanjutnya dibuat tabel sbb :

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Y | 51 | 3 | -1 | 3 | 3 | 11 | 63 |

Dari tabel diatas selanjudnya di buat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan ordinatnya. Hasil dari gambar baru diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya kita menghitung luas berdasarkan batas integralnya.



Luas daerah I

₋₃ʃ⁻¹(x⁴-3x²+2x+3)dx
=(⅕x⁵-³̸₃x³-²̸₂x²+3x)₋₃⁻¹
=(⅕(-1)⁵-(-1)³-(-1)²-3(-1))- ((⅕(-3)⁵-(-3)³-(-3)²-3(-3))
=(-¹̸₅+1-1+3) - (-²⁴³̸₅ + 27-9+9)
=(²⁴²̸₅ - 26 + 8-6)
=48,4 -26 +8-6

=24,4 satuan luas

Luas daerah II

₋₁ʃ³(x4-3x²+2x+3)dx
=(⅕x5-x³ + x²+3x)₋₁³
= ((⅕(3)5-(3)³+(3)²+3(3)) – ((⅕(-1)-(-1)³+(-1)²+3(-1))
=48,8-24

 =24,8

 Luas Total = luas daerah I + luas daerah II
 = 24,4 + 24,8
 = 49,2 satuan luas

**Contoh untuk fungsi parameter**

Jika  dan , tentukanlah luas daerah dibawah kurva diantara  dan  Penyelesaian : 

 



**7.2. Panjang Kurva ( Stroud, 1994 : 567 )**

 Akan dicari panjang besar suatu kurva y = f(x) antara x = a dan x = b. Misalkan P adalah titik (x,y) dan Q adalah titik pada kurva didekat P, misalkan pula ds = panjang busur kecil PQ.

y = f(x)

ds

y

B

Q

P

Q

ds

A

dy

P

b

a

0

x

**Gambar 7**

dx

x

dx

Maka :





S = Panjang kurva

Contoh soal ( Stroud, : 566 )

Tentukanlah panjang kurva y2 = x3 diantara x = 0 dan x = 4, y > 0.

Penyelesaian : y2 = x3



Jadi panjang kurva dapat dihitung dengan menggunakan rumus diatas sebagai berikut :



**Soal-soal Latihan** :

1. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x2 – 6x + 5, sumbu x, dan ordinat pada x = 1 dan x = 3.
2. Tentukanlah luas daerah R yang dibatasi oleh  sumbu x, x = -2 dan x = 3.
3. Tentukanlah panjang kurva  diantara x = 0 dan x = 3.
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x2 + 3x + 2, sumbu x, dan ordinat pada x = -3 dan x = +3.
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = 2x2 - 3x + 1, sumbu x, dan ordinat pada x = -3 dan x = +3.
6. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x3 + 3x2 + 1, sumbu x, dan ordinat pada x = -3 dan x = +3.