

DIFERENSIAL/ TURUNAN

a. SIMBOL DIFERENSIAL/TURUNAN

$$y' \text{ atau } f'(x) \text{ atau } \frac{dy}{dx}$$

b. RUMUS-RUMUS DIFERENSIAL/TURUNAN FUNGSI ALJABAR

1. $f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$, $k = \text{konstanta}$
2. $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
4. $f(x) = a \cdot x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$
5. $f(x) = U \cdot V \rightarrow f'(x) = U' \cdot V + V' \cdot U$
6. $f(x) = \frac{U}{V} \rightarrow f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

c. RUMUS-RUMUS TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

1. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
3. $f(x) = \text{tg } x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
4. $f(x) = \sin ax \rightarrow f'(x) = a \cdot \cos ax$
5. $f(x) = \cos ax \rightarrow f'(x) = -a \cdot \sin ax$

CATATAN :

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$
3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
5. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
6. $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$
7. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
8. $\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$
9. $\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$

d. DALIL RANTAI/ TURUNAN BERANTAI

Jika $f(x) = U^n$ maka $f'(x) = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$

CONTOH SOAL- SOAL TURUNAN

$$1. f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 5x^3 - 7x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x^3 + 15x^2 - 7$$

$$2. f(x) = 3\sqrt{x} \rightarrow f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$$3. f(x) = (2x + 5)(x^3 - 3x + 5) \rightarrow f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 10x + 5x^3 - 15x + 25$$

$$f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 5x + 25$$

$$f'(x) = 8x^3 + 15x^2 - 12x - 5$$

$$4. f(x) = \frac{x+3}{5-x^2} \rightarrow U = x + 3, \quad V = 5 - x^2$$

$$U' = 1 \text{ dan } V' = -2x$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{1(5-x^2) - (-2x)(x+3)}{(5-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5-x^2+2x^2-6x}{25-10x^2+x^4} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^4-10x-25}$$

$$5. f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}\sin x \rightarrow f'(x) = 10x^4 - \frac{1}{2}\cos x$$

$$6. f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow U = \sin x, \quad U' = \cos x, \quad V = \cos x, \quad V' = -\sin x$$

$$f'(x) = \frac{U'V - V'U}{V^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x \cdot \cos x) - (-\sin x \cdot \sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

INTEGRAL

A. Integral Tak Tentu

1. Pengertian integral

Definisi :

Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi $F(x)$ yang kontinu pada interval $[a, b]$ diperoleh $\frac{d(F(x))}{dx} = F'(x) = f(x)$. Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$, ditulis $\int f(x) dx$

Secara umum dapat kita tuliskan :

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + C$$

Catatan:

$\int f(x) dx$: disebut unsur integrasi, dibaca " integral $f(x)$ terhadap x "
 $f(x)$: disebut integran (yang diintegalkan)
 $F(x)$: disebut fungsi asal (fungsi primitive, fungsi pokok)
 C : disebut konstanta / tetapan integrasi

Integral fungsi aljabar

- $\int k dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, bila $n \neq -1$
- $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$, dengan $n \neq -1$
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$, dimana a konstanta sebarang.

Integral fungsi trigonometri

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$

$$3. \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$4. \int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

Untuk mengerjakan integral fungsi trigonometri akan digunakan kesamaan-kesamaan sebagai berikut berikut ini:

$$1. \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$4. \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2. \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$5. 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

$$3. \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$6. 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$$

Contoh soal :

$$1. \int \sqrt[3]{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$2. \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

B. Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

$f(x)$ adalah integrand, yaitu $f(x) = F'(x)$

a, b adalah batas-batas pengintegralan

$[a, b]$ adalah interval pengintegralan

Contoh soal :

$$\begin{aligned} 1. \int_0^2 (x^2 + 4x) \, dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \left[\frac{1}{3} (2)^3 + 2(2)^2 \right] - \left[\frac{1}{3} (0)^3 + 2(0)^2 \right] \\ &= (8/3 + 8) - (0 + 0) = 10 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

C. Teknik Pengintegralan

1. Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int [f(u) \frac{du}{dx}] dx = \int f(u) du$$

Contoh soal :

- Tentukan $\int 2x(x^2 + 3)^4 dx$!
- Tentukan $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$!

Penyelesaian:

- Misalkan $u = x^2 + 3$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$ atau $dx = \frac{du}{2x}$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga diperoleh, } \int 2x(x^2 + 3)^4 dx &= \int 2x u^4 \frac{du}{2x} \\ &= \int u^4 du \\ &= \frac{1}{5} u^5 + C \\ &= \frac{1}{5} (x^2 + 3)^5 + C \end{aligned}$$

- Misalkan $u = \sin x$, maka $\frac{du}{dx} = \cos x$ atau $dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga diperoleh, } \int \sin^3 x \cdot \cos x dx &= \int u^3 \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^3 du \\ &= \frac{1}{4} u^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \end{aligned}$$

2. Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}y = u \cdot v &\rightarrow dy = du \cdot v + u \cdot dv \\ \int dy &= \int v \, du + \int u \, dv \\ y &= \int v \, du + \int u \, dv \\ u \cdot v &= \int v \, du + \int u \, dv \\ \int u \, dv &= u \cdot v - \int v \, du\end{aligned}$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\begin{aligned}\int u \, v' &= uv - \int u'v \\ \int u \, dv &= uv - \int v \, du\end{aligned}$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\begin{aligned}\int_a^b u \, v' &= [uv]_a^b - \int_a^b u'v \\ \int_a^b u \, dv &= [uv]_a^b - \int_a^b v \, du\end{aligned}$$

Contoh soal :

Tentukan $\int x^2 \sin x \, dx$!

Penyelesaian:

Cara 1: dengan menggunakan rumus $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\text{Misal : } u = x^2, \rightarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\begin{aligned}\text{sehingga diperoleh, } \int x^2 \sin x \, dx &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x \, dx \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot 2x \, dx \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2(x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx) \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut :
untuk menentukan integral parsial bentuk $\int u \, dv$, yang turunan ke-k dari u adalah 0 dan integral ke-k dari v selalu ada.

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN
DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH
DITENTUKAN**

I. Tentukan turunan dari fungsi berikut ini :

1. $f(x) = 5\sqrt{x} - 7x$
2. $f(x) = (2x^2 - 3)(2x^2 - 5x + 7)$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{3+x^2}$
4. $f(x) = 3(2x-4)^2$
5. $f(x) = 5 \cos x - \frac{1}{2}x^2$
6. $f(x) = x^2 \cdot \sin x$
7. $f(x) = -\cos 6x - \sin 2x$
8. $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x + \cos 3x$

II. Tentukan hasil integral berikut.

1. $\int (1 + \sqrt[3]{x}) dx.$
2. $\int \cos^2 x dx.$
3. $\int \frac{2x-1}{x^2} dx.$
4. $\int 3x(x+1) dx.$
5. $\int_0^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx = \dots$
6. Selidiki apakah $\int_1^3 4x^3 dx + \int_3^4 4x^3 dx = \int_1^4 4x^3 dx$
7. $\int_{1/4\pi}^{1/2\pi} \sin 2x dx = \dots$
8. $\int x^2 \cdot \sin x^3 dx$
9. $\int \sqrt{x+7} dx$
10. $\int x^2 \cdot \sin x dx$
11. $\int -2x \cdot \cos (x+3) dx$