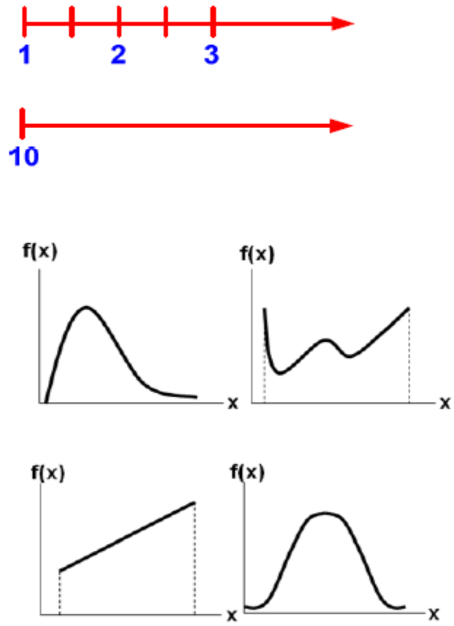
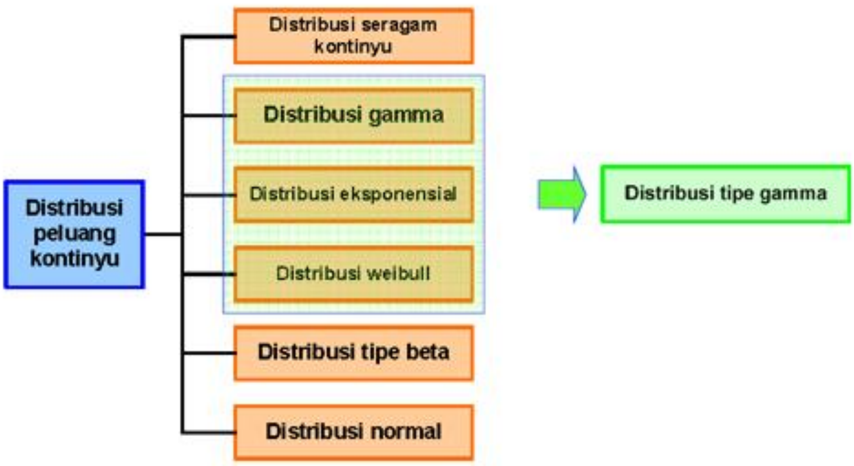
BAB 5. DISTRIBUSI PROBABILITAS KONTINYU

A. Distribusi probabilitas kontinyu

Berbeda dengan variabel random diskrit, sebuah variabel random kontinyu adalah variabel yg dapat mencakup nilai pecahan maupun mencakup range/rentang nilai tertentu. Karena terdapat bilangan pecahan yang jumlahnya tidak terbatas, kita tidak dapat menuliskan semua nilai yg mungkin bersama dengan probabilitasnya masing – masing dalam bentuk tabel. Namun dapat dituliskan dalam bentuk fungsi kepadatan probabilitas (*Probability Density Function : pdf*). Plot untuk fungsi seperti ini disebut kurva probabilitas dan nilai probabilitasnya dinyatakan sebagai luas suatu kurva yang bernilai positif.



Gambar 5.1 Contoh kurva probabilitas diskrit dan kontinyu



Gambar 5.2 Jenis distribusi peluang kontinyu

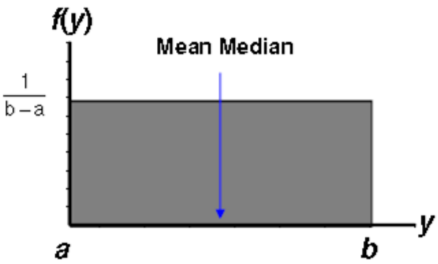
B. Distribusi Seragam Kontinyu

Distribusi seragam kontinyu memiliki ciri yaitu variabel random seragam Y = salah satu nilai dalam interval $a \le y \le b$ serta setiap Y memiliki nilai peluang seragam dalam selang $a \le y \le b$.

Diberikan oleh :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, jika y bernilai } a \le y \le b \\ 0 & \text{, jika y bernilai lainnya} \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{dan} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Contoh soal 1. Sebuah mesin roll menghasilkan lembaran baja dengan ketebalan berkisar antara $150 \le y \le 200$. Tentukan fungsi distribusi peluang, rata – rata, dan variansi dari ketebalan baja jika dianggap menganut distribusi seragam.

Jawab 1.

$$f(y) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{200-150} = \frac{1}{50}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{150+200}{2} = 175$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(200-150)^2}{12} = \frac{2500}{12}$$

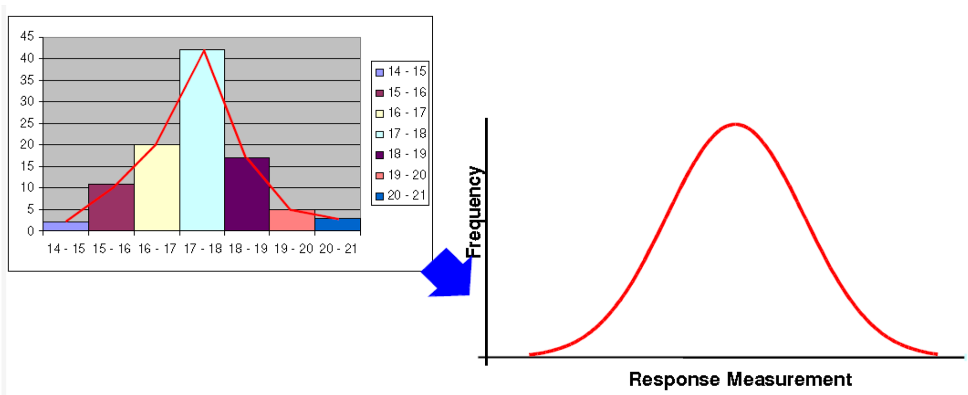
C. Distribusi Normal

Distribusi normal disebut juga “Gaussian Distribution” (sesuai dengan nama penemunya Carl Gauss). Diantara sekian banyak distribusi, distribusi normal merupakan distribusi yang secara luas banyak digunakan dalam berbagai penerapan. Distribusi normal merupakan distribusi kontinyu yang mensyaratkan variabel yang diukur harus kontinyu misalnya tinggi badan, berat badan, skor IQ, jumlah curah hujan, isi botol coca cola, hasil ujian, dan lain lain. Contoh data berdistribusi normal yaitu Jika terdapat 100 orang sampel yang diambil secara acak, setiap orang diminta untuk mengerjakan suatui tugas tertentu. Hasil pengamatan terhadap waktu yang mereka gunakan untuk menyelesaikan tugas tersebut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 5.1 Contoh data berdistribusi normal

Waktu (detik)	Frekuensi	Frekuensi
14-15	2	0,02
15-16	11	0,11
16-17	20	0,2
17-18	42	0,42
18-19	17	0,17
19-20	5	0,05
20-21	3	0,03
Total	100	1

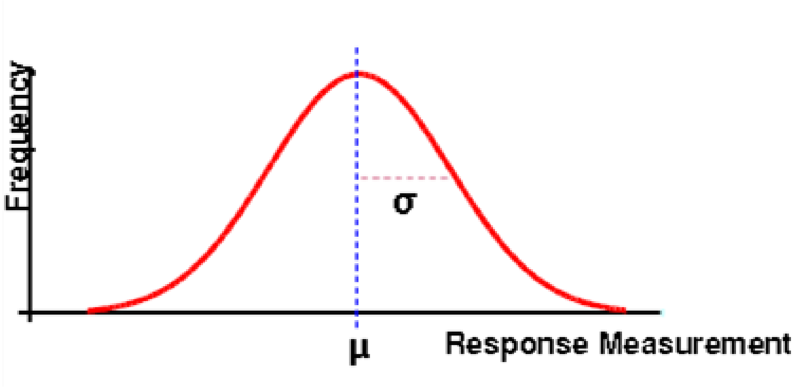
Misalkan percobaan tersebut diulang kembali, kali ini jumlah sampel yang digunakan adalah 5000 orang. Lalu histogram frekuensi relatifnya dibuat dengan lebar kelas yg dibuat kecil (sehingga jumlah kelas menjadi banyak). Maka histogram tersebut akan terdiri atas kotak persegi panjang yg ramping dalam jumlah yang banyak. Dengan semakin banyaknya sampel yg diambil dan lebar interval kelas yang kecil, maka histogram frekuensi relatif yg dihasilkan akan semakin mendekati bentuk kurva normal.



Gambar 5.3. Contoh histogram dan kurva normal distribusi normal

Distribusi Normal f(x) didefinisikan pada interval terbuka $-\infty < x < +\infty$. Distribusi normal dengan parameter $\mu \; dan \; \sigma^2$ biasanay ditulis N(μ, σ^2). Dengan memperhatikan persamaan umum & grafik distribusi normal f(x), tampak bahwa bentuk kurva normal ditentukan oleh dua parameter yaitu rata-rata (μ) dan simpangan baku (σ). Rumus untuk persamaan umum distribusi normal adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5.1)}$$

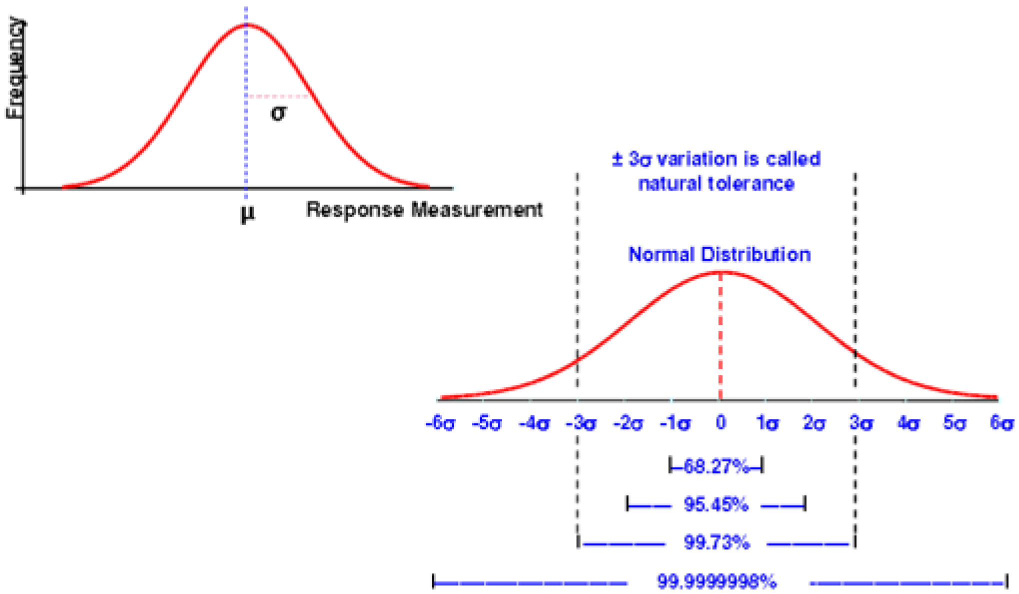


Gambar 5.4. Contoh kurva distribusi Normal

Dari gambar diatas, bila nilai σ mengecil, maka bentuk kurva akan lebih rapat & runcing dan sebagian besar nilai x akan berkumpul atau mendekati nilai rata-rata μ. Sebaliknya makin besar nilai σ, maka bentuk kurva akan lebih renggang dan tumpul, dimana sebagian besar nilai x menjauhi nilai rata-rata μ. Perhatikan gambar 5.5 berikut, σ paling runcing (warna merah dengan σ = 0,5) < σ kuning (σ=0,75) < σ ungu (1,5) dengan nilai rata-rata μ sama yaitu 0.

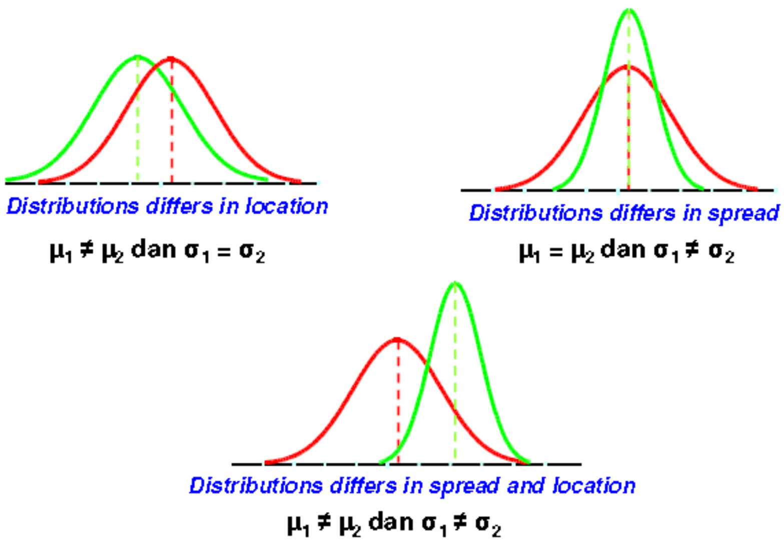
Ciri-ciri Distribusi Normal

1. Kurva berbentuk garis lengkung yang halus dan menyerupai genta/ lonceng ;
2. Kedua ekor/ ujungnya semakin mendekati sumbu absisnya tetapi tidak pernah memotong ;
3. Distribusi normal memiliki dua parameter, yaitu μ dan σ yang masing – masing menentukan lokasi dan bentuk distribusi ;
4. Titik tertinggi kurva normal berada pada rata – rata ;
5. Distribusi normal adalah distribusi yang simetris ;
6. Simpangan baku (standar deviasi = σ), menentukan lebarnya kurva. Makin kecil σ, maka bentuk kurva makin runcing ;
7. Total luas daerah dibawah kurva normal adalah 1 ;
8. Jika jarak dari masing – masing nilai X diukur dengan σ, maka kira – kira 68% berjarak 1σ, 95% berjarak 2σ, dan 99% berjarak 3σ.



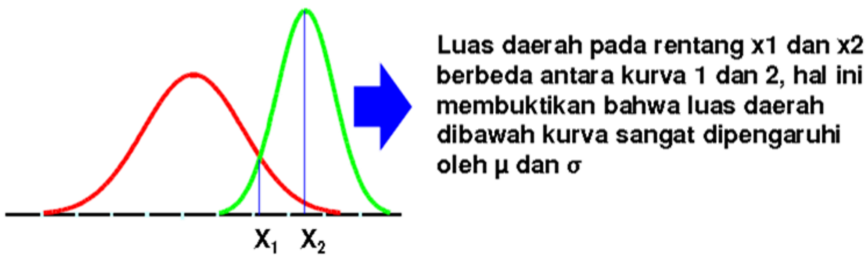
Gambar 5.5 Pendekatan ciri-ciri kurva distribusi normal

Persamaan matematika bagi distribusi probabilitas acak normal tergantung pada dua parameter, yaitu μ dan σ. Bila kedua nilai tersebut diketahui, maka kita dapat menggambarkan kurva normal tersebut dengan pasti.



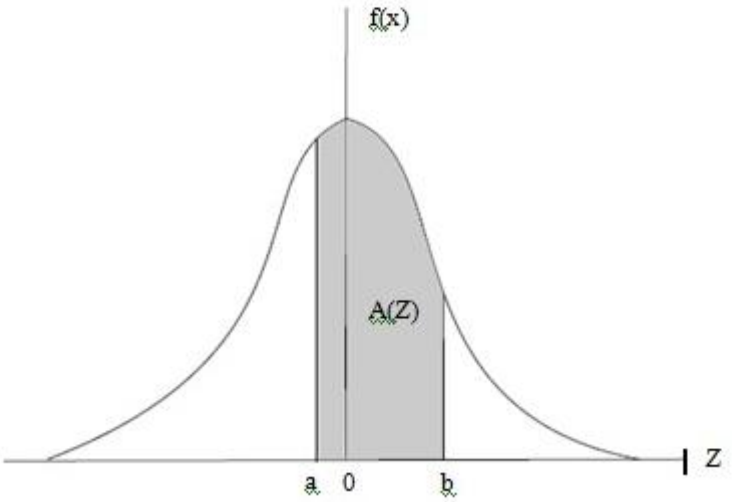
Gambar 5.6 Beberapa contoh perbandingan antara dua jenis kurva normal

Karena persamaan kurva normal tergantung pada nilai – nilai μ dan σ, maka kita akan memiliki bermacam – macam bentuk kurva.



Gambar 5.6 Contoh kurva normal dengan nilai x berbeda

Probabilitas distribusi normal f(x) pada interval a<x<b, ditentukan dengan memakai luas daerah di abwah kurva f(x) sebagaimana ditunjukkan oleh gambar berikut.



Gambar 5.7 Grafik Probabilitas Distribusi Normal f(x) pada interval a<x<b

Probabilitas P(a < x < b) ditunjukkan oleh luas daerah yang diarsir, yang dibatasi oleh kurva f(x), sumbu X, garis tegak X=a dan X=b. Dari Grafik sebelumnya Probabilitas P(a<x<b) dihitung dengan memakai integral dari fungsi f(x) yang diabatasi oleh x=a dan x=b, yaitu

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad \text{........................} \quad (5.2)$$

Akan tetapi secara matematis bentuk integral dari fungsi f(x) tersebut sulit dipecahkan secara langsung dengan teknik integral. Oleh karena itu , penyelesaiannya dilakukan dengan memakai transfor- masi nilai-nilai X menjadi nilai-nilai baku Z yaitu :

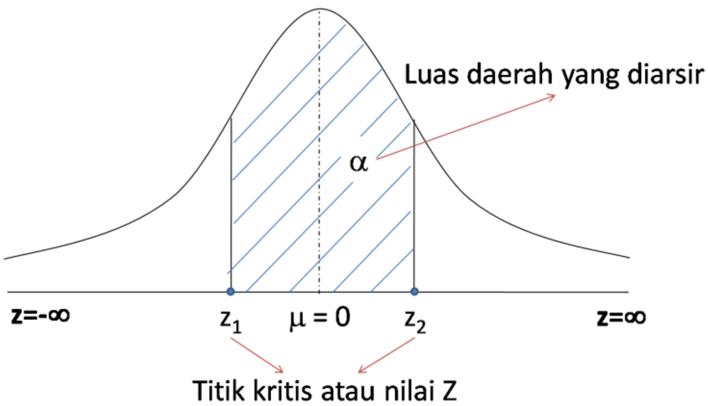
$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{..} \quad (5.3)$$

Dengan transformasi tersebut diperoleh distribusi normal Z yang dengan rata-rata $\mu = 0$ dan simpangan baku $\sigma = 1$ atau ditulis N(0,1). Distribusi normal Z sseperti ini disebut sebagai distribusi normal standard. Dengan demkian fungsi distribusi f(x) berubah menjadi fungsi distribusi f(Z) yaitu :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \text{ ; dimana } -\infty < Z < +\infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.4)$$

Nilai Z *(standard units)* = angka yang menunjukkan penyimpangan suatu variabel acak X dari *mean* (μ) di-hitung dalam satuan standar deviasi (σ). Untuk mengetahui berbagai luas dibawah lengkungan kurva normal standar sudah tersedia tabel luas kurva normal standar.

Berdasarkan fungsi distribusi Z, Probabilitas nilai-nilai Z terletak antara z1<Z<z2 ditunjukkan oleh luas daerah yang diarsir.



Gambar 5.8 Probabilitas fungsi distribusi Z

Selanjutnya Probabilitas P(z1<Z<z2) dihitung dengan rumus sebagai berikut

$$\mathit{Luas\ daerah\ di\ bawah\ kurva} = P(z_1 < Z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.5)$$

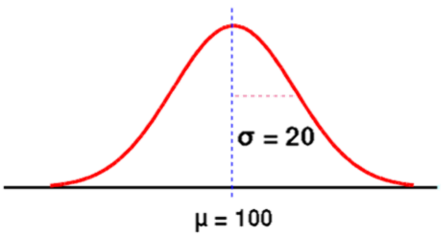
Berdasarkan integral dari fungsi distribusi normal standard Z tsb, probabilitas P(z1<Z<z2) dihitung dengan memakai "Tabel Distribusi Normal Standar".

Contoh Soal 1. Misalkan dimiliki kurva normal dengan $\mu = 100$ dan $\sigma = 20$. Hitunglah :

a. Luas kurva normal antara 100 – 125 atau $P(100 \leq x \leq 125)$

b. Luas kurva normal antara 80 – 100 atau $P(80 \leq x \leq 100)$

c. Luas kurva normal antara 75 – 120 atau $P(75 \leq x \leq 120)$



Jawab 1.

a.

$z_1 = \frac{100 - 100}{20} = \frac{0}{20} = 0$ → **Menurut tabel luasnya = 0,5000**

$z_2 = \frac{125 - 100}{20} = \frac{25}{20} = 1,25$ → **Menurut tabel luasnya = 0,8944**

MAKA, Luas kurva normal antara 100 – 125 = 0,8944 – 0,5000 = 0,3944

b.

$z_1 = \frac{80 - 100}{20} = \frac{-20}{20} = -1$ → **Menurut tabel luasnya = 0,1587**

$z_2 = \frac{100 - 100}{20} = \frac{0}{20} = 0$ → **Menurut tabel luasnya = 0,5000**

MAKA, Luas kurva normal antara 80 – 100 = 0,5000 – 0,1587 = 0,3413

c.

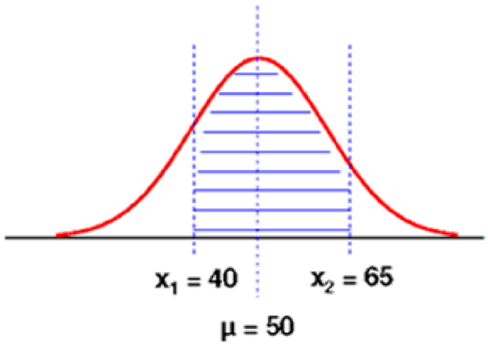
$z_1 = \frac{75 - 100}{20} = \frac{-25}{20} = -1,25$ → **Menurut tabel luasnya = 0,1056**

$z_2 = \frac{120 - 100}{20} = \frac{20}{20} = 1$ → **Menurut tabel luasnya = 0,8413**

MAKA, Luas kurva normal antara 75 – 120 = 0,8413 – 0,1056 = 0,7357

Contoh Soal 2. Misalnya seorang sarjana teknik mesin menyelidiki hasil panenan padi untuk merancang sebuah mesin perontok padi. Dari 300 orang petani di suatu daerah diketahui hasil panenan rata – rata sebesar 50 kwintal dengan deviasi standar sebesar 10 kwintal. Peneliti tersebut telah menge- cek distribusi hasil panenan dan dinyatakan memiliki distribusi normal. Tentukan probabilitas hasil panenan berkisar antara 40 sampai 65 kwintal.

Jawab 2.



$$z_1 = \frac{40 - 50}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \longrightarrow$$ **Menurut tabel luasnya = 0,1587**

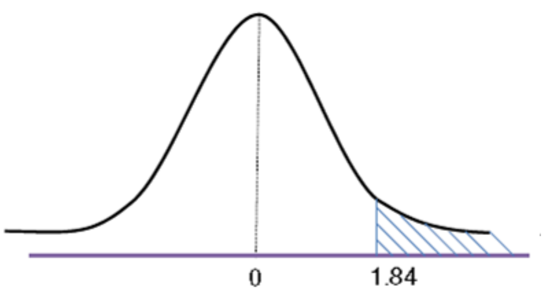
$$z_2 = \frac{65 - 50}{10} = \frac{15}{10} = 1{,}5 \longrightarrow$$ **Menurut tabel luasnya = 0,9332**

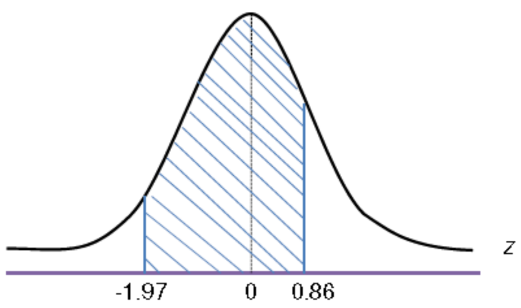
MAKA, Luas kurva normal antara 40 – 65 = 0,9332 – 0,1587 = 0,7745

Contoh Soal 3. Diberikan distribusi normal baku, hitunglah daerah di bawah kurva yang dibatasi:

a. sebelah kanan z = 1.84

b. antara z = -1.97 dan z = 0.86





Jawab 3

a. Luas sebelah kanan = 1 – luas sebelah kiri z = 1.84 (lihat gambar). Dari tabel luas sebelah kiri = 0.9671, jadi Luas sebelah kanan = 1 – 0.9671 = 0.0329

b. Luas daerah antar batas tersebut adalah luas di sebelah kiri z = 0.86 dikurangi dengan luas di sebelah kiri z = -1.97.
Dari tabel diperoleh 0.8051 - 0.0244 = 0.7807

Contoh Soal 4. Sebuah mesin pembuat resistor dapat memproduksi resistor dengan ukuran rata-rata 40 ohm dengan standard deviasi 2 ohm. Misalkan ukuran tersebut mempunyai distribusi normal, tentukan peluang resistor mempunyai ukuran lebih dari 43 ohm.

Jawab 4.

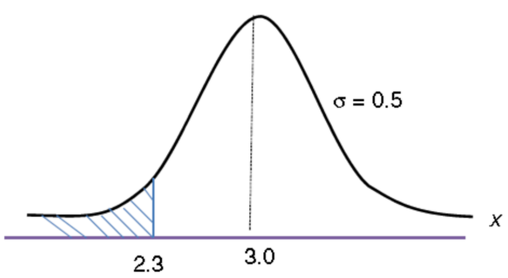
$$Z = \frac{(43-40)}{2} = 1.5$$

sehingga dapat dihitung:

$$P(X > 43) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$$
$$= 1 - 0.9332 = 0.0668$$

Contoh Soal 5. Suatu jenis batere mobil rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan baku 0.5 tahun. Bila dianggap umur bater berdistribusi normal, carilah peluang suatu batere berumur kurang dari 2,3 tahun.

Jawab 5.



Untuk menghitung P(X < 2.3), hitunglah luas di bawah kurva normal sebelah kiri titik 2.3. Ini sama saja menghitung luas daerah sebelah kiri z padanannya: z = (2.3 – 3.0)/0.5 = -1.4 dan dari tabel normal baku diperoleh:

$$P(X < 2.3) = P(Z < -1.4) = 0.0808$$

Contoh soal 6. Terdapat 200 orang mahasiswa yang mengikuti ujian Kalkulus di sebuah Prodi, diperoleh bahwa nilai rata-rata adalah 60 dan simpangan baku (standard devisasi) adalah 10. Bila distribusi nilai menyebar secara normal, berapa:

a. persen yang mendapat A, jika nilai A ≥ 80;

b. persen yang mendapat nilai C, jika nilai C terletak pada interval 56 ≤ C ≤ 68;

c. persen yang mendapat nilai E jika nilai E < 45

Misalkan X adalah peubah acak yang menyatakan nilai ujian Kalkulus.

Jawab 6.

$$Z = \frac{X - 60}{10}$$

(a) z = (80 – 60)/10 = 2

P(X ≥ 80) = P(Z ≥ 2) = 1 – 0.9772 = 0.0288 = 2.28%

(b) z_1 = (56 – 60)/10 = -0.4 dan z_2 = (68 – 60)/10 = 0.8

P(56 ≤ X ≤ 68) = P(-0.4 ≤ Z ≤ 0.8) = P(Z < 0.8) – P(Z < -0.4)

= 0.4435 = 44.35%

(c z = (45 – 60)/10 = -1.5

P(X ≤ 45) = P(Z ≤ -1.5) = 0.0688 = 6.68%