BAB 4. DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

A. Distribusi Binomial

Perhatikan kembali setiap hasil percobaan statistik pada pembahasan sebelumnya, dari semua percobaan hasil-hasil yang ada dapat dibedakan menjadi 2 jenis, sebagaimana contoh berikut ini. Pada pelemparan sebuah uang logam kita dapat melemparakan sebanyak 10 kali atau 100 kali dan seterusnya sesuai kepentingan. Kemudian hasil –hasil yang muncul dibedakan menjadi 2 yaitu kejadian munculnya muka dan bukan muka. Pada Pelemparan sebuah dadu sebanyak 100 kali akan diperoleh hasil kemungkinan munculnya 6 dan bukan enam. Secara singkat hasil-hasil yang muncul pada percobaan statistic dapat dibedakan menjadi dua yaitu kejadian sukses dan kejadian gagal. Selain itu kejadian sukses dan gagal dari satu percobaan ke percobaan lainnya tersebut merupakan saling bebas. Suatu percobaan statistik disebut percobaan Binomial jika mempunyai ciri-ciri :

1. Percobaan diulang sebanyak n kali
2. Hasil percobaan dibedakan menjadi 2 yaitu kejadian sukses (S) dan kejadian gagal (G)
3. Probabilitas terjadinya kejadian sukses (S) dan gagal (G) yaitu : P(S)= p dan P(G)=1-p = q adalah tetap pada tiap kali percobaan diulang
4. Semua hasil yang muncul bebas satu sama lain

B. Perumusan Distribusi Binomial

Jika Peluang sukses (S) dalam suatu experimen adalah p→ prob(S)= p dan Peluang gagal (G) adalah q = 1 –p → prob(G) = q. Maka pada 1 kali eksperimen peluang sukses p dan peluang gagal q. Untuk 2 kali ekserimen peluang sukses kemudian sukses (S,S) : pp, peluang sukses kemudian gagal (S,G) : pq, peluang gagal kemudian sukses (G,S) : qp, peluang gagal kemudian gagal (G,G): qq. Sedangkan untuk 3 kali eksperimen peluang sukses dan gagal dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.1 Sukses-Gagal dalam 3 kali eksperimen

jumlah sukses	cara sukses	jumlah cara sukses	probabilitas	
3	SSS	1	1 *ppp*	1 p^3q^0
2	SSG, SGS, GSS	3	3 *ppq*	3 p^2q^1
1	SGG, GSG, GGS	3	3 *pqq*	3 p^1q^2
0	GGG	1	1 *qqq*	1 p^0q^3

Pada Sukses-Gagal dalam 3 kali atau 5 kali eksperimen dimana untuk 3 kali eksperimen diperoleh peluang sukses pada experimen ke-3 qqp dan peluang sukses di salah satu experiment pqq+ qpq+ qqp. Untuk 5 kali eksperimen diperoleh peluang sukses 2 kali *ppqqq*+ *pqpqq*+ ... + *qqqpp*, atau disederhanakan dalam bentuk rumus $\binom{5}{2}p^2q^3 = 10p^2q^3$. Maka peluang mendapatkan *x* kali suksesdari *n* kali experimen adalah

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{P(X = x)} = f_x\ (\mathrm{x, n, p}) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4.1)}$$

x= 0,1,2,….,n ; x adalah koefsien binomial.

Distribusi binomial mempunyai nilai rata-rata, variansi, simpangan baku sebagai berikut :

Rata-rata (Ekspektasi Matematik) $\boldsymbol{\mu = n.p}$ …………………………………………….. (4.2)

Variansi $\boldsymbol{\sigma^2 = n.p.q}$ ………………….………………………………………….…. (4.3)

Simpangan baku $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{npq}}$ ………………..……………………………….…. (4.4)

Ada kalanya perhitungan probabilitas ditribusi binomial lebih mudah dilakukan dengan memakai distribusi kumulatif. Bila ada n percobaan terdapat paling tidak sebanyak r sukses, maka distribusi binomial kumulatif P(X ≥ r) dapat dirumuskan seagai berikut :

P(X ≥ r) = fx (r,n,p) + fx (r+1,n,p) + ... + fx (n,n,p) ………………….…………….. (4.5)

P(X ≥ r) = $\sum_{x=r} fx\ (r, n, p)$ ………………..…………………………………….……. (4.6)

Contoh soal 1. Diketahui suatu percobaan statistic yang diulang sebanyak n=4 dengan P(S) =2/3 dan P(G) =1/3 tetap pada setiap percobaan. Misalkan X banyaknya sukses. Tentukan P(X=0), P(X=1), P(X=2), P(X=3) dan P(X=4).

Jawab 1

P(X=x) = $\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \binom{4}{x}(2/3)^x(1/3)^{4-x}$; x= 0,1,2,3,4

Maka diperoleh

- P(X=0) = $\binom{4}{0}(2/3)^0(1/3)^4$ = 1/81
- P(X=1) = $\binom{4}{1}(2/3)^1(1/3)^3$ = 8/81
- P(X=2) = $\binom{4}{2}(2/3)^2(1/3)^2$ = 24/81

- P(X=3) = $\binom{4}{3}(2/3)^3(1/3)^1$ =32/81
- P(X=4) = $\binom{4}{4}(2/3)^4(1/3)^0$ = 16/81
- Perhatikan bahwa $\sum_x P(x)$= 1

Contoh Soal 2. Setiap tahun dalam 5 tahun dilakukan pemilihan acak untuk menetapkan alokasi dana kepada 1 dari 4 kegiatan (A,B,C,D). Setiap kali dilakukan pemilihan, masing-masing kegiatan memiliki peluang yang sama untuk terpilih (mendapatkan dana). Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 3x? Berapa persen peluang kegiatan A mendapatkan dana 5x, 4x, 3x, 2x, 1x, 0x?

Jawab 2

Setiap kali pemilihan diperoleh probabilitas (As) = probabilitas kegiatan A terpilih P(As)= ¼= 0.25 = p dan Probabilitas (Ag) = probabilitas kegiatan A tak terpilih P(Ag) = 1 –p= 0.75 = q

Dalam 5 kali pemilihan, maka peluang terpilih (sukses) 3 kali adalah

$$f_X(x;n,p) = f_X(3;5,0.25) = \binom{5}{3} 0.25^3\ 0.75^2 = 0.088$$

- Dalam 5 kali pemilihan (n = 5)

koefisien binomial

jumlah sukses	jumlah cara	peluang terjadi
0	1	0.237
1	5	0.396
2	10	0.264
3	10	0.088
4	5	0.015
5	1	0.001
	∑ =	**1.000**

Contoh Soal 3. Pengalaman menunjukkan bahwa pada setiap pencetakan kertas koran, dari 1500 lembar yang dicetak telah terjadi kerusakan sebanyak 150 lembar. Bila dicetak sebanyak 10 lembar, tentukanlah probabilitas dari variabel acak X, bila X menyatakan banyaknya kertas yang rusak pada pencetakan.

Jawab 3.

Diketahui n = 10 ; X = 0,1,2,3,……,10 (banyaknya kertas yang rusak pada penstensilan)

P(S) = P (Kertas rusak) = 150/1500 = 1/10 = p

P(G) = P (Kertas tidak rusak) = 1-1/10 = 9/10 =q

Sehingga untuk n=10 ; p = 0,1 dan q = 0,9

P (X=x) = $\binom{10}{x}(0,1)^{x}(0,9)^{10-x}$; x= 0,1,2,3,…., 10

Maka untuk perhitungan tersebut gunakan tabel distribusi binomial

Contoh soal 4. Bila sekeping uang logam dilemparkan sebanyak 6 kali, Hitunglah probabilitas memperoleh 5 muka dan probabilitas paling sedikit 5 muka.

Jawab 4

Diketahui n= 6 ; p = 0,5 dan q = 0,5

P (X=x) = $\binom{6}{x}(0,5)^{x}(0,5)^{6-x}$; x= 0,1,2,3,3,4,5,6

P (5muka) = $\binom{6}{5}(0,5)^{5}(0,5)^{1}$; x=0,09375

P(X $\geq$ 5) = 0,109 (lihat tabel distribusi binomial kumularif untuk n = 6, p =0,5 dan r =5)

Contoh soal 5. Bila variabel acak X mempunyai distribusi binomial dengan n = 15 ; p= 0,3 Tentukan :

a. P(X = 10)

b. P(X $\leq$ 7)

c. P(X $\geq$ 7)

d. Nilai rata-rata

e. Variansi

f. Simpangan baku

C. Distribusi Poisson

Pada perumusan tentang distribusi binomial yaitu $\mathrm{P(X = x)} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ dengan x=0,1,2,….n. Bila *n kecil* dan *p besar*, maka perhitungan probabilitas nilai variabel acak X tidak mengalami masalah, karena nilai P(X=x) dapat dihitung secara langsung atau menggunakan table untuk bilangan n, nilai p dan nilai x tertentu. Namun, Jika *n besar* dan *p kecil sekali* maka probabilitas nilai X tidak bisa atau sulit dihitung baik scr langsung ataupun dgn menggunakan table, sebab table hanya ada nilai maks n=25 dan minimum p = 0,01. Sehingga untuk melakukan perhitungan probabilitas distribusi binomial dengan kasus n besar dan p sangat kecil dilakukan dengan memakai pendekatan distribusi Poisson. Jika n besar dan p kecil sedemikian rupa sehingga np → μ atau μ = np tetap, maka distribusi binomial dapat didekati dengan memakai distrribusi poisson yg dirumuskan sebagai berikut.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{X!} \quad \text{……………………………………………………….. (4.7)}$$

Dimana X = 0,1,2,….n ; μ disebut parameter ; e = 2,71828.

Rata-rata $\mu = np$ ………………..…………………………….……………... (4.8)

Variansi $\sigma^2 = np$ ……………………………………………….……………... (4.9)

Simpangan baku $\sigma = \sqrt{np}$ ……………………………………………………. (4.10)

Contoh soal 6. Bila variabel acak X mempunyai distribusi binomial dengan n = 100; p = 0,005 Tentukan P(X = 15)

Jawab 6

$f(x) = P(X = x) = \binom{100}{x}(0{,}005)^x(0{,}995)^{100-x}$ dimana x = 0,1,2,3,……………,100

Maka $f(15) = P(X = 15) = \binom{100}{15}(0{,}005)^{15}(0{,}995)^{85}$

Jika menggunakan rumusan binomial sebagaimana diatas maka akan sulit dihitung sehingga perlu pendekatan poisson sebagai berikut.

μ = np

= 100. 0,005

μ = 0,5

$P(X=x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{X!} = \frac{e^{-0,5}(0,5)^{15}}{X!}$; x = 0,1,2,3,…..,100

$P(X=15) = \frac{e^{-0,5}(0,5)^{15}}{15!} = 0,0000$

Hasilnya lihat dengan menggunakan table sehingga diperoleh nilai yang paling sesuai

Contoh Soal 7. Bila 5 uang logam dilempar sebanyak 128 kali, hitunglah probabilitas munculnya 5 angka sebanyak 0,1,2,3,4, dan 5 dari seluruh pelemparan.

Jawab 7.

n = 128 ;

Probabiltas munculnya satu angka adalah ½ dan probabiltas munculnya lima angka adalah ½. ½. ½. ½ .½ = 1/32 =p

Karena munculnya angka saling bebas (independen) atau tidak saling mempengaruhi.

Maka q = 1 – p = 1 – 1/32 = 31/32 dan dengan menggunakan distribusi binomial diperoleh

$P(X = x) = \binom{128}{x}\left(\frac{1}{32}\right)^{x}\left(\frac{31}{32}\right)^{128-x}$; x = 0,1,2,….128

Dengan distribusi Poisson μ = np = 128 . $\left(\frac{1}{32}\right)$ = 4

$P(X=x) = \frac{e^{-4}(4)^{x}}{X!}$

X	$\boldsymbol{P(X = x) = \binom{128}{x}\left(\frac{1}{32}\right)^{x}\left(\frac{31}{32}\right)^{128-x}}$	P(X=x) = $\boldsymbol{\frac{e^{-4}(4)^{x}}{X!}}$
0	0,0172	0,0183
1	0,0711	0,0732
2	0,1457	0,1464
3	0,1974	0,1952
4	0,1990	0,1952
5	0,1592	0,1562