BAB 3. HARAPAN MATEMATIS

A. Nilai Harapan Matematis

Bila variabel acak X yang mempunyai nilai x1, x2,x3,……, xn serta memiliki fungsi probabilitas f(x) = P(X=x), maka harapan atau ekspektasi matematis dari X yang ditulis E(X) didefinikan sebagai berikut

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + x_3 P(X = x_3) + \ldots + x_n P(X = x_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1)$$

Untuk nilai X diskrit ataupun kontinyu maka rumusan untuk nilai ekspektasi matematis adalah

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{x} x\, f(x) & ;\ \text{jika X diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx & ;\ \text{jika X kontinu} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

E(X) adalah Ekspektasi atau harapan matematik atau nilai harapan dari peubah acak X dan juga banyak yang menyebutnya rata-rata peubah acak X atau rata-rata distribusi probabilitas X atau sering juga disebut sebagai mean dari X dilambangkan dengan **µx.** Mean atau Ekspektasi dari X memberikan satu nilai tunggal yang bertindak sebagai wakil atau rata-rata dari nilai-nilai X, sehingga sering diebut sebagai "ukuran tendensi sentral". Ukuran-ukuran yang lain adalah Median dan Modus. Modus dari suatu variabel acak diskrit merupaka nilai yang paling sering muncul atau dengan kata lain memiliki probabilitas terbesar untuk terjadi. Median merupakan suatu nilai x dimana $P(X < x) \leq \frac{1}{2}$ dan $P(X>x) \leq \frac{1}{2}$ atau biasa disebut titik tengah dari interval. Selanjutnya harapan matematis memiliki sifat-sifat yaitu :

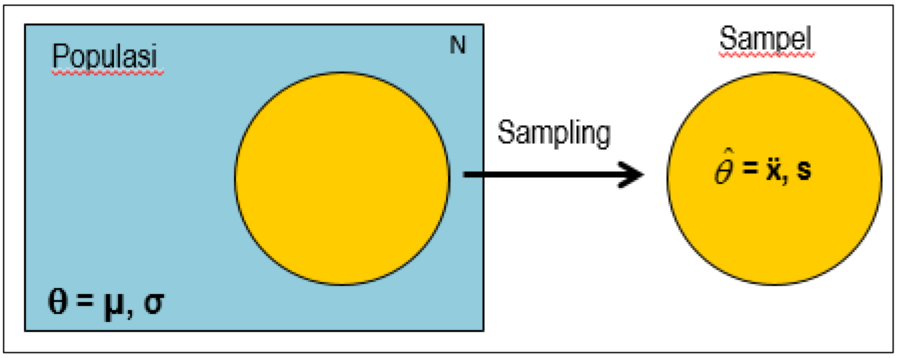
1. $E(c) = c$
2. $E(bX) = bE(X)$
3. $E(a + bX) = a + bE(X)$ dimana *a,b,c* adalah suatu konstanta

Sedangkan teorema ekspektasi matematis diantaranya adalah

- Teorema 1, Jika c adalah suatu konstanta sembarang maka E(cX) = cE(X)
- Teorema 2, Jika X dan Y adalah variabel acak sembarang maka E(X + Y) = E(X) + E(Y)
- Teorema 3, Jika X dan Y adalah variabel acak yg independen maka E(XY) = E(X) E(Y)

B. Kegunaan Nilai Harapan Matematis

Salah satu cabang ilmu statistika yaitu statistika inferensia, merupakan Statistika yang berkenaan dengan cara penarikan kesimpulan berdasar- kan data yang diperoleh dari sampel untuk menggambarkan karakteristik atau ciri suatu populasi. Penarikan kesimpulan biasanya dilakukan pada penelitian atau studi dengan memakai metode survei yang memakai data dari sampel. Namun demikian, hasil perhitungan yang diperoleh diperluas untuk menggambarkan atau menyimpukan karakteristik populasi. Sehingga antara sampel dan populasi ada keterkaitan yang sangat erat, sebagaimana ilustrasi berikut.



Gambar 3.1 Hubungan antara Populasi dan Sampel

Populasi menggambarkan sesuatu yang sifatnya ideal atau teoritis sedangkan sampel menggambarkan sesuatu yang sifatnya nyata atau empiris. Populasi dan sampel masing-masing mempunyai karakteristik atau ciri yang dapat diukur. Karakteristik yang diukur dari populasi disebut parameter misalnya mean, standar deviasi, proporsi dan lain sebagainya.

Kegunaan utama harapan matematis adalah untuk menentukan Mean (μ) dan variansi (σ^2) serta standar deviasi (σ) dari parameter populasi yang dirumuskan sebagai berikut.

1. Mean Populasi μ = E(X) .... (3.3)
2. Variansi Populasi

$$\sigma^2 = \mathrm{E}\,\{(\mathrm{X}-\mu)^2\} = \begin{cases} \sum(x-\mu^2)\ f(x); \text{jika X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\ f(x); \text{jika X Kontinyu} \end{cases} \quad \text{.............................. (3.4)}$$

Jika μ adalah konstanta maka variansi disederhakana menjadi $\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$

3. Standar Deviasi $\sigma = \sqrt{E\{(X-\mu)^2\}}$ .... (3.5)

C. Rumusan Parameter Sampel : Nilai Harapan Matematis

Rumusan parameter sampel yang akan dibahas meliputi nilai harapan matematis, variansi dan standar deviasi. Rumusan variansi perubah acak X diskret atau dilambangkan dengan sigma kuadrat yaitu

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \qquad \text{(3.6)}$$

Bukti

$$\sigma^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f(x) = \sum_x (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x)$$

$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) \qquad \text{(3.7)}$$

Karena

$$\mu = \sum_x x f(x) \quad \text{dan} \quad \sum_x f(x) = 1 \qquad \text{(3.8)}$$

Maka diperoleh

$$\sigma^2 = \sum_x x^2 f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \qquad \text{(3.9)}$$

Contoh soal 1

Pada pelemparan tiga uang logam. Tentukan harapan matematis munculnya “muka” pada tiap pelemparan, jika X menyatakan banyaknya muncul muka.

Jawab

Diketahui :

S = {(m,m,m), (m,m,b), (m,b,m), (b,m,m), (b,b,m), (b,m,b), (m,b,b), (b,b,b) }

X = {0,1,2,3} ;

Maka P(X=x)

P(x = 0) = 1/8 ;

P(x = 1) = 3/8 ;

P(x = 2) = 3/8 ;

P(x = 3) = 1/8 ;

Sehingga :

$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, f(x) \quad = \sum_{x=0}^{3} x\, P(X = x)$

E(X) = (0) P(x=0) + (1) P(x=1) + (2) P(x=2) + (3) P(x=3)

E(X) = (0)(1/8) + (1)(3/8) + (2)(3/8) + (3)(1/8)

E(X) = (0+3+6+3)/8 = 12/8 = 1,5

Contoh soal 2

Pada pelemparan dua dadu. Tentukan harapan matematis munculnya jumlah muka dua dadu, jika X menyatakan jumlah muka dua dadu.

Jawab

X=x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x\, f(x) \quad = \sum_{x=2}^{12} x\, P(X = x)$

E(X) = (2) P(x=2) + (3) P(x=3) + (4) P(x=4) +…..+ (12) P(x=12)

E(X) = 252/36 = 7

Contoh soal 3

Misalkan suatu permainan dimainkan dengan menggunakan sebuah dadu yang diasumsikan ideal. Dalam permainan ini seorang pemain akan menang $20 jika muncul angka 2, $40 jika muncul angka 4, kalah $30 jika muncul angka 6 ; sementara pemain tersebut tidak akan menang atau kalah jika angka lain muncul. Tentukan ekspektasi jumlah uang yang akan dimenangkan!

Jawab

- Misalkan jika X adalah variabel acak yang menyatakan jumlah uang yang dimenangkan pada suatu lemparan
- Jumlah yang mungkin dimenangkan jika angka yang muncul berturut-turut 1,2,3,4,5,6 adalah x1,x2,x3,x4,x5 dan x6 ➔ munculnya muka dadu 1 adalah x1, muka dadu 2 adalah x2 dan seterusnya. Sementara probabilitasnya adalah f(x1) , f(x2), …… f(x6). Maka fungsi probabilitas untuk X adalah

Xi	**0**	**+20**	**0**	**+40**	**0**	**-30**
f(xi)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- $E(X) = x_1. f(x_1) + x_2. f(x_2) + x_3. f(x_3) + x_4. f(x_4) + x_5. f(x_5) + x_6. f(x_6)$
- E(X) = 0. (1/6) + 20. (1/6) + 0. (1/6) + 40.(1/6) + 0. (1/6) + (-30) (1/6) = 5
- Maka pemain tersebut dapat diekspektasikan akan memenangkan $5 Oleh karena itu, dalam suatu permainan yang adil, pemain ini diekpektasikan harus membayar $5 agar dapat bermain dalam permainan tersebut.

Contoh Soal 4

Jika seseorang membeli sebuah lotere, maka ia dapat memenangkan hadiah pertama sebesar Rp. 50.000.000,- atau hadiah kedua Rp. 20.000.000,- masing-masing dengan probabilitas 0,001 dan 0,003. Berapa seharusnya harga yang fair untuk lotere tersebut?

Jawab

Misalkan Variabel X menyatakan nilai kemenangan orang tersebut, maka nilai X1= 50.000.000 dengan Probabilitas P(X=x1) =0,001 dan X2=20.000.000 dengan Probabilitas P(X=x2) = 0,003

Sehingga nilai Harapan Matematis X adalah

$E(X) = X_1 P(X=x_1) + X_2 P(X=x_2)$

= (50.000.000) (0,001) + (20.000.000) (0,003)

= 110.000

Jadi harga yang fair dari lotere tersebut adalah Rp. 110.000,-

Contoh Soal 5

Pada pengiriman 6 pesawat TV berisi 2 rusak. Sebuah hotel membeli 3 pesawat TV secara acak dari kiriman tersebut. Bila X menyatakan banyaknya TV yang rusak yang dibeli hotel. Tentukan Nilai Harapan X dan Simpangan baku X! (Catatan : Sebelum mulai menghitung, cari dulu distribusi probabilitas X)

Jawab

Misalkan

TV baik = 4 ➔ { b1, b2,b3,b4} sedangkan TV rusak ; = 2 ➔ {r1, r2}

X menyatakan jumlah TV rusak yang dibeli hotel

Dengan memanfaatkan rumus kombinasi maka diperoleh data TV yang dibeli dengan kriteriia

- 3 baik dan 0 rusak maka 4C3 . 2C0 = $\binom{4}{3}.\binom{2}{0}$ = 4.1
- 2 baik dan 1 rusak maka 4C2 . 2C1 = $\binom{4}{2}.\binom{2}{1}$ = 6.2
- 1 baik dan 2 rusak maka 4C1 . 2C2 = $\binom{4}{1}.\binom{2}{2}$ = 4.1
- Seluruh Kombinasi dari opsi yang ada adalah 6C3 = $\binom{6}{3}$ = 20

Bila X menyatakan jumlah TV **rusak** yang dibeli hotel, maka nilai-nilai X adalah = x1, x2, x3 bernilai 0,1,dan 2 masing-masing dengan probabilitas

P(X = 0) = $\frac{4.1}{20}$ = 1/5

P(X = 1) = $\frac{6.2}{20}$ = 3/5

P(X = 2) = $\frac{4.1}{20}$ =1/5

Sehingga Nilai harapan $E(X)$ $= 0(\frac{1}{5}) + 1(\frac{3}{5}) + 2\left(\frac{1}{5}\right) = 1$

Maka $E(X^2) = 0^2(\frac{1}{5}) + 1^2(\frac{3}{5}) + 2^2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{7}{5}$

Variasi $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)$ $= \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Simpangan baku σ $= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63$

Contoh soal 6

Fungsi kepadatan dari suatu variabel acak X ditentukan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & selain\ di\ atas \end{cases}$$

Maka nilai Ekspektasi dari X adalah

Jawab

Ingat kembali rumus integral $\int a\, x^2\, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$

$$\int (ax+b)^n \equiv \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

Sehingga diperoleh :

$$E(X) \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Soal tambahan

Dalam suatu bisnis tertentu, seorang dapat memperoleh keuntungan sebesar Rp. 3.000.000,- dengan probabilitas 0,6 atau menderita kerugian sebesar Rp. 1.000.000,- dengan probabilitas 0,4. Tentukan nilai harapannya