

## BAB 2. VARIABEL ACAK dan DISTRIBUSI PROBABILITAS

### A. Peubah Acak dan Ruang Sampel

Peubah acak atau biasa disebut sebagai variabel acak merupakan suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel. Misalnya untuk setiap titik dari ruang sampel dipasang sebuah bilangan sehingga terdefinisikan sebuah fungsi pada ruang sampel tersebut. Fungsi ini disebut sebagai peubah/variabel acak (variabel stokastik) atau lebih tepatnya fungsi acak (fungsi stokastik). Peubah acak biasanya dinyatakan dalam huruf capital seperti  $X$  atau  $Y$ . Nilai setiap peubah acak dinyatakan dalam huruf kecil padanannya misal  $x$  atau  $y$ .

Contoh sederhana dari variabel/peubah acak yaitu misalkan terdapat dua bola diambil satu demi satu tanpa pengembalian dari suatu kantong berisi empat bola merah ( $M$ ) dan empat bola hitam ( $H$ ). Bila  $Y$  menyatakan jumlah bola merah yang diambil maka berapa nilai  $y$  yang mungkin dari peubah acak  $Y$ ? Perhatikan tabel berikut.

Tabel 2.1 Ruang sampel beserta nilai peubah acak  $y$

<b>Ruang_sampel</b>	<b>y</b>
MM	2
MH	1
HM	1
HH	0

Contoh lain dari penentuan peubah acak yaitu jika terdapat suatu kotak yang berisi 4 uang logam ratusan ( $R$ ) dan 2 logam lima puluhan ( $L$ ). Tiga uang diambil secara acak. Maka diperoleh ruang sampel yang mungkin adalah sebagai berikut  $S = \{RRR, RRL, RLR, RLL, LRR, LRL, LLR\}$ . Apabila dari percobaan pengambilan 3 uang logam tersebut, ditetapkan peubah acak  $X$  yang menyatakan jumlah uang logam ratusan yg muncul, maka nilai  $x$  yang diperoleh adalah sebagaimana tabel 2.2 di bawah ini.

Tabel 2.2 Ruang sampel dengan nilai peubah acak x

Ruang_sampel	x
RRR	3
RRL	2
RLR	2
LRR	2
RLL	1
LRL	1
LLR	1

Peubah acak terbagai menjadi beberapa jenis diantaranya adalah sebagaimana berikut. Peubah acak diskrit merupakan jenis peubah acak yang fungsi distribusinya diskrit atau peubah acak yang memiliki himpunan kemungkinan hasilnya terhitung. Sehingga ruang sampel diskrit diartikan sebagai ruang sampel yang mengandung titik yang berhingga banyaknya atau sederetan anggota yang jumlahnya sebanyak bilangan bulat. Sementara itu peubah acak kontinu didefinisikan sebagai peubah acak yang fungsi distribusinya kontinu atau peubah acak yg dapat memperoleh semua nilai pada skala kontinu. Dengan demikian maka ruang sampel kontinu adalah ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan jumlahnya sebanyak titik pada sepotong garis. Sehingga 2 contoh sebelumnya yaitu pengambilan bola merah dan pengambilan tiga uang logam merupakan peubah diskrit.

## B. Distribusi Probabilitas

Pada contoh sebelumnya dimana terdapat ruang sampel  $S=\{RRR, RRL, RLR, RLL, LRR, LRL, LLR\}$  yang merupakan kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi pada pengambilan 3 uang logam, dapat ditentukan probabilitas dari nilai-nilai variabel acak X, sebab titik sampel – titik sampel S mempunyai nilai probabilitas. Pada ruang sampel tersebut jika variabel acak X yang menyatakan jumlah uang logam ratusan (R) yg muncul, maka nilai dari X adalah  $X=1, X=2, X=3$ . Nilai  $X=1$  berkaitan dengan titik sampel (RLL) atau (LRL) atau (LLR) dengan probabilitas  $P(X=1) = \{ P(RLL) + P(LRL) + P(LLR) \} = 1/7+1/7+1/7 = 3/7$ . Sementara itu untuk nilai  $X=2$  berkaitan dengan titik sampel (RRL) atau (RLR) atau (LRR) dengan probabilitas  $P(X=2) = \{ P(RRL) + P(RLR) + P(LRR) \} = 1/7+1/7+1/7 = 3/7$ . Selanjutnya nilai  $X=3$  berkaitan dengan titik sampel (RRR) dengan probabilitas  $P(X=3)=P(RRR) = 1/7$ . Distribusi probabilitas X atau Pasangan nilai-nilai variabel acak X dengan probabilitas dari nilai-nilai X, yaitu  $P(X=x)$  dapat dinyatakan dalam tabel 2.3 berikut.

Tabel 2.3 Tabel distribusi probabilitas  $P(X=x)$

<b>X=x</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>P(X=x)</b>	3/7	3/7	1/7

Pada distribusi probabilitas diskrit misalkan X adalah variabel acak diskrit, dan misalkan kemungkinan nilai-nilainya adalah  $x_1, x_2, x_3, \dots$  disusun dalam suatu urutan tertentu. Misalkan juga nilai-nilai tsb memiliki probabilitas yang dinyatakan oleh  $P(X=x_k) = f(x_k)$  dimana  $k=1,2,3$ , dan seterusnya. Bentuk persamaan  $P(X=x) = f(x)$  disebut sebagai **fungsi probabilitas** atau dikenal juga sebagai **distribusi probabilitas**. Secara umum bahwa rumus  $f(x)$  adalah **fungsi probabilitas jika  $f(x) \geq 0$  dan  $\sum_x f(x) = 1$** .

Pada fungsi distribusi untuk variabel acak jika X adalah variabel acak dan  $P(X=x)$  adalah distribusi probabilitas dari X, maka fungsi  $f(x) = P(X=x)$  disebut sebagai **fungsi probabilitas X** atau fungsi frekuensi X atau fungsi padat peluang X. Sifat-sifat fungsi  $f(x)$  untuk variabel acak X diskrit adalah  $P(X=x) = f(x)$ ,  $f(x) \geq 0$  serta  $\sum_x f(x) = 1$ . Sedangkan sifat-sifat fungsi  $f(x)$  untuk variabel acak X kontinyu adalah  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ ,  $f(x) \geq 0$  serta  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ . Jika variabel acak X mempunyai distribusi probabilitas  $f(x)$  maka fungsi distribusi kumulatif atau disingkat fungsi distribusi dari X yaitu  $F(x)$  dirumuskan dengan  $F(x) = P(X \leq x)$  dimana  $\sum_{X \leq x} f(x)$  bila X diskrit dan  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  bila X kontinyu. Sifat-sifat fungsi distribusi kumulatif  $F(x)$  adalah  $0 \leq F(x) \leq 1$ , jika  $x_1 < x_2$  maka  $F(x_1) < F(x_2)$  dikatakan fungsi  $F(x)$  monoton tidak turun (*nondecreasing*),  $F(x)$  diskontinyu dari kiri tetapi kontinyu dari kanan [artinya  $\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x)$  untuk semua x] serta sifat keempat  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ .

Contoh pada pelemparan tiga uang logam, bila X menyatakan banyaknya muncul gambar (g) tentukan

- Nilai-nilai variabel acak X
- Distribusi probabilitas X  $\rightarrow P(X=x)$
- Gambarlah distribusi probabilitas X
- Nilai-nilai dari fungsi distribusi probabilitas / fungsi probabilitas  $\rightarrow f(x)$
- Nilai-nilai dari fungsi distribusi kumulatif / fungsi distribusi  $\rightarrow F(x)$

Jawaban atas contoh soal tersebut di atas yaitu Ruang sampel  $S = \{(ggg), (gga), (gag), (agg), (aag), (aga), (gaa), (aaa)\}$

a. Karena X menyatakan banyaknya muncul gambar pada S maka nilai-nilai dari X adalah  $X=0, X=1, X=2, X=3$

b. Probabilitas

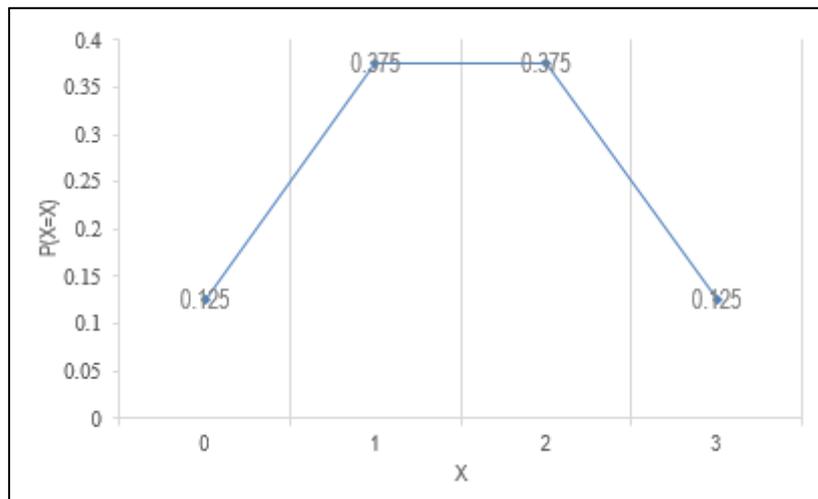
$$P(X=0) = P(\text{aaa}) = 1/8$$

$$P(X=1) = P(\text{aag}) + P(\text{aga}) + P(\text{gaa}) = 1/8+1/8+1/8 = 3/8$$

$$P(X=2) = P(\text{gga}) + P(\text{gag}) + P(\text{agg}) = 1/8+1/8+1/8 = 3/8$$

$$P(X=3) = P(\text{ggg}) = 1/8$$

c. Gambar distribusi probabilitas X



Gambar 2.1 Gambar distribusi probabilitas X

d.  $f(x) = P(X=x)$ , maka nilai-nilai  $f(x)$  adalah

$$f(0) = P(X=0) = 1/8$$

$$f(1) = P(X=1) = 3/8$$

$$f(2) = P(X=2) = 3/8$$

$$f(3) = P(X=3) = 1/8$$

e. Nilai-nilai dari distribusi kumulatif  $F(x)$  adalah

$$F(0) = P(X \leq 0) = P(X=0) = f(0) = 1/8$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 8/8$$