

ALJABAR BOOLEAN

8.1 Definisi

Aljabar Boolean adalah sistem aljabar yang berisi set S dengan dua operasi penjumlahan yang dilambangkan dengan tanda tambah (+) dan perkalian yang dilambangkan dengan tanda titik (.). Pada prinsipnya, materi Aljabar Boolean mirip dengan materi tentang Proposisi. Perbedaan antara Proposisi dengan Aljabar Boolean adalah:

- Pada pernyataan Proposisi, penulisan nilai sebuah pernyataan dapat ditulis dengan "B" untuk *Benar* dan "S" untuk *Salah*. Sedang pada pernyataan Aljabar Boolean, penulisan nilai kebenaran ditulis dengan "1" untuk nilai *Benar* dan "0" untuk *Salah*. Sebagai catatan tambahan, penggunaan "1" untuk *Benar* dan "0" untuk *Salah* ini dikenal dengan istilah *Logic High* atau menyatakan nilai logika dengan "Logika Tinggi". Sebaliknya, dengan menggunakan *Logic Low*, nilai Benar akan menggunakan "0" dan Salah menggunakan "1".
- Operasi-operasi menggunakan logika yang sama, namun notasinya berbeda. Hal ini dipaparkan lebih jelas pada subbab-subbab berikut ini.

8.2 Operator Logika pada Aljabar Boolean

Pada aljabar Boolean juga dikenal operasi-operasi logika seperti pada materi Proposisi. Di sini juga dibedakan antara operasi dasar dengan operasi turunan. Kesemuanya menggunakan notasi masing-masing untuk operator logikanya.

8.2.1 Operator Dasar

Ada tiga operator dasar yang terdiri dua buah operator binary, yaitu operator AND (untuk logika DAN) dan operator OR (untuk logika ATAU), dan sebuah operator unary, yaitu operator NOT (untuk logika NEGASI). Ketiganya dapat dijelaskan sebagai berikut:

1. Operator AND.

Notasi Aljabar Booleannya adalah sebuah titik (\cdot). Sebagai perbandingan, pada Proposisi notasinya adalah " \wedge ".

Contoh:

"p dan q" ditulis $p \cdot q$ atau bisa juga ditulis pq (tanpa titik)

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \cdot q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Perhatikan bahwa untuk memudahkan penulisan (bandingkan dengan konversi desimal ke biner), nilai *Salah* didahulukan.

2. Operator OR.

Notasi Aljabar Booleannya adalah sebuah tanda tambah (+). Perbandingannya, pada Proposisi notasinya adalah " \vee ".

Contoh:

"p atau q", ditulis $p + q$

Tabel kebenarannya:

p	q	$p + q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Operator NOT.

Notasi Aljabar Boolennya adalah dengan memberikan tanda bar diatas variabel atau dengan tanda aksen (petik tunggal penutup) setelah variabel. Perbandingannya, pada Proposisi notasinya adalah "~".

Contoh:

"Not p" atau "negasi p", ditulis \bar{p} atau bisa ditulis p' .

Tabel kebenarannya:

p	\bar{p}
0	1
1	0

Contoh Soal:

Untuk setiap kalimat di bawah ini, buatlah notasi matematikanya dengan menggunakan Aljabar Boolean dan buat juga tabel kebenarannya!

1. Hari hujan dan udara dingin.
2. Hari hujan atau udara dingin.
3. Hari hujan dan udara tidak dingin.
4. Hari tidak hujan atau udara dingin.
5. Hari tidak hujan dan udara tidak dingin.
6. Hari tidak hujan atau udara tidak dingin.

Penyelesaian:

1. Hari hujan dan udara dingin

p = "hari hujan"

q = "udara dingin"

$p.q$ = "hari hujan dan udara dingin"

Notasinya: $p.q$

Tabel Kebenarannya:

p	q	$p \cdot q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Hari hujan atau udara dingin

p = "hari hujan"

q = "udara dingin"

$p + q$ = "hari hujan atau udara dingin"

Notasinya: $p + q$

Tabel kebenarannya:

p	q	$p + q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Hari hujan dan udara tidak dingin

p = "hari hujan"

\bar{q} = "udara tidak dingin"

$p \cdot \bar{q}$ = "hari hujan dan udara tidak dingin"

Notasinya: $p \cdot \bar{q}$

Tabel kebenarannya:

p	q	\bar{q}	$p \cdot \bar{q}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

4. Hari tidak hujan atau udara dingin

\bar{p} = "hari tidak hujan"

q = "udara dingin"

$\bar{p} + q$ = "hari tidak hujan atau udara dingin"

Notasinya: $\bar{p} + q$

Tabel kebenarannya:

p	q	\bar{p}	$\bar{p} + q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

5. Tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin.

\bar{p} = hari tidak hujan

\bar{q} = udara tidak dingin

$\bar{p} \cdot \bar{q}$ = tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin

Notasinya: $\bar{p} \cdot \bar{q}$

Tabel kebenarannya:

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} \cdot \bar{q}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

6. Tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin

\bar{p} = "hari tidak hujan"

\bar{q} = "udara tidak dingin"

$\bar{p} + \bar{q}$ = "tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin"

Notasinya: $\bar{p} + \bar{q}$

Tabel kebenarannya:

p	q	\bar{p}	\bar{q}	$\bar{p} + \bar{q}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

8.2.2 Operator Turunan

Seperti pada proposisi, logika matematika pada materi aljabar Boolean juga memiliki operasi-operasi yang diturunkan dari operasi-operasi dasar. Contoh yang paling sederhana

adalah operasi $p\bar{q} + \bar{p}q$. Operasi ini dikenal sebagai operasi *Exclusive-OR* atau Eksklusif-ATAU dengan operator XOR.

Operasi-operasi turunan lainnya antara lain operasi Not-AND (disingkat NAND), operasi Not-OR (disingkat NOR), dan sebagainya. Operasi-operasi ini sebenarnya tidak menggunakan operator khusus (kecuali operator XOR) karena sebenarnya dapat diturunkan dengan menggunakan operator-operator dasar. Operator logika XOR sendiri menggunakan notasi \oplus .

1. Operasi XOR.

Notasi Aljabar Booleannya adalah " \oplus ". Perbandingannya, pada Proposisi adalah "I".

Contoh:

"p XOR q", ditulis $p \oplus q$ atau $p\bar{q} + \bar{p}q$ atau $\bar{p}q + p\bar{q}$

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2. Operasi NAND (Not-AND)

Contohnya adalah kalimat "Tidak benar bahwa hari hujan dan udara dingin".

Kalimat ini dapat dinotasikan sebagai $\overline{p \cdot q}$ atau $(p \cdot q)'$.

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \cdot q$	$\overline{p \cdot q}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

3. Operasi NOR (Not-OR)

Contohnya adalah kalimat "Tidak benar bahwa hari hujan atau udara dingin".

Kalimat ini dapat dinotasikan sebagai $\overline{p + q}$ atau $(p + q)'$.

Tabel kebenarannya:

p	q	$p + q$	$\overline{p + q}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Soal Latihan dan Jawaban

Buatlah Kalimat dan buktikan dengan menggunakan Tabel Kebenarannya!

1. $p \cdot \bar{q}$
2. $\bar{p} + q$
3. $\bar{p} \cdot \bar{q}$
4. $\overline{p + q}$

5. $\overline{p \cdot q}$

6. $p \oplus q$

Jawaban

1. $p \cdot \overline{q}$ = Awan mendung dan udara tidak dingin

Tabel Kebenarannya:

p	q	\overline{q}	$p \cdot \overline{q}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

2. $\overline{p} + q$ = Yanto tidak cerdas atau Nilai ujian Bagus

Tabel kebenarannya:

p	q	\overline{p}	$\overline{p} + q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

3. $\overline{p} \cdot \overline{q}$ = Susi tidak kaya dan susi tidak cantik

Tabel kebenarannya:

p	q	\overline{p}	\overline{q}	$\overline{p} \cdot \overline{q}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0

1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

4. $\overline{p+q}$ = Tidak benar bahwa saya tidur atau saya belajar

Tabel kebenarannya:

p	q	$p+q$	$\overline{p+q}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

6. $\overline{p \cdot q}$ = Tidak benar bahwa saya makan dan minum

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \cdot q$	$\overline{p \cdot q}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

7. $p \oplus q$ = Saya lahir di Jakarta atau saya lahir di Bandung

Tabel kebenarannya:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0

0	1	1
1	0	1