Isi

TAUTOLOGI, KONTRADIKSI, DAN CONTINGENT

5.1 TAUTOLOGI

Sebuah proposisi disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus, proposisi autologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat B (benar).

atau

Sebuah proposisi dikatakan bernilai Tautologi, jika proposisi tersebut bernilai benar terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Contoh Tautologi:

1. Buktikan notasi berikut $p \vee (\sim p)$ adalah tautologi!

   Tabel Kebenaran

p	**~ p**	**p ∨(~p)**
B	S	B
S	B	B

2. Buktikan bahwa proposisi $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi. Buatlah tabel kebenarannya!

   Jawab:

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee \sim (p \wedge q)$
B	B	B	S	B
B	S	S	B	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

Karena nilai kebenaran dari $p \vee \sim (p \wedge q)$ adalah B (benar) untuk semua nilai p dan q maka proposisi adalah sebuah Tautologi.

Latihan:

Buktikan bahwa notasi berikut adalah
sebuah tautologi!

a) $\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p)\vee(\sim q)$
b) $p \wedge (p \vee q) \vee (\sim p \wedge (\sim p \vee r))$

5.2 KONTRADIKSI

Sebuah proposisi disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus, proposisi tautologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat S (salah).

Atau

Sebuah proposisi dikatakan bernilai Kontradiksi, jika proposisi tersebut bernilai salah terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Contoh Kontradiksi:

1. Buktikan bahwa notasi berikut adalah kontradiksi $p \wedge(\sim p)$

   Tabel Kebenaran:

p	**~ p**	**$p \wedge(\sim p)$**
B	S	S
S	B	S

2. Buktikan bahwa proposisi $(p\wedge q) \wedge \sim (p\vee q)$ adalah sebuah Kontradiksi.

Jawab

Tabel kebenaran:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim (p\vee q)$	$(p\wedge q) \wedge \sim (p\vee q)$
B	B	B	B	S	S
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	S	S
S	S	S	S	B	S

Karena nilai kebenaran dari $(p\wedge q) \wedge \sim (p\vee q)$ adalah S (salah) untuk semua niali p dan q maka proposisi adalak sebuah kontradiksi.

Latihan:

1. Buktikan bahwa notasi berikut adalah sebuah kontradiksi!

$\sim(\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q))$

2. Buktikan bahwa notasi dibawah ini adalah tautologi atau kontadiksi!

   a) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

   b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

5.3 IMPLIKASI TAUTOLOGI

Sebuah proposisi p dikatakan berakibat propisisi q, jika implikasi ”$p \rightarrow q$” bernilai tautologi, dan ditulis ”$p \leftrightarrow q$”.

Contoh 1:

Dengan tabel kebenaran perlihatkan bahwa: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ adalah sebuah tautologi!

Tabel Kebenaran:

p	**q**	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	S	B
S	B	B	B	B	B
S	S	B	B	B	B

Contoh 2:

Tunjukan bahwa bahwa: $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ adalah sebuah tautologi!

Tabel Kebenaran:

p	**q**	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	S	B	B
S	S	S	B	B

5.4 CONTINGENSI

Jika pada semua nilai kebenaran menghasilkan nilai F/S dan T/B, maka disebut **formula campuran (*contingent*).**

Contoh:

Tunjukkan bahwa **[(p∧q) → r] → p** adalah contingent!

p	**q**	**r**	**p∧q**	**(p∧q) → r**	**[(p∧q) → r] →p**
B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	B
B	S	B	S	B	B
B	S	S	S	B	B
S	B	B	S	B	S
S	B	S	S	B	S
S	S	B	S	B	S
S	S	S	S	B	S

5.5 KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

Perhatikan pernyataan di bawah ini! ~ ∧ ∨ ⇒ ⇔

"Jika suatu bendera adalah bendera RI maka ada warna merah pada bendera tersebut"

Bentuk umum implikasi di atas adalah "**p → q**" dengan

p : Bendera RI

q : Bendera yang ada warna merahnya.

Dari implikasi diatas dapat dibentuk tiga implikasi lainnya yaitu :

1. **KONVERS**, yaitu **q → p**

   Sehingga implikasi diatas menjadi :

   " Jika suatu bendera ada warna merahnya, maka bendera tersebut adalah bendera RI".

2. **INVERS**, yaitu **~p → ~q**

   Sehingga implikasi diatas menjadi :

   " Jika suatu bendera bukan bendera RI, maka pada bendera tersebut tidak ada warna merahnya".

3. **KONTRAPOSISI**, yaitu **~q → ~p**

   Sehingga implikasi di atas menjadi :

   " Jika suatu bendera tidak ada warna merahnya, maka bendera tersebut bukan bendera RI".

Suatu hal yang penting dalam logika adalah kenyataan bahwa suatu implikasi selalu ekuivalen dengan kontraposisinya, akan tetapi tidak demikian halnya dengan invers dan konversnya.

Hal ini dapat dilihat dari tabel kebenaran berikut

p	q	~p	~q	p → q	q → p	~p → ~q	~q → ~p
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

5.5 INGKARAN KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

Contoh:

Tentukan ingkaran atau negasi konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut.

"Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih"

Penyelesaian

Misal p : Suatu bendera adalah bendera RI

q : Bendera tersebut berwarna merah dan putih

maka kalimatnya menjadi p → q atau jika menggunakan operator dan maka p → q ekuivalen(sebanding/≈) dengan ~p ∨ q. Sehingga

1. **Negasi dari implikasi**

   Implikasi : (p→q) ≈ ~p ∨ q

   Negasinya : ~(~p∨q) ≈ p∧~q

   Kalimatnya :"Suatu bendera adalah bendera RI dan bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih".

2. **Negasi dari konvers**

   Konvers : q→p ≈ ~q∨p

   Negasinya : ~(~q∨p) ≈ q∧~p

   Kalimatnya : "Ada/Terdapat bendera berwarna merah dan putih tetapi bendera tersebut bukan bendera RI".

3. **Negasi dari invers**

   Invers : ~p → ~q ≈ ~(~p)∨~q) ≈ p∧~q

   Negasinya : ~(p∧~q) ≈ ~p∨q

   Kalimatnya : "Suatu bendera bukan bendera RI atau bendera tersebut berwarna merah dan putih".

4. Negasi dari kontraposisi

Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p \approx \sim(\sim q) \vee \sim p \approx q \vee \sim p$

Negasinya : $\sim(q \vee \sim p) \approx \sim q \wedge p$

Kalimatnya : " Suatu bendera tidak berwarna merah dan putih dan bendera tersebut adalah bendera RI".

5.6 EKUIVALENSI LOGIKA

Pada tautologi, dan juga kontradiksi, dapat dipastikan bahwa jika dua buah ekspresi logika adalah tautologi, maka kedua buah ekspresi logika tersebut ekuivalen secara logis, demikian pula jika keduanya kontradiksi. Persoalannya ada pada *contingent*, karena memiliki semua nilai B dan S. Tetapi jika urutan B dan S atau sebaliknya pada tabel kebenaran tetap pada urutan yang sama maka tetap disebut ekuivalen secara logis. Perhatikan pernyataan berikut :

Contoh:

1. Dewi sangat cantik dan peramah.
2. Dewi peramah dan sangat cantik.

Kedua pernyataan di atas, tanpa dipikir panjang, akan dikatakan ekuivalen atau sama saja. Dalam bentuk ekspresi logika dapat ditulis sebagai berikut :

A = Dewi sangat cantik.

B = Dewi peramah.

Maka ekspresi logikanya :

1. $A \wedge B$
2. $B \wedge A$

Jika dikatakan kedua buah ekspresi logika tersebut ekuivalen secara logis maka dapat ditulis $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Ekuivalensi logis dari kedua ekspresi logika tersebut dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran sebagai berikut ini :

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$
B	B	B	B
B	S	S	S
S	B	S	S
S	S	S	S

Pembuktian dengan tabel kebenaran diatas, walaupun setiap ekspresi logika memiliki nilai B dan S, tetapi karena memiliki urutan yang sama, maka secara logis tetap dikatakan ekuivalen. Tetapi jika urutan B dan S tidak sama, maka tidak bisa dikatakan ekuivalen secara logis. Tabel kebenaran merupakan alat untuk membuktikan kebenaran ekuivalensi secara logis. Kesimpulan diambil berdasarkan hasil dari tabel kebenaran tersebut. Lihat pernyataan berikut ini :

Contoh:

1. Badu tidak pandai, atau dia tidak jujur.
2. Adalah tidak benar jika Badu pandai dan jujur.

Secara intuitif dapat ditebak bahwa kedua pernyataan di atas sebenarnya sama, tetapi bagaimana jika dibuktikan dengan menggunkan tabel kebenaran berdasarkan ekspresi logika.

Adapun langkah-langkahnya adalah :

1. Ubah dahulu argumen di atas ke dalam bentuk ekspresi/notasi logika.

   Misal : A = Badu pandai

   B = Badu jujur

   Maka kalimatnya menjadi

   1. $\sim A \vee \sim B$
   2. $\sim(A \wedge B)$

2. Buat tabel kebenarannya

A	**B**	**~A**	**~B**	**$A \wedge B$**	**$\sim A \vee \sim B$**	**$\sim(A \wedge B)$**
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B

Perhatikan ekspresi di atas! Meskipun kedua ekspresi logika di atas memiliki nilai kebenaran yang sama, ada nilai B dan S, keduanya baru dikatakan ekuivalen secara logis jika dihubungkan dengan perangkai ekuivalensi dan akhirnya menghasilkan tautologi.

3. Tambahkan perangkai biimplikasi untuk menghasilkan tautologi

$\sim A \vee \sim B$	**$\sim(A \wedge B)$**	**$\sim A \vee \sim B \leftrightarrow \sim(A \wedge B)$**
S	S	B
B	B	B
B	B	B

B	B	B

Jika hasilnya adalah tautologi (bernilai T semua), maka dikatakan bahwa kedua argumen tersebut ekuivalen secara logis.

LATIHAN:

1. Jika p, q, r adalah proposisi. Buatlah Kalimat yang menyatakan ekspresi logika dibawah ini dan buatlah table kebenarannya untuk masing-masing ekspresi logika berikut:
   a. $(p \oplus q) \rightarrow \sim r$
   b. $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \wedge r)$
   c. $(p \vee \sim q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$
   d. $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
   e. $(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge r)$