

KOMPOSISI BENTUK FUNGSI

3.1 Definisi Fungsi

Untuk setiap anggota himpunan A dikaitkan dengan satu dan hanya satu anggota himpunan B disebut suatu *fungsi* dari A ke B.

Himpunan A disebut domain atau ramah dan himpunan B disebut Codomain dari fungsi.

Fungsi biasa diberi nama seperti f , g , dan sebagainya. Dan biasa kita tulis fungsi f sebagai $f: a \rightarrow B$

Jika $a \in A$ maka anggota himpunan B merupakan kaitan dari a dapat ditulis sebagai $f(a)$. Elemen $f(a)$ tersebut dinamakan nilai fungsi dari a , atau peta dari a .

Himpunan semua peta disebut daerah nilai (range) dari fungsi f . Daerah nilai merupakan himpunan bagian dari codomain.

Fungsi seringkali disajikan dalam bentuk rumus (persamaan) matematika. Misalnya f adalah fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil yang memetakan setiap $x \in \mathbb{R}$ ke kuadratnya.

Disini rumus matematikanya adalah $f(x) = x^2$, yang dapat ditulis pula sebagai $x \rightarrow x^2$.

Fungsi merupakan suatu relasi yang khusus. Fungsi dapat disajikan sebagai himpunan pasangan terurut (x, y) seperti halnya relasi. Yang perlu diperhatikan setiap anggota domain satu dan hanya satu kali muncul sebagai komponen pertama pasangan.

Nama lain dari fungsi adalah pemetaan atau transformasi. Jika kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B.

Contoh:

- Himpunan $\{(1,a), (2,b), (3,c), (4, d)\}$
Merupakan fungsi dari $A \{1,2,3,4\}$ ke $B \{a,b,c,d\}$
- Himpunan $\{(1, a), (1, b), (2, a), (3, d), (4, a)\}$
Bukan fungsi karena elemen $1 \in A$ dipetakan ke a serta ke b .
- Himpunan $\{(1, a), (2, b), (3, c)\}$
Bukan fungsi karena $4 \in A$ tidak mempunyai peta di B.

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut

Fungsi adalah relasi, seangkan relasi biasanya dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut.

2. Formula Pengisian Nilai (*assignment*)

Fungsi dispesifikasikan alam bentuk rumus pengisian nilai (*assignment*), misal $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = 1/x$.

3. Kata-kata

Fungsi dapat inyatakan secara eksplisit dalam rangkaian kata-kata. Misalnya: “f adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu string biner”.

4. Kode Program (*source code*)

Fungsi dispesifikasikan dalam bentuk kode program komputer. Misalnya dalam bahasa pascal, bahasa c, dsb.

3.2 Jenis-Jenis Fungsi

1.) ONE ONE (INJEKTIF)

Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (one-to-one) atau injectif jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A, maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya adalah $a = b$.

Contoh1:

Relasi

$$f = \{ (1, w), (2, u), (3, v) \}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah **fungsi satu-ke-satu**.

Contoh2:

Relasi

$$f = \{ (1, u), (2, u), (3, v) \}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah **bukan fungsi satu-ke-satu**

karena $f(1) = f(2) = u$.

2.) ONTO (SURJEKTIF)

Fungsi f dikatakan dipetakan **pada** (ONTO) atau surjektif jika setiap elemen B merupakan bayangan dari satu atau lebih himpunan A . Dengan kata lain, seluruh elemen B merupakan jelajah dari f . Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B .

Semua elemen di B merupakan peta dari elemen-elemen A (Range $A = B$ atau $f(A) = B$)

Contoh1:

Relasi

$$f = \{ (1, u), (2, u), (3, v) \}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f .

Contoh2:

Relasi

$$f = \{ (1, w), (2, u), (3, v) \}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f .

3.) KORESPONDENSI SATU KE SATU (BIJEKSI / BIJECTION)

Fungsi f dikatakan **berkorespondensi satu-ke-satu** atau bijeksi jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

Contoh1:

Relasi

$$f = \{ (1, u), (2, w), (3, v) \}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi berkoresponden sat-ke-satu karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Contoh2:

Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

Jika f adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B maka kita dapat menemukan balikan(invers) dari f .

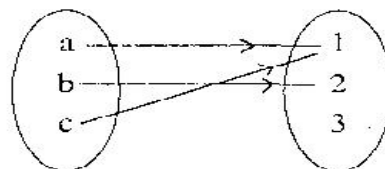
Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi invertible (dapat dibalikan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikkannya.

4.) FUNGSI KONSTAN

Suatu fungsi f dari A ke dalam B disebut fungsi konstan jika elemen $b \in B$ yang sama ditetapkan untuk setiap elemen dalam A . Dengan kata lain, $f : a \rightarrow B$ adalah suatu fungsi konstan jika daerah nilai dari fungsi f hanya terdiri dari satu elemen.

Contoh 1:

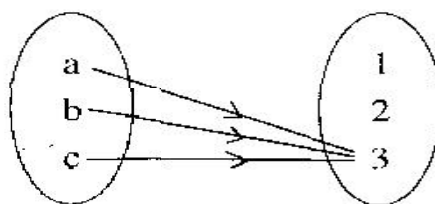
Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:



Maka f bukan fungsi konstan karena jangkauan dari f terdiri atas 1 dan 2.

Contoh 2:

Misalkan fungsi f didefinisikan oleh diagram:



Maka f adalah fungsi konstan karena 3 ditetapkan untuk setiap elemen A .

3.3 Komposisi Fungsi

Anggap $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$

Didapat fungsi baru $(g \circ f) : A \rightarrow C$

yang disebut **komposisi fungsi** dari f dan g

$$h = g \circ f$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

yaitu dengan mengerjakan $f(x)$ terlebih dahulu

ket : image f merupakan domain bagi g .

contoh:

1. $f: A \rightarrow B; g: B \rightarrow C$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = x + 3 \quad \mathbb{R} = \text{riil}$$

maka

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$$

Bila $x=2$, maka

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 25$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 7$$

3.4 Komposisi dari dua buah fungsi

Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B , dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C . Komposisi f dan g dinotasikan dengan $f \circ g$ adalah fungsi dari A ke C yang di definisikan oleh:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

dan

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

SIFAT

$(f \circ g) \neq (g \circ f)$: tidak komutatif

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$: asosiatif

Contoh:

1. Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 + 1) \\ &= x^2 + 1 - 1 \\ &= x^2. \\ \text{(ii)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 + 1 \\ &= x^2 - 2x + 2.\end{aligned}$$

2. Diket $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x + 3$ carilah $(f \circ g)(2)$ dan $(g \circ f)(2)$!!!

Penyelesaian:

Untuk $x = 2$ maka $f(2) = x^2 = 2^2 = 4$

Untuk $x = 2$ maka $g(2) = x + 3 = 2 + 3 = 5$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x+3) \\ &= (x+3)^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 + 3\end{aligned}$$

Bila $x=2$, maka

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= f(g(2)) && \text{ingat } g(2) = 5 \\ &= f(5) \\ &= 5^2\end{aligned}$$

$$= 25$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) \quad \text{ingat } f(2) = 4$$

$$= g(4)$$

$$= 4 + 3$$

$$= 7$$

3. Diket $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $g(x) = 3x - 4$

Ditanya

a. Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$

b. Buktikan bahwa $(f \circ g)(2) = f(g(2))$

Dan $(g \circ f)(2) = g(f(2))$

Penyelesaian:

Untuk $x = 2$ maka $f(2) = x^2 + 2x - 3$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3$$

$$f(2) = 5$$

Untuk $x = 2$ maka $g(2) = 3x - 4$

$$g(2) = 3 \cdot 2 - 4$$

$$g(2) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{a.) } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x - 4) \\ &= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3 \\ &= 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3 \\ &= 9x^2 - 18x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(x^2 + 2x - 3) \\
 &= 3(x^2 + 2x - 3) - 4 \\
 &= 3x^2 + 6x - 9 - 4 \\
 &= 3x^2 + 6x - 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b.) } (f \circ g)(2) &= f(g(2)) && \text{ingat } g(2) = 2 \\
 9x^2 - 18x + 5 &= f(2)
 \end{aligned}$$

$$9x^2 - 18x + 5 = x^2 + 2x - 3$$

$$9 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 5 = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3$$

$$36 - 36 + 5 = 4 + 4 - 3$$

$$5 = 5$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) \quad \text{ingat } f(2) = 5$$

$$3x^2 + 6x - 13 = g(5)$$

$$3x^2 + 6x - 13 = 3x - 4$$

$$3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 13 = 3 \cdot 5 - 4$$

$$12 + 12 - 13 = 15 - 4$$

$$11 = 11$$

Terbukti

4. Diket $f(x) = x^2 + 4$ dan $g(x) = 2x + 3$

Ditanya

a. Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$

b. Buktikan bahwa $(f \circ g)(3) = f(g(3))$

Dan $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

Penyelesaian:

Untuk $x = 3$ maka $f(3) = x^2 + 4 = 3^2 + 4 = 13$

Untuk $x = 3$ maka $g(3) = 2x + 3 = 2.3 + 3 = 9$

$$\begin{aligned} \text{a.) } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x + 3) \\ &= (2x + 3)^2 + 4 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 + 4 \\ &= 4x^2 + 12x + 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 4) \\ &= 2(x^2 + 4) + 3 \\ &= 2x^2 + 8 + 3 \\ &= 2x^2 + 11 \end{aligned}$$

$$\text{b.) } (f \circ g)(3) = f(g(3)) \quad \text{ingat } g(3) = 9$$

$$4x^2 + 12x + 13 = f(9)$$

$$4x^2 + 12x + 13 = x^2 + 4$$

$$4.3^2 + 12.3 + 13 = 9^2 + 4$$

$$36 + 36 + 13 = 81 + 4$$

$$85 = 85$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) \quad \text{ingat } f(3) = 13$$

$$2x^2 + 11 = g(13)$$

$$2x^2 + 11 = 2x + 3$$

$$2 \cdot 3^2 + 11 = 2 \cdot 13 + 3$$

$$18 + 11 = 26 + 3$$

$$29 = 29$$

Terbukti

3.5 Latihan

1. Diket $f(x) = x^2 - 4$ dan $g(x) = 2x + 3$

Ditanya

- Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
- Buktikan bahwa $(f \circ g)(2) = f(g(2))$
Dan $(g \circ f)(2) = g(f(2))$

2. Diket $f(x) = 2x^2 - 2$ dan $g(x) = x - 3$

Ditanya

- Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$
- Buktikan bahwa $(f \circ g)(2) = f(g(2))$
Dan $(g \circ f)(2) = g(f(2))$

3. Diket $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = 2x - 3$

Ditanya

- Carilah rumus $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.
- Buktikan bahwa $(f \circ g)(3) = f(g(3))$
Dan $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

4. Diket $f(x) = 2x^2 - 2$, $g(x) = x - 3$ dan $h(x) = x$

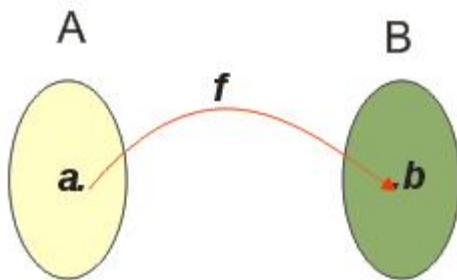
Ditanya

- Carilah rumus $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ h)(x)$, dan $(h \circ f)(x)$.
- Buktikan bahwa $(f \circ g)(2) = f(g(2))$
- Buktikan bahwa $(g \circ f)(2) = g(f(2))$
- Buktikan bahwa $(g \circ h)(2) = g(h(2))$
- Buktikan bahwa $(h \circ f)(2) = h(f(2))$

3.5 Fungsi Invers

1. Pengertian Invers

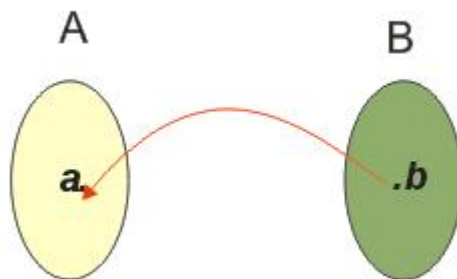
Misalkan f fungsi dari himpunan A ke B yang dinyatakan dengan diagram panah sbb:



sehingga diperoleh himpunan pasangan berurutan:

$$f : \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Kalau diadakan pengubahan domain menjadi kodomain dan kodomain menjadi domain, maka diagram panahnya menjadi



dan himpunan pasangan berurutannya menjadi

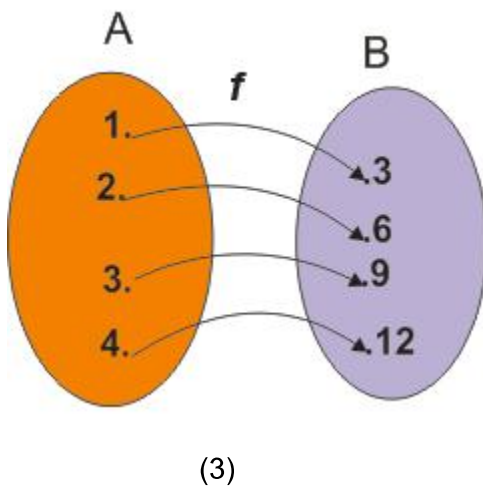
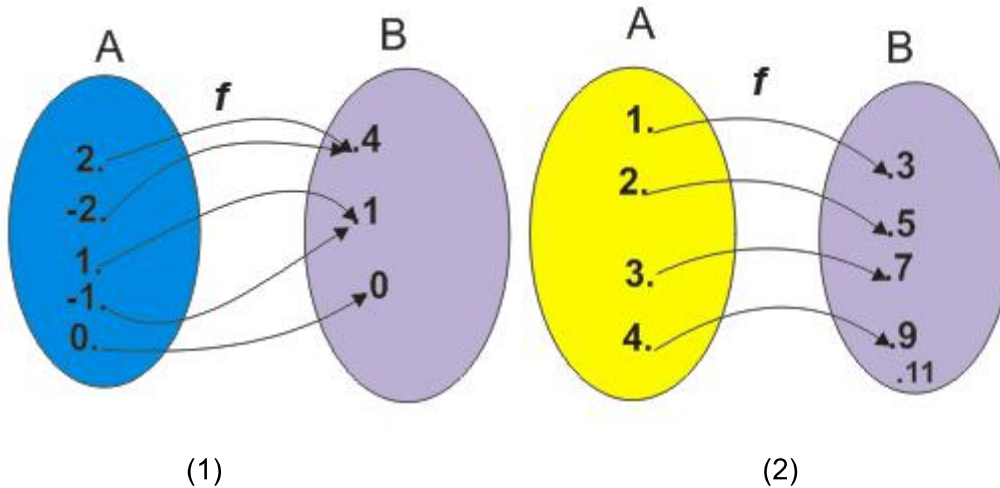
$$\{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$$

Relasi yang diperoleh dengan cara seperti di atas disebut invers fungsi f dan dilambangkan dengan f^{-1}

Definisi:

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $f : \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$ maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ ditentukan oleh $f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$

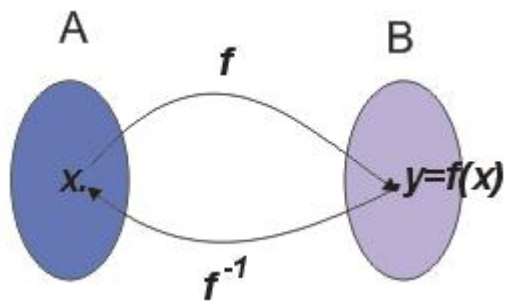
Apakah invers suatu fungsi juga merupakan fungsi ? Untuk jelasnya perhatikan diagram panah berikut.



Tampak bahwa yang inversnya juga merupakan fungsi hanya pada gambar (3). Jika invers suatu fungsi merupakan fungsi, maka invers fungsi itu disebut fungsi invers.

2. Menentukan Rumus Fungsi Invers

Perhatikan diagram panah berikut.



y adalah peta dari x oleh fungsi f , sehingga pemetaan oleh fungsi f dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$y = f(x)$$

Kalau f^{-1} adalah invers dari fungsi f maka x adalah peta dari y oleh fungsi f^{-1} sehingga diperoleh persamaan:

$$x = f^{-1}(y)$$

Selanjutnya peubah x diganti dengan y dan peubah y diganti dengan x .

Contoh:

1. Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = 2x + 6$!

Jawab:

$$y = f(x) = 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow 2x = y - 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - 3$$

Dengan demikian $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$

Contoh:

Tentukan rumus fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$

Jawab:

$$y = f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow y(3x+1) = 2x-5$$

$$\Leftrightarrow 3yx + y = 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3yx - 2x = -y - 5$$

$$\Leftrightarrow (3y - 2)x = -y - 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y-5}{3y-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+5}{2-3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2-3y}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2-3x}$$

Jadi fungsi invers dari fungsi $f(x) = \frac{2x-5}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2-3x}$

3. Fungsi Invers dan Fungsi Komposisi

Misalkan $h(x)$ adalah fungsi komposisi yang dapat dibentuk dari fungsi $f(x)$ dan fungsi $g(x)$.

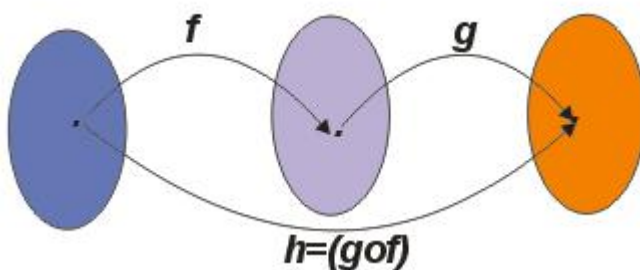
Fungsi $h(x)$ kemungkinannya adalah

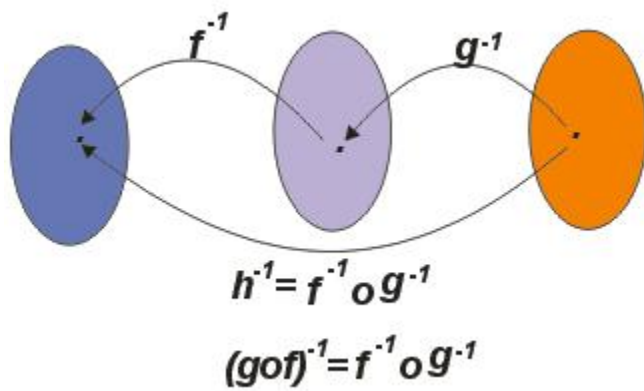
ii) $h(x) = (f \circ g)(x)$

ii) $h(x) = (g \circ f)(x)$

Diagram panahnya sbb:

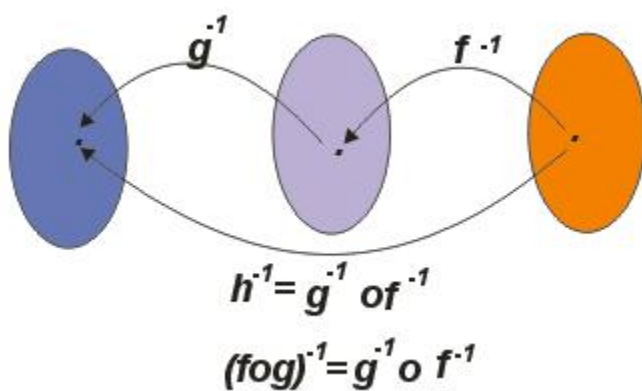
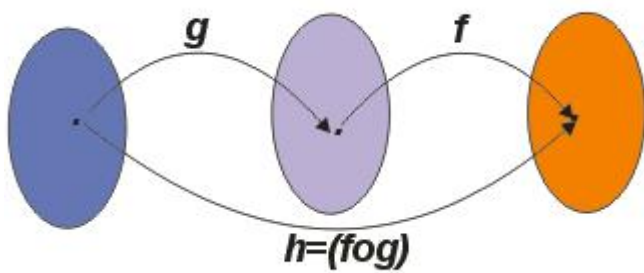
i)





Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

ii)



Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Contoh:

Misalkan $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ ditentukan dengan rumus $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 5x - 2$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$

Jawab:

Cara 1:

Dicari $(f \circ g)(x)$ terlebih dahulu selanjutnya dicari $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (5x - 2) + 3 = 5x + 1$$

$$y = 5x + 1$$

$$\Leftrightarrow 5x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}$$

$$\text{Jadi } (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$$

Cara 2:

Dicari $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$ selanjutnya menggunakan rumus $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

$$f(x) = x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = x + 3$$

$$\Leftrightarrow x = y - 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - 3$$

$$g(x) = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow y = 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
 &= \frac{1}{5}(x-3) + \frac{2}{5} \\
 &= \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Contoh:

Fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus:

$$f(x) = 2x + 1 \text{ dan } g(x) = \frac{3x + 5}{x - 4}$$

Carilah $(g \circ f)^{-1}(x)$!

Jawab;

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= \frac{3(2x + 1) + 5}{2x + 1 - 4} \\
 &= \frac{6x + 8}{2x - 3}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6x + 8}{2x - 3}$$

$$\Leftrightarrow 2yx - 3y = 6x + 8$$

$$\Leftrightarrow 2yx - 6x = 3y + 8$$

$$\Leftrightarrow (2y - 6)x = 3y + 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y + 8}{2y - 6}$$

$$\text{Jadi } (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3x + 8}{2x - 6}$$