

## Materi-5

# DUALITAS DAN ANALISIS SENSITIVITAS

# Review - Interpretasi Ekonomis dari Simbol Dalam Simplex

Simbol	Interpretasi ekonomis
$X_j$	Tingkat Aktivitas ( $j = 1, 2, \dots, n$ )
$C_j$	Laba per satuan aktivitas $j$
$Z$	Laba total dari seluruh aktivitas
$b_i$	Jumlah sumber I yang tersedia ( $i = 1, 2, \dots, m$ )
$a_{ij}$	Jumlah sumber I yang 'dipakai' oleh setiap satuan aktivitas $j$

Asumsi dasarnya adalah : masalah asli/simplex/primal-nya dalam bentuk standar.

- Bentuk Standar masalah asli/simplex/primal adalah :

- Fungsi Tujuannya :

- Maksimumkan 
$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

- Batasan-batasan : 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j \leq b_i, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

dan 
$$X_j \geq 0; \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

# Dasar Teori Dualitas

## Tabel Simplex

Variabel Dasar	Z	$X_1$	$X_2$ .....	$X_n$	$X_{n+1}$ .....	$X_{n+m}$	NK
Z	1	$(Z_1-C_1)$	$(Z_2-C_2)$ .....	$(Z_n-C_n)$	$Y_1$ .....	$Y_m$	$Y_0$

- **Kondisi Optimal tercapai apabila :**

$$Z_j - C_j \geq 0, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n.$$

$$Y_i \geq 0, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

- **Bentuk Dual-nya adalah :**

$$m$$

- **Maksimumkan  $Y_0 = \sum_{i=1}^m b_i Y_i$**

$$m$$

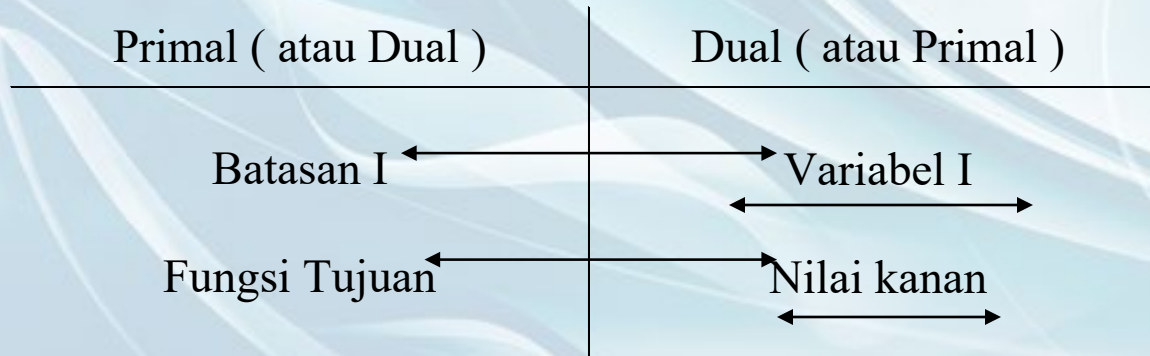
- **Batasan-batasan :  $\sum_{i=1}^m a_{ij} Y_i \geq C_j, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, n$**

dan

$$Y_i \geq 0; \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

# Hubungan Simplex/Primal – Dual

(1) Parameter batasan-batasan primal (atau dual) merupakan koefisien variabel dual (atau primal); (2) koefisien fungsi tujuan primal (atau dual) merupakan nilai kanan dua ( atau primalnya).



## Tabel Primal-Dual Linier Programing

PRIMAL		DUAL
1. <u>Fungsi Tujuan : Maksimasi</u> <u>Minimasi</u>	→	<u>Fungsi Tujuan : Minimasi</u> <u>Maksimasi</u>
1. <u>Konstanta Ruas kanan</u>	→	<u>Koefisien Fungsi Tujuan</u>
1. <u>Koefisien Fungsi Tujuan</u>	→	<u>Konstanta Ruas kanan</u>
1. <u>Pembatas</u> 2. Fungsi Tujuan Maksimasi ❖ Pembatas $\geq$ ❖ Pembatas $\leq$ ❖ Pembatas = 3. Fungsi Tujuan Minimasi ❖ Pembatas $\geq$ ❖ Pembatas $\leq$ ❖ Pembatas =	→ → → → → →	<u>Non Negative Constraint</u> Non negative constraint $y_i \leq 0$ Non negative constraint $y_i \geq 0$ Non negative constraint tidak terbatas dalam tanda Non negative constraint $y_i \geq 0$ Non negative constraint $y_i \leq 0$ Non negative constraint tidak terbatas dalam tanda
1. <u>Non negative constraint</u> 2. Fungsi Tujuan Maksimasi ❖ Non negative constraint $x_i \geq 0$ ❖ Non negative constraint $x_i \leq 0$ ❖ Non negative constraint Tidak terbatas dalam tanda 3. Fungsi Tujuan Minimasi ❖ Non negative constraint $x_i \geq 0$ ❖ Non negative constraint $x_i \leq 0$ ❖ Non negative constraint Tidak terbatas dalam tanda	→ → → → → →	<u>Pembatas</u> Pembatas $\geq$ Pembatas $\leq$ Pembatas = Pembatas $\leq$ Pembatas $\geq$ Pembatas =

## Contoh Soal :

- Perusahaan sepatu 'IDEAL' membuat 2 macam sepatu. Yang pertama adalah sepatu dengan sol karet ( $X_1$ ), dan yang kedua adalah sepatu dengan sol dari kulit ( $x_2$ ). Untuk memproduksi kedua macam sepatu tersebut perusahaan menggunakan 3 jenis mesin. Mesin 1 = Khusus untuk membuat sepatu dari karet, dng kapasitas max. = 8 jam. Mesin 2 = Khusus untuk membuat sepatu dari kulit, dng kapasitas max. = 15 jam. Mesin 3 = Khusus untuk asemblim kedua macam sepatu tsb., dng kapasitas max. =30 jam
- Setiap lusin  $X_1$  mula-mula dikerjakan di mesin 1 selam 2 jam, dan selanjutnya menuju mesin 3 selama 6 jam. Sedangkan  $x_2$  dikerjakan oleh mesin 2 selama 3 jam dan langsung ke mesin 3 selama 5 jam.
- Sumbangan terhadap laba untuk setiap sepatu  $X_1 = \text{Rp } 30.000,-$ , sedangkan sepatu  $x_2 = \text{Rp } 50.000,-$
- Untuk mendapatkan hasil yang optimal, berapakah Sepatu  $X_1$  dan  $x_2$  yang harus diproduksi ?

## Tabel Primal-Dual Untuk Contoh di Atas

	$X_1$	$X_2$	
$Y_1$	2	0	$\leq 8$
$Y_2$	0	3	$\leq 15$
$Y_3$	6	5	$\leq 30$
	$\geq 3$	$\geq 5$	

### Penyajian dalam persamaan Primal – Dual

Maksimumkan :  $Z = 3X_1 + 5X_2$

Minimumkan :  $Y_0 = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

Batasan-batasan :

$$2X_1 \leq 8$$

$$3X_2 \leq 15$$

$$6X_1 + 5X_2 \leq 30$$

dan  $X_1, X_2 \geq 0$

$$2Y_1 + 6Y_3 \geq 3$$

$$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$



## Tabel Optimal Simplex-nya :

Variabel Dasar	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	NK
Z	1	0	0	0	5/6	1/2	27 1/2
X <sub>3</sub>	0	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X <sub>2</sub>	0	0	1	0	1/3	0	5
X <sub>1</sub>	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6

Solusi Optimalnya - Simplexnya :

$$X_1 = 5/6$$

$$X_2 = 5$$

$$\text{Laba} = 27 \frac{1}{2}$$

Dengan cara sama, solusi optimal masalah Dual-nya adalah :

$$Y_1 = 0$$

$$Y_2 = 5/6$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}$$

## Penjelasan :

- Perhatikan ! Ketiga nilai tersebut sama dengan koefisien slack variabel pada baris pertama (Z)
- Nilai ini juga menunjukkan kontribusi per satuan sumber I (produk) terhadap laba

Contoh : untuk  $Y_3 = \frac{1}{2} \rightarrow$  kendala 3

Bila kapasitas mesin 3 (batasan ke-3) dapat dinaikkan dari  $6X_1 + 5X_2 \leq 30$  menjadi  $6X_1 + 5X_2 \leq 31$ , maka  $X_1$ ,  $X_2$ , dan laba akan berubah menjadi :

$$\begin{array}{rcl} 6X_1 + 5X_2 & = & 31 \rightarrow \times 3 \\ & & 3X_2 & = & 15 \rightarrow \times 5 \end{array}$$


---

$$\begin{array}{rcl} 18X_1 + 15X_2 & = & 93 \\ & & 15X_2 & = & 75 \end{array}$$


---

$$18X_1 = 18$$

$$X_1 = 1$$

$$X_2 = 5$$

- Sehingga nilai Z-nya adalah :  $Z^* = 3(1) + 5(5) = 28$ , naik  $\frac{1}{2}$  dibanding sebelumnya.

Tetapi kenaikan ada batasnya ( dalam contoh, max. 19 ), Bagaimana kalau naik 50 ?

$$\begin{array}{rcl}
 6X_1 + 5X_2 & = & 50 \rightarrow \times 3 \\
 & & 3X_2 = 15 \rightarrow \times 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 18X_1 + 15X_2 & = & 93 \\
 & & 15X_2 = 75 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$18X_1 = 75$$

$X_1 = 4 \frac{1}{6} \rightarrow$  ini sudah melanggar batasan ke-1, dimana :  
 $2X_1 \leq 8$ , sehingga  $X_1 \leq 4$

Begitu pula dengan kenaikan-kenaikan kapasitas pada batasan lainnya.

# ANALISIS SENSITIVITAS

Manfaat utama : menghindari perhitungan ulang yang dapat terjadi bila ternyata terjadi perubahan-perubahan pada masalah awal, seperti perubahan :

- Perubahan pada nilai kanan fungsi batasan
- Perubahan pada koefisien fungsi tujuan
- Penambahan variabel baru
- Penambahan batasan baru
- Perubahan pada koefisien yang menunjukkan berapa bagian kapasitas sumber yang di-‘konsumsi’ oleh satu satuan kegiatan
- Perubahan-perubahan tsb. Akan mengakibatkan salah satu dibawah ini :
- Penyelesaian optimal tidak berubah
- Variabel-variabel dasar mengalami perubahan, tapi nilainya tidak berubah

# Kaidah Primal-Dual

## Kaidah 1 :

Pada setiap iterasi dalam simplex (baik primal maupun dual), matriks yang berisi variabel-variabel 'starting point' (tidak termasuk baris tujuan) dapat dipakai untuk menghitung koefisien-koefisien baris tujuan yang berhubungan dengan matriks tersebut.

Variabel Dasar	Z	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	NK
Z	1	0	0	0	5/6	1/2	27 1/2
X <sub>3</sub>	0	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X <sub>2</sub>	0	0	1	0	1/3	0	5
X <sub>1</sub>	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6

$$(0, 5, 3) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{array} \right|$$

Koefisien fs. Tujuan

$$= (0, 5/6, 1/2)$$

Perhatikan baris 1 pada tabel optimal

## Kaidah 2 :

Pada setiap iterasi dalam simplex (baik primal maupun dual), nilai kanan (kecuali untuk baris tujuan) dapat dihitung dengan mengalikan matriks yang dimaksud dalam kaidah 1, dengan vektor kolom yang berisi nilai kanan dari fungsi-fungsi batasan mula-mula.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 8 \\ 15 \\ 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \frac{1}{3} \\ 5 \\ 5/6 \end{vmatrix}$$

## Perubahan Pada Fungsi Tujuan

Misalkan kontribusi laba per satuan produk menjadi  $X_1 = \text{Rp } 40.000,-$  dan  $X_2 = \text{Rp } 60.000,-$ , maka output optimal yang baru adalah :

$$(0, 5, 4) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{array} \right| = (0, 8/9, 2/3)$$

Perubahan Koefisien-koefisien Teknis Fs. Tujuan. Misalnya dengan contoh Dual :

$$\text{Minmumkan : } Z = 60.000Y_1 + 75.000Y_2 + 45.000Y_3$$

Batasan-batasan :

$$4Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \geq 30$$

$$5Y_1 + 6Y_2 + 5Y_3 \geq 40$$

$$6Y_1 + 8Y_2 + 5Y_3 \geq 60$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Misalkan terjadi perubahan koefisien teknis pada X2 (Batasan 2 di Dual-nya), dari :

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ menjadi } \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ maka :}$$

Fungsi batasan 2 - Dualnya menjadi :

$3Y_1 + 4Y_2 + 6Y_3 \geq 40$ , dan nilai X2 pada baris X4, X1, dan X3 pada tabel optimal simpleksnya akan menjadi :

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ menjadi } \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ maka : } \begin{vmatrix} 1 & -3/2 & 6/5 \\ 0 & 5/4 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 41/5 \\ -17 \\ 4 \end{vmatrix}$$