BAB 1. KONSEP DASAR PROBABILITAS

A. Eksperimen Acak

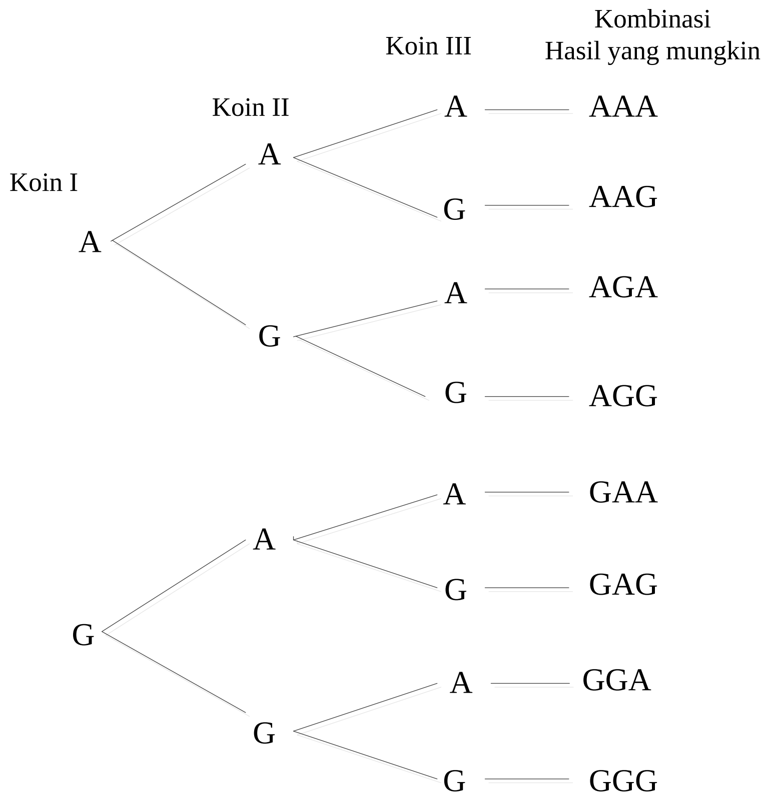
Eksperimen merupakan bagian yang penting dalam bidang sains dan engineering. Eksperimen bermanfaat karena peneliti dapat mengasumsi-kan bahwa jika melakukan percobaan/ eksperimen tertentu dalam kondisi yang kurang lebih identik maka hasil yang diperoleh juga hampir sama.Dalam kondisi diatas peneliti bisa mengendalikan nilai dari variabel-variabel yang mempengaruhi hasil dari eksperimen. Namun, dalam beberapa eksperimen ada kondisi dimana peneliti tidak dapat memastikan ataupun mengendalikan nilai dari variabel-variabel tertentu, sehingga hasil dari eksperimen pertama berbeda dengan hasil setelahnya meskipun mayoritas kondisinya sama.Eksperimen inilah yang disebut sebagai eksperimen acak

Contoh eksperimen acak adalah sebagai berikut. Jika sebuah dadu dilempar ke atas, maka kemungkinan mata dadu yang muncul adalah 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Percobaan pelemparan sebuah koin. Setelah koin dilempar dan jatuh, maka kemungkinan yang muncul adalah “Gambar” atau “Angka”. Jika duah koin dilempar keatas maka kemungiinannya adalah : AA, AG, GG, GA. Suatu pabrik memproduksi sejenis produk kesehatan. Kemungkinan produk yang dihasilkan adalah produk yang “cacat” dan “tidak cacat”.

B. Ruang Sampel dan Titik Sampel

Ruang Sampel yang dilambangkan dengan S (set) merupakan himpunan dari semua hasil yang mungkin terjadi dari eksperimen acak. Setiap hasil ekperimen atau kemungkinan-kemungkinan yang akan muncul dalam ruang sampel disebut sebagai titik sampel. Sehingga titik sampel merupakan unsur atau anggota dari ruang sampel. Contoh ruang sampel dan titik sampel adalah sebagai berikut. Jika sebuah dadu dilempar ke atas, maka tentukan ruang sampel kemungkinan mata dadu yang muncul adalah 1, 2, 3, 4, 5 atau 6. Sehingga ruang sampelnya dinyatakan dengan $S = \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$. Suatu pabrik memproduksi sejenis produk kesehatan. Kemungkinan produk yang dihasilkan adalah produk yang “cacat” dan “tidak cacat”. Sehingga ruang sampel dari sebuah produk yang dihasilkan oleh pabrik dapat dinyatakan dengan S = {Cacat, Tidak Cacat}. Sebuah koin dilempar ke atas. Setelah jatuh, maka kemungkinan sisi yang muncul paling atas adalah “Gambar” atau “Angka”. Sehingga ruang sampel percobaan tersebut dapat dinyatakan dengan S = {Angka, Gambar}.

Selanjutnya setelah mengetahui ruang sampel dan titik sampelnya maka hal yang bisa dilakukan adalah melakukan penghitungan titik sampel. Sebagai contoh terdapat tiga buah koin (uang logam) dilemparkan sekali, maka berapa banyaknya titik sampel dalam ruang sampel ? Pada percobaab tersebut koin I dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, yaitu Angka (A) atau gambar (G), koin II dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, A atau G demikian pula koin III dapat menghasilkan 2 hasil yang mungkin, A atau G. Sehingga jumlah titik sampel yang dihasilkan adalah (2).(2).(2) atau sama dengan 8 sebagaimana diilustrasikan oleh gambar berikut.



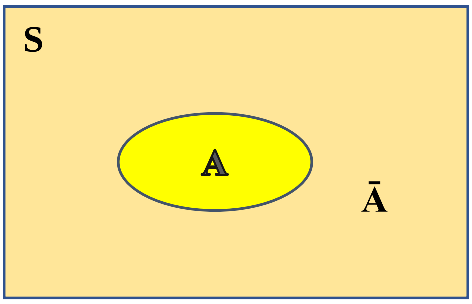
Gambar 1.1 Diagram pohon perhitungan titik sampel

C. Permutasi dan Kombinasi

Permutasi merupakan susunan dari suatu himpunan obyek yang dapat dibentuk yang memperhatikan urutan, sedangkan kombinasi merupakan susunan dari suatu himpunan obyek yang dapat dibentuk tanpa memperhatikan urutan. Banyaknya permutasi n obyek berlainan adalah n! (n faktorial) atau n x (n-1) x (n-2) x ...... x 4 x 3 x 2 x 1. Banyaknya permutasi n obyek berlainan bila diambil r sekaligus adalah $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ sedangkan banyaknya permutasi n benda berlainan yang disusun melingkar adalah (n-1)!. Sementara itu jumlah kombinasi ari n obyek yag berlainan jika diambil sebanyak r adalah $C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

D. Kejadian

Kejadian merupakan salah satu sub himpunan (subset dari ruang sampel atau biasa disebut sebagai himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian dilambangkan dengan himpunan A dimana anggota-anggota dari A adalah titik sampel. Pada kasus pelemparan satu buah dadu dengan himpunan semesta S={1,2,3,4,5,6} dan A={2} dapat diartikan bahwa A adalah kejadian muncul mata dadu 2 sehingga A $\subseteq$ S dimana A merupakan himpunan bagian dari S dan 2 $\in$ A dibaca dengan 2 elemen A dimana 2 disebut sebagai titik sampel. Sebagaimana kejadian maka S merupakan kejadian pasti karena salah satu dari elemen S pasti muncul sedangkan himpunan kosong (Ø atau { }) disebut sebagai kejadian mustahil karena dari Ø tidak mungkin muncul. Dengan menggnakan operasi-operasi himpunan terhadap kejadian-kejadian dalam S, maka akan diperoleh kejadian-kejadian lain dalam S. Selanjutnya akan dibahas sekilas tentang diagram venn. Diagram venn merupakan gambaran dari hubungan antara kejadian dan ruang sampel. Perhatikan gambar diagram venn berikut.



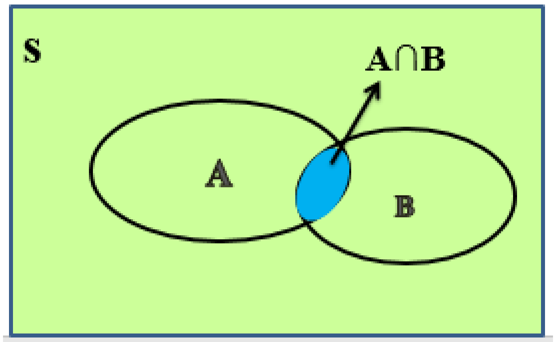
S = ruang sampel

A = himpunan bagian dari S

Ā = komplemen dari A

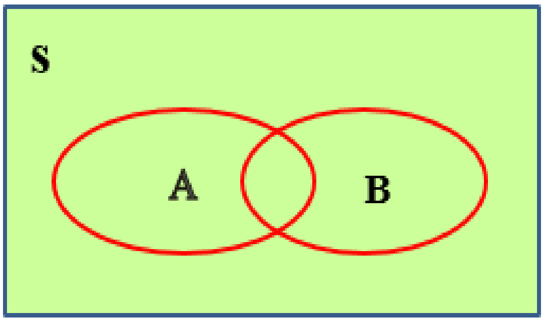
Gambar 1.2 Diagram Venn

Komplemen suatu kejadian A terhadap ialah himpunan semua unsur S yang tidak termasuk A. Komplemen dinyatakan dengan lambang Ā atau A'. Misal suatu ruang sampel S={buku, pensil, jurnal, majalah, koran}, jika A = {buku,pensil, jurnal} maka komplemen dar A atau ditulis dengan Ā atau A'={ majalah, koran}. Dengan menggunakan operasi-operasi himpunan terhadap kejadian- kejadian dalam S, maka akan diperoleh kejadian-kejadian lain dalam S. Jenis lain kejadian tersebut diantaranya adalah irisan dan gabungan. Irisan adalah interseksi antara dua kejadian. Misalnya jika A dan B adalah dua buah kejadian maka irisan keduanya sering ditulis A ∩ B : kejadian yang unsurnya termasuk A dan B atau dilambangkan dengan A ∩ B = { x : x ∈ A dan x ∈ B} atau dinyatakan bahwa A irisan B = x sedemikian rupa sehingga x elemen A dan x elemen B.



Gambar 1.3 Diagram venn Irisan

Operasi himpunan terhadap kejadian- kejadian dalam S dalam bentuk lainya adalah gabungan. Gabungan antara dua kejadian A dan B adalah kejadian-kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A atau B atau keduanya. Gabungan kedua kejadian tersebut sering ditulis $A \cup B$ dimana secara lengkap dapat dituliskan sebagai $A \cup B = \{ x : x \in A, \ x \in B$ atau $x \in AB\}$ yang dinyatakan dengan A gabungan B = x sedemikian rupa sehingga x elemen A, x elemen B atau x elemen AB.



Gambar 1.3 Diagram venn Gabungan

E. Konsep dan Perumusahan Probabilitas

Dalam eksperimen acak selalu ada ketidakpastian mengenai apakah suatu kejadian khusus akan atau tidak akan terjadi. Untuk memudahkan dalam mengukur peluang atau probabilitas atas kejadian khusus tersebut, dimana dengan ukuran ini seorang peneliti dapat mengharapkan munculnya kejadian, maka probabilitas dinyatakan dalam angka pecahan antara 0 sampai 1 atau dalam persentase. Probabilitas 0 atau 0% dimana semakin mendekati 0 atau nilai semakin kecil maka kemungkian munculnya peluang semakin sedikit atau bahkan tidak akan terjadi. Probabilitas 1 atau 100% artinya semakin besar kemungkinan terjadinya suatu event atau bahkan pasti terjadi.

Contoh penulisan probabilitas dalam desimal atau persentase adalah sebagai berikut. Pada hari Jumat adalah penutupan bursa saham, maka kebanyakan investor berusaha meraih keuntungan melalui penjualan saham atau yang biasanya diistilahkan profit taking, sehingga probabilitas menjual mencapai 0,7 sedangkan membeli 0,3. Melihat kondisi kesiapan mahasiswa yang mengikuti ujian Kalkulus II, maka mahasiswa yang mempunyai probabilitas untuk lulus 70% dan tidak lulus 30%.

Terdapat dua pendekatan dalam perumusan probabilitasatau suatu kejadian yaitu pendekatan klasik dan pendekatan relatif. Pada pendekatan klasik diasumsikan bahwa semua peristiwa mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi (*equally likely*). Rumusan untuk probabilitas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\text{Probabilitas} = \frac{\text{Jumlah kemungkinan hasil (peristiwa)}}{\text{Jumlah total kemungkinan hasil}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

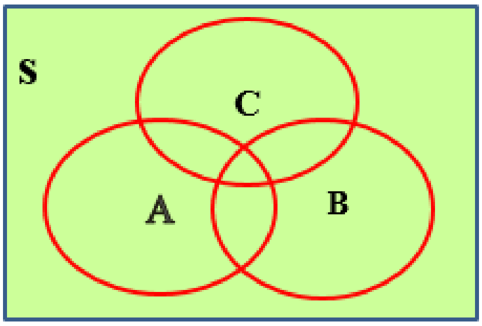
Bila kejadian A terjadi sebanayk m cara dari seluruh n cara maka probabiltas kejadian E ditulis dengan P(A) adalah = m/n. Pada suatu percobaan hanya 1 peristiwa yang terjadi, dan peristiwa lain tidak mungkin terjadi pada waktu yang bersamaan maka dikenal sebagai peristiwa saling lepas. "Peristiwa saling lepas (mutually exclusive) adalah terjadinya suatu peristiwa sehingga peristiwa yang lain tidak terjadi pada waktu yang bersamaan". Pada suatu percobaan atau kegiatan semua hasil mempunyai probabilitas yang sama, dan hanya satu peristiwa yang terjadi maka peristiwa ini dikenal dengan lengkap terbatas kolektif (*collection exhaustive*). Pada kegiatan mahasiswa belajar semua hasil ada yang sangat memuaskan, memuaskan dan terpuji. Jumlah hasil ada 3 dan hanya 1 peristiwa yang terjadi, maka probabilitas setiap peristiwa adalah 1/3(pasti).

Pada pendekatan frekuensi relatif jika suatu eksperimen diulang sebanyak *n* kali, dimana *n* sangat besar sampai mendekati nilai tak hingga, dan jika suatu kejadian terjadi sebanyak *m* kali, maka probabilitas dari kejadian tersebut sama dengan nilai limit dari *m/n* atau $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}\right)$. Probabiltas tersebut disebut probabilitas empiris. Meskipun mudah dan berguna dalam praktik, namun secara mamtematis perumusan konsep probabilitas dengan konsep frekuensi relative mempunyai kelemahan karena suatu nilai limit yang benar-benar mungkin sebenarnya tidak ada. Sedangkan pendekatan klasik memiliki kelemahan karena menuntut syarat hasil mempunyai kesempatan/kemungkinan yang sama untuk muncul. Oleh karena itu konsep probabilitas modern dikembangkan dengan pendekatan aksiomatik.

Pada pendekatan aksiomatik, aksioma-aksioma probabilitas jika diketahui bahwa suatu dan kejadian A dengan ruang sampel S dan peluang kejadian A pada S adalah P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$, maka dapat diselidiki sifat dari P(A) adalah :

- Aksioma 1 ➔ $0 < P(A) < 1$, A merupakan himpunan bagian dari S yaitu A ∈ S, maka banyaknya A selalu lebih sedikit dari banyaknya anggota S, yaitu n(A) ≤ n(S), sehingga $0 < \frac{n(A)}{n(S)} < 1$ atau $0 < P(A) < 1$. Disebut probabilitas kemungkinan, artinya kejadian atau peristiwa tersebut dapat atau tidak dapat terjadi.
- Aksioma 2 ➔ P (A) = 0, Dalam hal A adalah himpunan kosong, A= Ø, artinya A tidak terjadi pada S maka n(A)=0 sehingga P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)}$ = $\frac{0}{n}$ =0. Disebut juga sebagai probabilitas kemustahilan, artinya kejadian atau peristiwa tersebut tidak akan terjadi.
- Aksioma 3 ➔ P(A) = 1. Dalaam hal A=S, maksimum banyaknya anggota A sama dengan banyaknya anggota S, maka n(A) = n(S) = n sehingga P(A) = $\frac{n(A)}{n(S)}$ = $\frac{n}{n}$ =1. Disebut juga sebaga probabilitas kepastian, artinya kejadian atau peristiwa tersebut pasti terjadi.

Perumusan probabilitas pada kejadian majemuk sekurang-kurangnya terdapat dua kejadian atau lebih. Peluang gabungan tiga kejadian merupakan contoh probabilitas kejadian majemuk. Gambar diagram venn serta rumusan untuk peluang gabungan tiga kejadian adalah sebagai berikut.



Gambar 1.4 Diagram venn gabungan tiga kejadian

P(AUBUC) = P(A) + P(B)+ P(C) - P(A∩B) - P(A∩C) - P(B∩C) + P(A∩B∩C) …………(1.2)

Keterangan:

P(A) : Peluang kejadian A

P(B) : Peluang kejadian B

P(C) : Peluang kejadian C

P (A∩B) : Peluang kejadian A irisan B

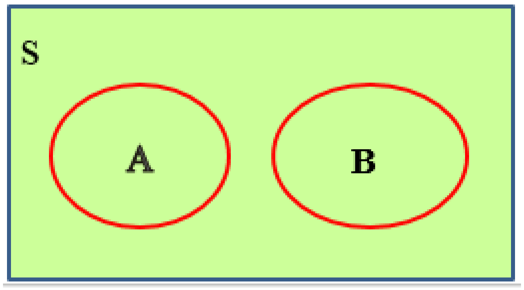
P (A∩C) : Peluang kejadian A irisan C

$P(B \cap C)$: Peluang kejadian B irisan C

$P(A \cap B \cap C)$: Peluang kejadian A irisan B irisan C

Contoh soal peluang mahasiswa lulus kalkulus adalah 2/3 dan peluang mahasiswa lulus Bahasa inggris adalah 4/9. Bila peluang lulus sekurang-kurangnya satu matakuliah diatas adalah 4/5, berapa peluang ia lulus kedua mata kuliah.

Jenis probabilitas kejadian lainnya probabilitas kejadian saling lepas. Dua buah kejadian dinyatakan saling lepas bila A dan B kejadian sembarang pada ruang sampel S dan berlaku $A \cap B = \emptyset$. Kejadian saling lepas disebut juga kejadian saling bertentangan atau saling terpisah (*mutually exclusive*). Dua kejadian A dan B saling lepas artinya kejadian A dan B tidak mungkin terjadi secara bersamaan. Diagram venn serta rumus umum kejadia saling lepas adalah sebagai berikut.



Gambar 1.5 Diagram venn kejadian saling lepas

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ……………………………………………………………(1.3)

karena $P(A \cap B) = 0 \rightarrow A \cap B = \emptyset$ maka rumusan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk lain

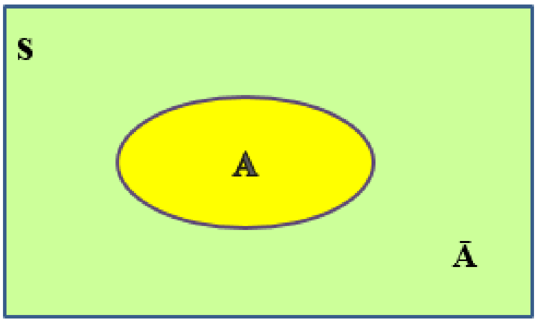
$P(A \cup B \cup) = P(A) + P(B) + P(C)$ ………………………………………………………(1.4)

Contoh soal

1. Bila A dan B dua kejadian saling lepas, dengan P(A) = 0,3 dan P(B)= 0,25 tentukanlah P(AUB) !
2. Pada pelemparan dua buah dadu tentukanlah probabilitas munculnya muka dadu dengan jumlah 7 atau 11. Hint : buat tabel kemungkinan munculnya dua muka dadu.

Probabilitas selanjutnya adalah probabilitas dua kejadian saling komplementer. Ingat kembali teori himpunan, jika $A \in S$, maka komplemen A bisa ditulis dengann symbol A'. Kejadian A' adalah kumpulan titik sampel yang merupakan titik sampel S tetapi bukan merupakan titik sampel A. Jika $A' = \{ x : x \in S \text{ dan } x \notin S\}$ maka $A \cap A' = \emptyset$ dan $AUA' = S$.

Diagram venn dan rumus umum probabilitas kejadian saling komplementer adalah sebagai berikut.



Gambar 1.6 Diagram venn kejadian saling komplementer

P(A') = 1 - P(A) ……………………………………..………………………..…(1.5)

Contoh soal pada pelemparan dua dadu jika A adalah kejadian munculnya muka dadu sama, hitunglah probabilitas munculnya muka dua dadu yang tidak sama!

Pembahasan probabilitas berikutnya yaitu probabilitas dua kejadian saling bebas (independen). Dalam kehidupan sehari-hari ada istilah "tidak saling mempengaruhi, independen atau tidak ada sangkut pautnya. Dalam hal tersebut maka terjadinya kejadian yang satu tidak dipengaruhi oleh terjadinya kejadian yang lain. Dua kejadian A dan B dalam ruang sampel S dikatakan independen jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B dan demikian puula sebaliknya. Rumus umum probabilitas dua kejadian saling bebas atau independen adalah

P(A ∩ B) = P(A).P(B) ……………………………………..……………………… (1.6)

Sedangkan jika 3 kejadian maka

P(A ∩ B ∩C) = P(A).P(B).P(C) …………………………………………..…………… (1.7)

Contoh soal peluang bahwa sebuah robot berkaki akan "hidup" selama 25 tahun adalah $\frac{3}{5}$ dan peluang bahwa robot beroda akan "hidup" selama 25 tahun adalah $\frac{2}{3}$ Tentukan peluang bahwa keduanya akan hidup selama 25 tahun.

Selanjutnya sebuah probabiltas dikatan probabilitas bersyarat terjadi bila A dan B adalah dua kejadian sedemikian rupa sehingga P(A)> 0. Dimana kejadian B terjadi dengan syarat kejadian A terjadi terlebih dahulu atau dikatakan bahwa kejadian B bersyarat A yang ditulis B|A. Probabilitas terjadinya kejadian B dengan syarat A telah terjadi disebut sebagai kejadian bersyarat yang ditulis ddengan P(B|A).

$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ **;** P(A)>0 maka $P(B\cap A) = P(B|A) . P(A)$ ……..……………………… (1.8)

Catatan : probabilitas bersyarat untuk kejadian saling bebas adalah P(B|A) =P(B) dan P(A|B)=P(A) karena pada kejadian saling bebas P(A∩B) = P(A).P(B) maka

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B) \quad \text{...} \quad (1.9)$$

Pada probabilitas bersyarat tiga kejadian, jika dua kejadian P(A∩B) = P(A). P(B|A) maka untuk tiga kejadian rumusannya adalah sebagai berikut

P(A∩B∩C) = P(A). P(B|A) . P(C | A∩B) ……..……………………………………….. (1.10)

A,B dan C semua nya terjadi sehingga probabilitas kejadian A dikalikan dengan probabilitas kejadian B dengan syarat A telah terjadi, dikalikan dengan probabilitas terjadinya C dengan syarat A dan B keduanya telah terjadi.

Contoh soal

1. Peluang suatu penerbangan regular berangkat tepat pada waktunya P(D) = 0.83. Peluang penerbangan itu mendarat tepat pada waktunya P(A) = 0,92 dan peluang penerbangan tsb berangkat dan mendarat tepat pada waktunya adalah P(A∩D) = 0,78. Hitunglah peluang pesawat pada penerbangan tsb yang memiliki kondisi mendarat tepat waktu bila diketahui bahwa pesawat tersebut berangkat tepat waktu serta kondisi berangkat tepat waktu bila diketahui bahwa pesawat tersebut mendarat tepat waktu.

Jawab

- Probabilitas berangkat tepat waktu P(D) = 0.83
- Probabilitas mendarat tepat waktu P(A) = 0,92
- Probabilitas berangkat dan mendarat tepat waktu P(A ∩ D) = 0,78
- Maka mendarat tepat waktu bila berangkat tepat waktu yaitu $P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{0,78}{0,83} = 0,94$
- Berangkat tepat waktu bila mendarat tepat waktu adalah $P(D|A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)} = \frac{0,78}{0,92} = 0,85$

2. Misalkan kita mempunyai sebuah kotak berisi 20 resistor, dan 5 diantaranya rusak. Bila 2 resistor diambil secara acak (satu-satu) tanpa pengembalian, berapa peluang resistror tersebut yang terambil keduanya rusak?

Jawab

- A = kejadian terambilnya resistor rusak pada pengambilan pertama dan B = kejadian terambilnya resistor rusak pada pengambilan kedua bila terpilih resistor rusak pada pengambilan pertama

- Peluang terambilnya setiap resistor sama yaitu masing-masing 1/20 maka P(A) = 5/20 =1/4 dan P(B|A)=4/19
- Peluang terambilnya resistror rusak pada pengambilan pertama dan kedua P(A∩B) yaitu $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ➔ P (A∩B) = P(B|A). P(A) = 4/19 . 1/4 = 1/19

3. Sebuah dadu ideal dilemparkan sebanyak 2 kali. Tentukan probabilitas munculnya 4,5,6 pada pelemparan pertama dan 1,2,3 atau 4 pada pelemparan kedua.

Jawab

- Diketahui jika A adalah kejadian munculnya 4,5 atau 6 pada pelemparan pertama dan jika B adalah kejadian munculnya 1,2,3 atau 4 pada pelemparan kedua. Fakta yang ada bahwa pelemperan dadu yang kedua tidak dipengaruhi (independen) terhada pelemaran ertama sehingga kedua kejadian tersebut merupakan **bersyarat** (pelemparan kedua teradi dengan syarat pelemparan pertama sudah dilakukan) dan kejadian **saling bebas**
- Sehingga P(B|A)=P(B) maka P(A∩B) = P(A). P(B|A) = P(A).P(B) = 3/6 * 4/6 = 12/36 =1/3

F. Teorema Bayes

Bila B1, B2, B3,….., Bn adalah kejadian saling lepas (saling meniadakan) dalam ruang sampel S dan A kejadian lain sembarang dalam S, maka probabilitas kejadian bersyarat B**i** | A dapat dirumuskan

$$P(Bi \mid A) = \frac{P\,(Bi\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|Bi)\,.\,P(Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|Bi)\,.\,P(Bi)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.11)$$

Bila A1, A2, A3,….., An adalah kejadian saling lepas (saling meniadakan) dalam ruang sampel S dan B kejadian lain sembarang dalam S, maka probabilitas kejadian bersyarat A**i** | B dapat dirumuskan

$$P(Ai \mid B) = \frac{P\,(Ai\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|Ai)\,.\,P(Ai)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|Ai)\,.\,P(Ai)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.12)$$

Contoh soal misalkan ada 3 kotak masing-masig berisi 2 bola. Kotak 1 berisi 2 bola merah kotak 2 berisi 1 bola merah dan 1 bola putih dan kotak 3 berisi 2 bola putih. Dengan mata tertutup anda diminta mengambil satu kotak secara acak dan kemudian mengambil 1 bola secara acak dari kotak yang terambil itu. Bila bola yang terambil ternyata berwarna merah. Berapakah peluangnya bola tersebut terambil dari masing-masing kotak (kotak 1, kotak 2 dan kotak 3) ?