APLIKASI INTEGRAL GANDA(Dr. Jemakmun, M.Si)

1. Aplikasi Integral Ganda Dua

Integral ganda (rangkap) dua yang bentuk umumnya : $\iint_R f(x,y)\,dA$

dapat diaplikasikan untuk beberapa persoalan, diantaranya adalah:

a. Luas suatu Luasan (Bidang)

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral ganda dua jika f(x,y) = 1 , sehingga integral ganda dua menjadi :

$$A = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \mathrm{dydx} \quad \text{atau} \quad \Leftrightarrow A = \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \mathrm{dxdy}$$

Dalam koordinat polar, bentuk di atas dinyatakan dengan:

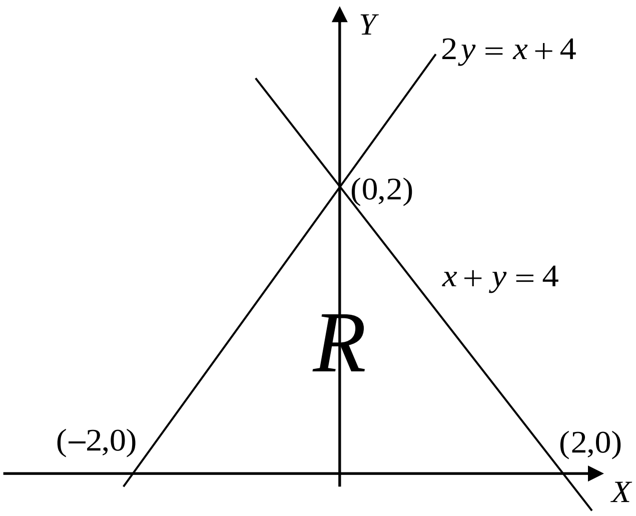
$$A = \iint_R dA = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{\rho_1}^{\upsilon_2} \rho \,\mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta$$

Contoh :

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh x + y = 2 dan 2y = x + 4

   Jawab :

   Sebelum ditentukan luasnya, daerah tersebut digambar terlebih dahulu



$$A=\iint_R dA=\int_0^2\int_{2y-4}^{2-y} \mathrm{dxdy}=\int_0^2 (\mathrm{x})_{2y-4}^{2-y}\, dy$$

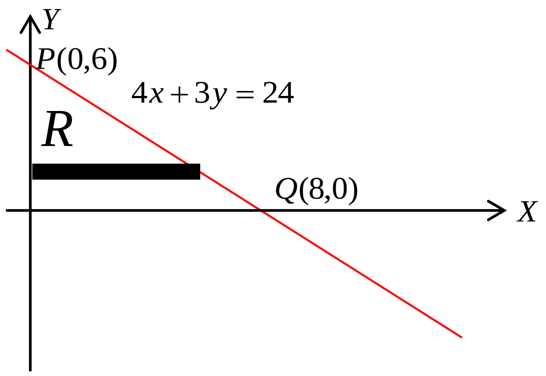
$$=\int_0^2 (2-y)-(2y-4)dy=\int_0^2 (6-3y)dy$$

$$=(6\mathrm{y}-\frac{3}{2}y^2)\Big|_0^2=(12-6)=6$$

2. Gunakan integral ganda dua untuk menentukan luas suatu luasan yang dibatasi oleh:

   3x + 4y = 24, x = 0, y = 0

   Jawab



Luas luasan di atas adalah

$$A(R) = \iint_R dA$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{24-4y}{3}} dxdy$$

$$= \int_0^6 [x]_0^{\frac{24-4y}{3}} dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^6 24-4y\; dy$$

$= \frac{1}{3}\left[24y - 2y^2\right]_0^6$

$= \frac{1}{3}(24.6 - 2.6^2) - (24.0 - 2.0^2)$

$= \frac{1}{3}(144 - 72)$

= 24 satuan luas

b. Pusat Luasan

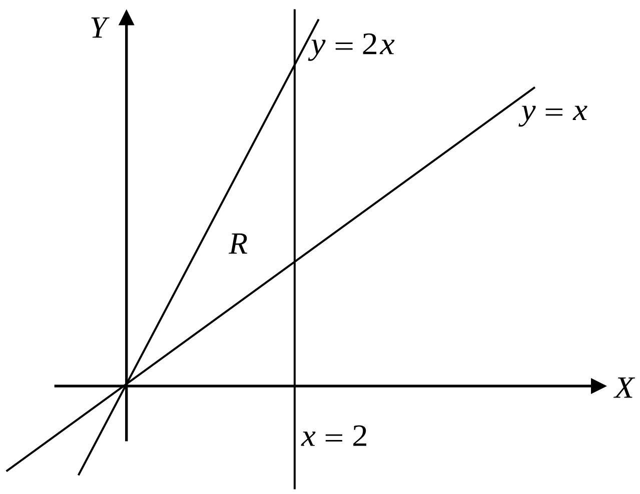
Misal R adalah suatu luasan yang dibatasi oleh kurva-kurva, maka luasan tersebut mempunyai pusat luasan dan dinyatakan dengan $(\bar{x}, \bar{y})$ dengan hubungan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}$$

dengan $\iint_R dA$ adalah luas dari luasan dimaksud.

Contoh

1) Tentukan pusat luasan berikut dengan menggunakan integral ganda dua.y = 2x, y = x, x = 0, dan x = 2



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan $(\bar{x}, \bar{y})$, dengan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} \text{ dan } \bar{y} = \frac{\iint_R y\, dA}{\iint_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R) = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} dydx = \int_0^2 (y)_x^{2x} dx = \int_0^2 x\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^2 = 2$$

dan

$$\iint_R y\, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} y\, dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[4x^2 - x^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(x^3\right)_0^2 = \frac{9}{2}$$

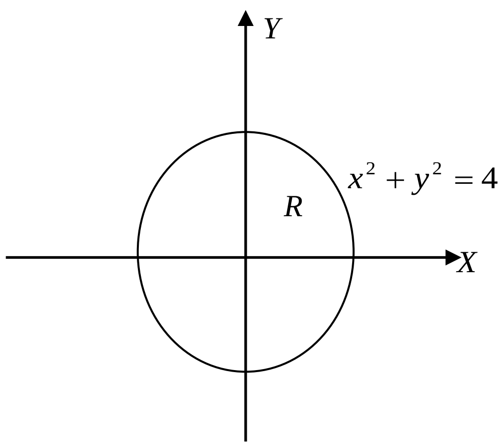
$$\iint_R x\, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} x\, dydx = \int_0^2 [xy]_x^{2x} dx = \int_0^2 \left[2x^2 - x^2\right] dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^2 = \frac{9}{2}$$

sehingga $\bar{x} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$ dan $\bar{y} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$

diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh y = 2x, y = x, x = 0, dan x = 2 adalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) Tentukan pusat luasan dengan batasan $x^2 + y^2 = 4$ pada kuadra I.



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan $(\overline{x},\overline{y})$, dengan

$$\overline{x} = \frac{\iint\limits_R x\,dA}{\iint\limits_R dA} \quad \text{dan} \quad \overline{y} = \frac{\iint\limits_R y\,dA}{\iint\limits_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R) = \iint\limits_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dydx = \int_0^2 (y)_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t.2\cos t\ dt$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{\sin t \cos t}{2} - \frac{1}{2}t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

dan

$$\iint\limits_R y\,dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\ dydx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[4-x^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(4x - x^3\right)_0^2 = 0$$

$$\iint\limits_R x\,dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x\ dydx = \int_0^2 \left[xy\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \left[x\sqrt{4-x^2}\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t 2\cos t 2\cos t dt$$

$$\Leftrightarrow 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t dt = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ d(\cos t) = -\frac{8}{3}\left(\cos^3 t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$$

sehingga $\bar{x} = \frac{\frac{8}{3}}{\pi}$ dan $\bar{y} = \frac{0}{\pi}$, diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh

$x^2 + y^2 = 4$ pada kuadra I. adalah $\left(\frac{8}{3\pi}, 0 \right)$

c. Luas Permukaan Lengkung

Jika S adalah bagian dari permukaan R' dengan persamaan z=f(x,y). R' dapat diproyeksikan pada bidang koordinat yang cocok sehingga menghasilkan suatu daerah R pada bidang dalam ruang. Dengan demikian fungsinya terintegralkan pada R.

1. Jika R' diproyeksikan pada XOY maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$

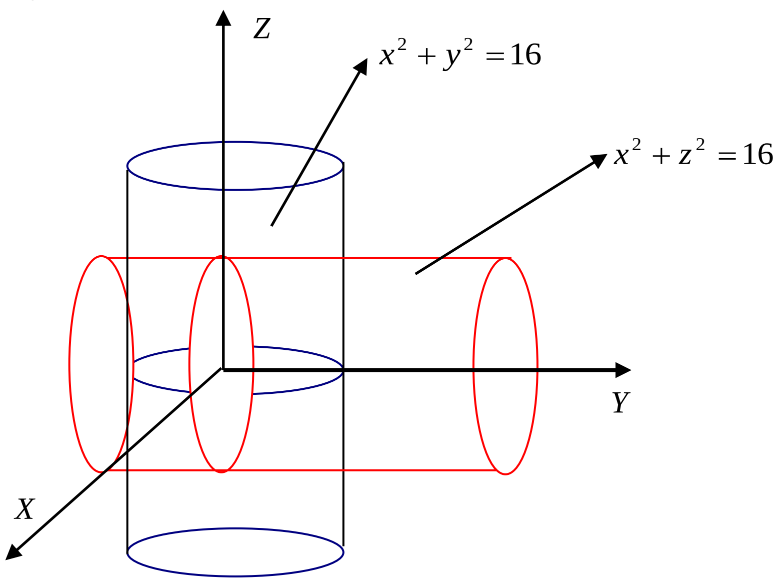
2. Jika R' diproyeksikan pada YOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA$

3. Jika R' diproyeksikan pada XOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA$

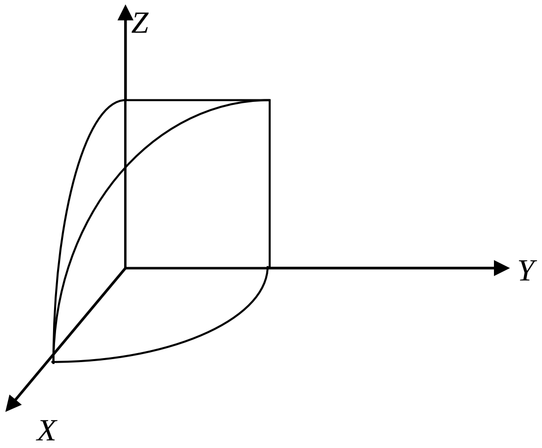
tanda integrasi urutannya menyesuaikan dengan bidang proyeksi, Jika bidang proyeksinya X)Y maka dA berubah menjadi dxdy atau dx.

Contoh; Carilah luas permukaan silinder $x^2 + z^2 = 16$ didalam silinder $x^2 + y^2 = 16$

Jawab



Perpotongan kedua selinder menghasilkan bangun



dengan mengganggap bidang XOY sebagai bidang proyksi, maka

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$z = \sqrt{16 - x^2}$, *sehingga* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$ *dan* $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ sehingga

$$S = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2}\, dydx$$

$$\Leftrightarrow 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}}\, dydx$$

$$\Leftrightarrow 32\int_0^4 dx = 32(4) = 128 \text{ satuan luas}$$

d. Volume Bangun Ruang

Volume bangun suatu ruang dapat dinyatakan dengan menggunakan integral ganda dua dan dituliskan dengan

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

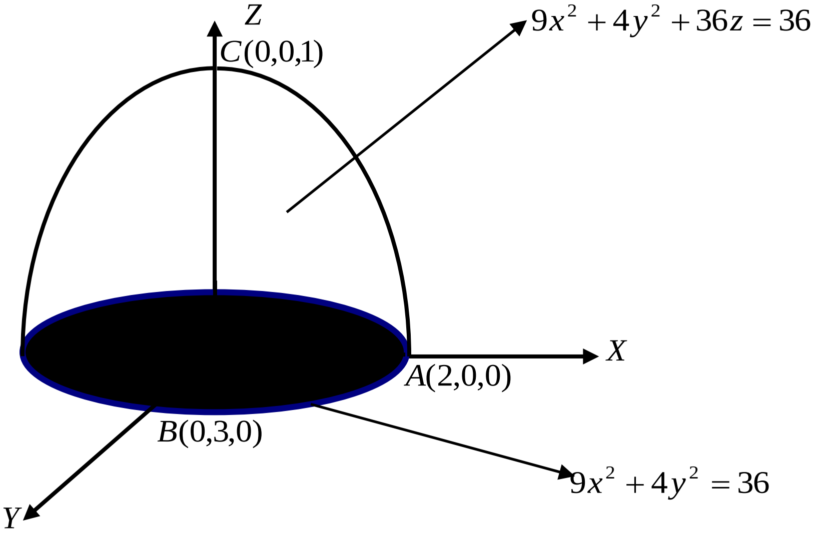
$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1 = a}^{x_2 = b} \int_{y_1 = y(x)}^{y_2 = y(x)} \mathrm{f(x, y)\ dydx}$$ atau $$\Leftrightarrow A = \int_{y_1 = a}^{y_2 = b} \int_{x_1 = x(y)}^{x_2 = x(y)} \mathrm{f(x, y)\ dxdy}$$

Contoh

1. Cari volume irisan $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ oleh bidang z = 0

   Jawab

   Gambar bangun yang pembatasnya $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ adalah



$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Dengan melakukan perubahan dA = dydx diperoleh

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}} \frac{36 - 9x^2 - 4y^2}{36}\, dydx$$

$$= \frac{4}{36}\int_0^2 \int_0^{\sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}} 36 - 9x^2 - 4y^2\, dydx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 \left[36y - 9x^2 y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 36(\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}) - 9x^2(\frac{1}{2}\sqrt{36-9x^2}) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 18\sqrt{36-9x^2}) - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2}) - \frac{4}{3}.\frac{1}{8}(36-9x^2)\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 18\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} - \frac{1}{6}(36-9x^2)\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 (18-6)\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} + \frac{3}{2}x^2\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 12\sqrt{36-9x^2} - \left(\frac{9}{2}-\frac{9}{6}\right)x^2\sqrt{36-9x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [12\sqrt{36-9x^2} - 3x^2\sqrt{36-9x^2}\,]\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [12\sqrt{9(4-x^2)} - 3x^2\sqrt{9(4-x^2)}\;dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}\;dx$$

Dengan metode substitusi x = 2 sin t didapat dx = 2 cos t dx

Untuk x = 2 maka t = $\frac{\pi}{2}$

Untuk x = 0 maka t = 0

Sehingga

$$= \frac{1}{9}\int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}\;dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [36\sqrt{(4-4\sin^2 t)} - 9(4\sin^2 t)\sqrt{(4-4\sin^2 t)}\;(2\cos t dt)$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [36(2\cos t) - 36(1-\cos^2 t)(2\cos t)]\;2\cos t\;dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2\cos t) - (1-\cos^2 t)(2\cos t)]\ 2\cos t\ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos^2 t - 4\cos^2 t + 4\cos^4 t)\ dt$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\ dt$$

Karena $\int \cos^m x\ dx = \dfrac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \dfrac{(m-1)}{m}\int \cos^{m-1} x\ dx$

Maka

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\ dt$$

$$= 16\left[\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

= $16\left(0 + \frac{3}{4}(0 + \frac{\pi}{4}\right)$-$16\left(0 + \frac{1}{2}.0\right)$

= 3π satuan isi

Volume bangun di atas dapat juga dilakukan dengan mengubah urutan tanda integrasi dxdy.

Dengan melakukan perubahan dA = dydx diperoleh

$$V = 4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{36-4y^2}{9}}} \frac{36 - 9x^2 - 4y^2}{36}\ dxdy$$

$$= \frac{4}{36}\int_0^3 \int_0^{\sqrt{\frac{36-4y^2}{9}}} 36 - 9x^2 - 4y^2\ dxdy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 \left[36x - 3x^3 - 4y^2 x\right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}} dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 36(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}) - 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}\right)^3 - 4y^2(\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2})dy$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 12\sqrt{36-4y^2} - \frac{1}{9}(36-4y^2)\sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{36-4y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 12\sqrt{36-4y^2} - 4\sqrt{36-4y^2} + \frac{4}{9}y^2\sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3}y^2\sqrt{36-4y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 (12-4)\sqrt{36-4y^2} + (\frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{3}y^2)\sqrt{36-4y^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 8\sqrt{4(9-y^2)} - \frac{8}{9}y^2\sqrt{4(9-y^2)}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^3 16\sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9}y^2\sqrt{9-y^2}dx$$

Dengan metode substitusi y = 3 sin t didapat dx = 3 cos t dx

Untuk x = 3 maka t = $\frac{\pi}{2}$

Untuk x = 0 maka t = 0

Sehingga

$$\frac{1}{9}\int_0^3 16\sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9}y^2\sqrt{9-y^2}dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16\sqrt{(9-9\sin^2 t)} - \frac{16}{9}(3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}]\,3\cos t\ dt$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16\sqrt{9(1-\sin^2 t)} - \frac{16}{9}(9\sin^2 t)\sqrt{9(1-\sin^2 t)}]\ (3\cos t\, dt)$$

$$= \frac{3}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [16(3\cos t) - 16(1-\cos^2 t)(3\cos t)]\ \cos t\ dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [48\cos t - 48\cos t + 48\cos^3 t]\cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 48\cos^4 t]\, dt \quad = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$$

Karena $\int \cos^m x\, dx = \frac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \frac{(m-1)}{m}\int \cos^{m-1} x\, dx$

Maka

$$16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$$

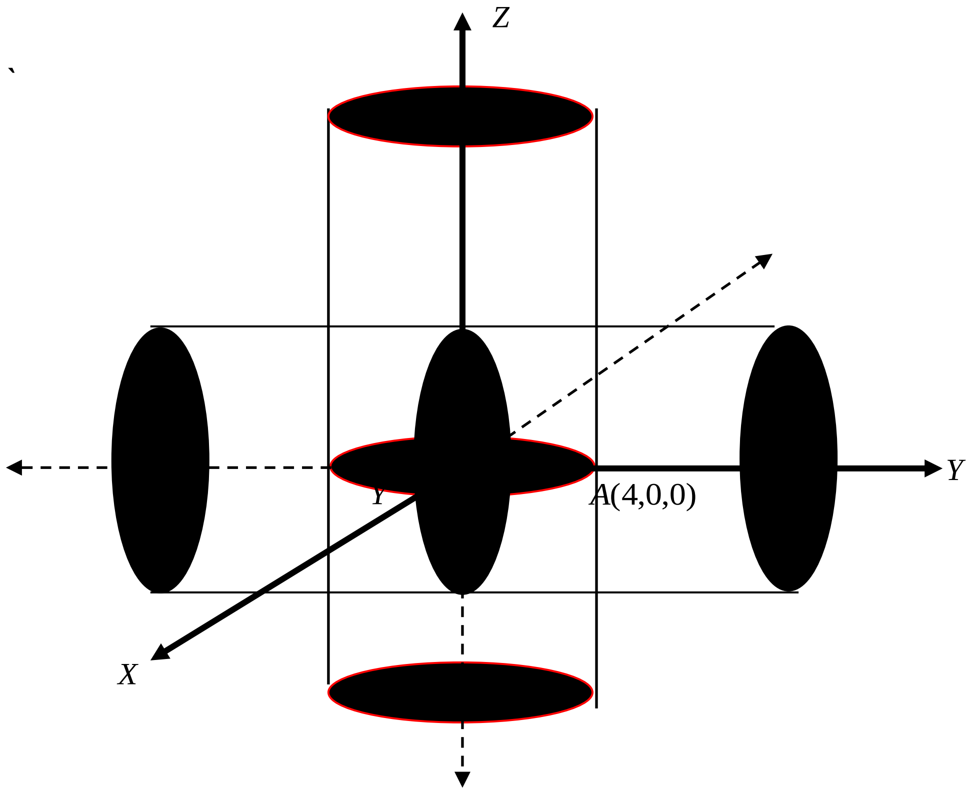
$$= 16\left[\frac{\sin t\cos^3 t}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 16\left(0 + \frac{3}{4}(0 + \frac{\pi}{4}\right) - (0) \;= 3\pi$$

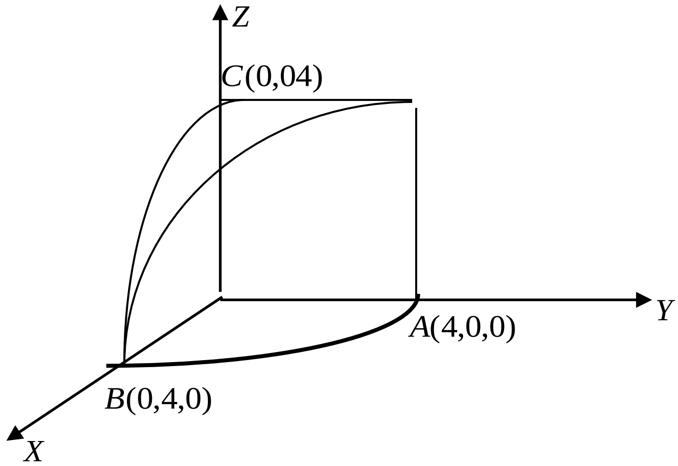
2. Carilah volume persekutuan silinder $x^2 + y^2 = 16$ dan $x^2 + z^2 = 16$

   Jawab

   Gambar silinder persekutuannya adalah:



Gambar di oktan I persekutuan silinder di atas adalah



$$V = \iint_R f(x,y)\, dA$$

$$= 2\int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\, dydx$$

$$= 8\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2}\, dydx$$

$$= 8\int_{0}^{4} \left(y\sqrt{16-x^2}\right)_0^{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$= 8\int^{4} \left(16-x^2\right) dx$$

$$= 8\left(16x - \frac{1}{3}x^3\right)_0^4$$

$= 8[(16.4-\frac{1}{3}4^3)-(16.0-\frac{1}{3}0)$

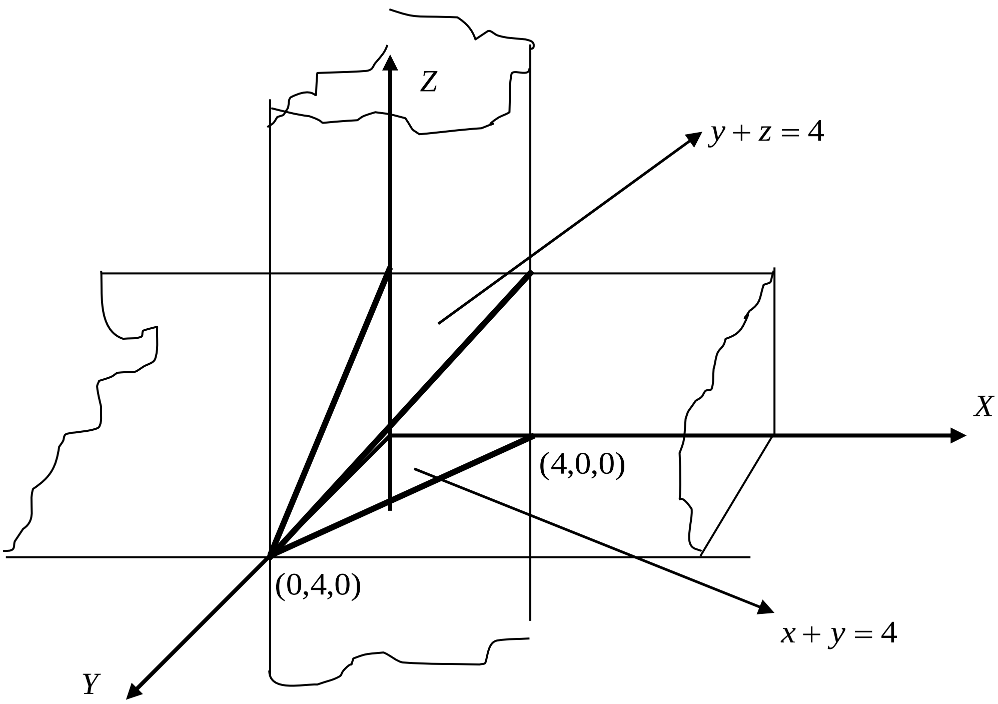
= 8(128/3)

$= \frac{1024}{3}$ *satuan isi*

3. Dengan menggunakan integral ganda dua, tentukan volume bangun ruang yang dibatasi oleh bidang z = 0, x + y = 4 dan y + z = 4

   Jawab

   Bangun persekutuan bidang seperti gambar berikut



$$V=\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$=\int_0^4\int_0^{4-y}4-y\;dxdy$$

$$=\int_0^4\left(4x-yx\right)_0^{4-y}dy$$

$$=\int_0^4 4(4-y)-y(4-y)dy$$

$$=\int_0^4(16-4y-4y+y^2)dy$$

$$=\int_0^4(16-8y+y^2)dy$$

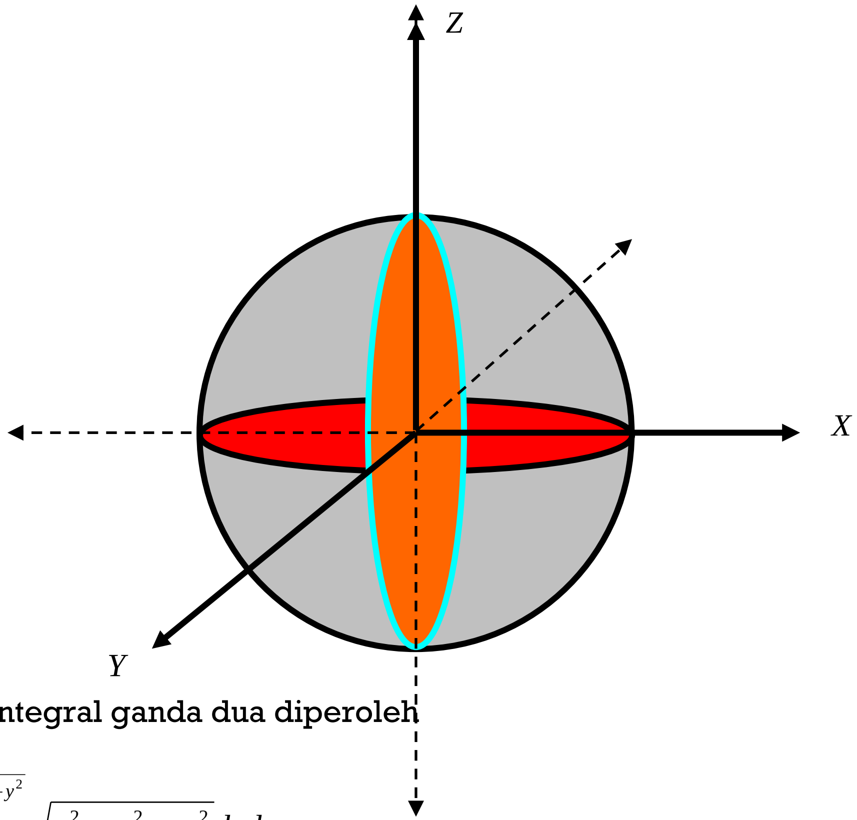
$$=\left[16y-\frac{8}{3}y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_0^4$$

$$=\left[16.4-\frac{8}{3}.4^2+\frac{1}{3}.4^3\right]-\left[16.0-\frac{8}{3}.0^2+\frac{1}{3}.0^3\right]$$

$$=64-\frac{128}{3}+\frac{64}{3}$$

4. Tentukan volume bola $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ menggunakan integral ganda dua.

Jawab



Dengan integral ganda dua diperoleh

$$V = 8\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$= 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - x^2}\, dxdy$$

Dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri diperoleh

x = $\sqrt{r^2 - y^2}\cos t$ **dan dx =** $\sqrt{r^2 - y^2}\sin t$

untuk x = 0 didapat t = dan untuk x = $\sqrt{r^2 - y^2}$ didapat t = $\frac{\pi}{2}$, sehingga

$$8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - x^2}\, dxdy$$

$$= 8\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r^2 - y^2) - (r^2 - y^2)\sin^2 t}\,(\sqrt{r^2 - y^2}\cos t) dy \quad = 8\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - y^2)\cos^2 t\; dtdy$$

$$= 8\int_0^2 (r^2 - y^2)\left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2}t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} dy$$

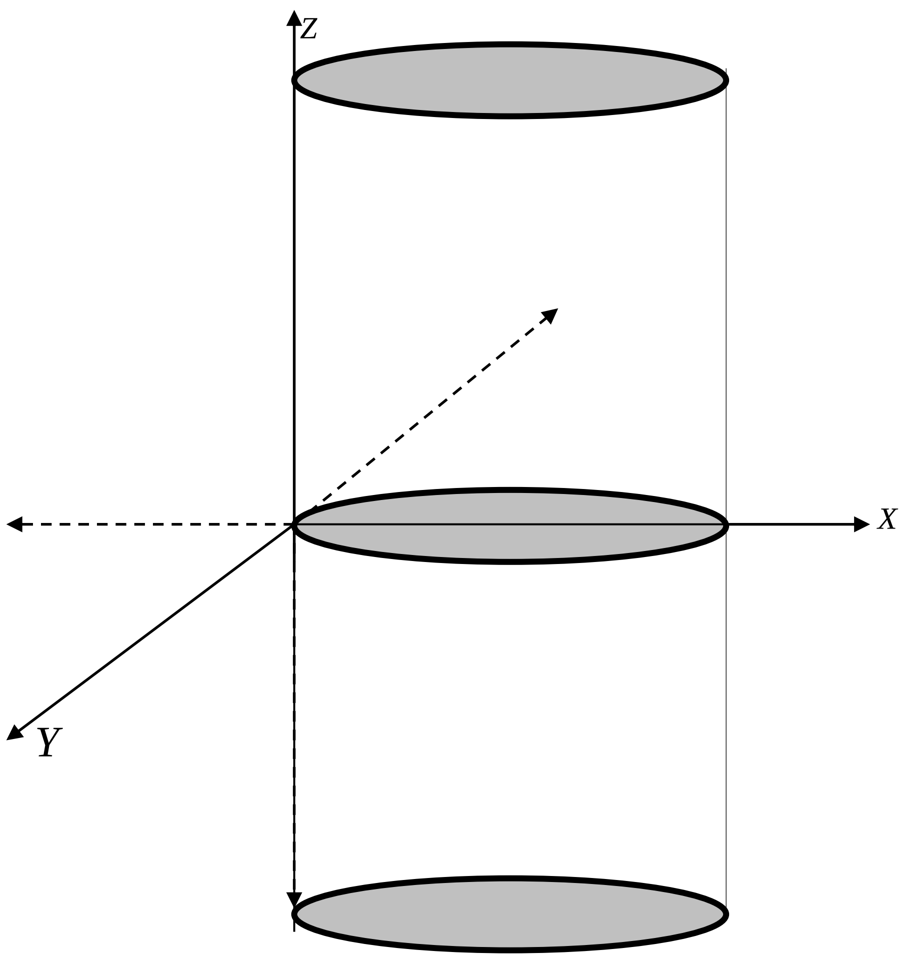
$$= 8.\frac{\pi}{4}\int_0^r (r^2 - y^2)dy$$

$$= 2\pi\left(r^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)_0^r = 2\pi\left(r^2 r - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5. Gambar kurva ruang $x^2 + y^2 = 4x$

Jawab

$$x^2 + y^2 = 4x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$



2 Aplikasi Integral Ganda Tiga

Integral ganda tiga sebagai perluasan integral ganda dua dinyatakan dalam bentuk umum

$$V = \iiint\limits_R dv$$

Sebagaimana telah dinyatakan pada bab III, bahwa integral ganda tiga dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius, koordinat silider, dan koordinat bola.

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius maka

$$V = \iiint\limits_R f(x,y,z)dv$$

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dv = \int\limits_{z_1=a}^{z_2=b} \int\limits_{y_1=y(z)}^{y_2=y(z)} \int\limits_{x_1=x(y,z)}^{x_2=x(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int\limits_{y_1=a}^{y_2=b} \int\limits_{z_1=z(y)}^{z_2=z(y)} \int\limits_{x_1=x(z,y)}^{x_2=x(z,y)} f(x,y,z)dxdzdy$$

atau

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dv = \int\limits_{z_1=a}^{z_2=b} \int\limits_{x_1=x(z)}^{x_2=x(z)} \int\limits_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int\limits_{x_1=a}^{x_2=b} \int\limits_{z_1=z(x)}^{z_2=z(x)} \int\limits_{y_1=x(z,x)}^{y_2=y(z,x)} f(x,y,z)dydzdx$$

atau

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dv = \int\limits_{x_1=a}^{x_2=b} \int\limits_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \int\limits_{z_1=z(y,x)}^{z_2=z(y,x)} f(x,y,z)dzdydx$$

$$= \int\limits_{y_1=a}^{y_2=b} \int\limits_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \int\limits_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Tabung maka

$$V=\iiint_R f(x,y,z)dv \quad \iiint_R f(r,\theta,z)\,dv=\int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta}\int_{r_1=\rho(\theta)}^{r_2=\rho(\theta)}\int_{z_1=z(r,\theta)}^{z_2=z(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Bola maka

$$V=\iiint_R f(x,y,z)dv$$

$$\iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\,dv=\int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta}\int_{\phi_1=\rho(\theta)}^{\phi_2=\rho(\theta)}\int_{\rho_1=\rho(\phi,\theta)}^{\rho_2=\rho(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

Selanjutnya integral ganda tiga dapat digunakan untuk menentukan volume (isi) bendan dan secara umum volume benda dengan menggunakan integal ganda tiga adalah

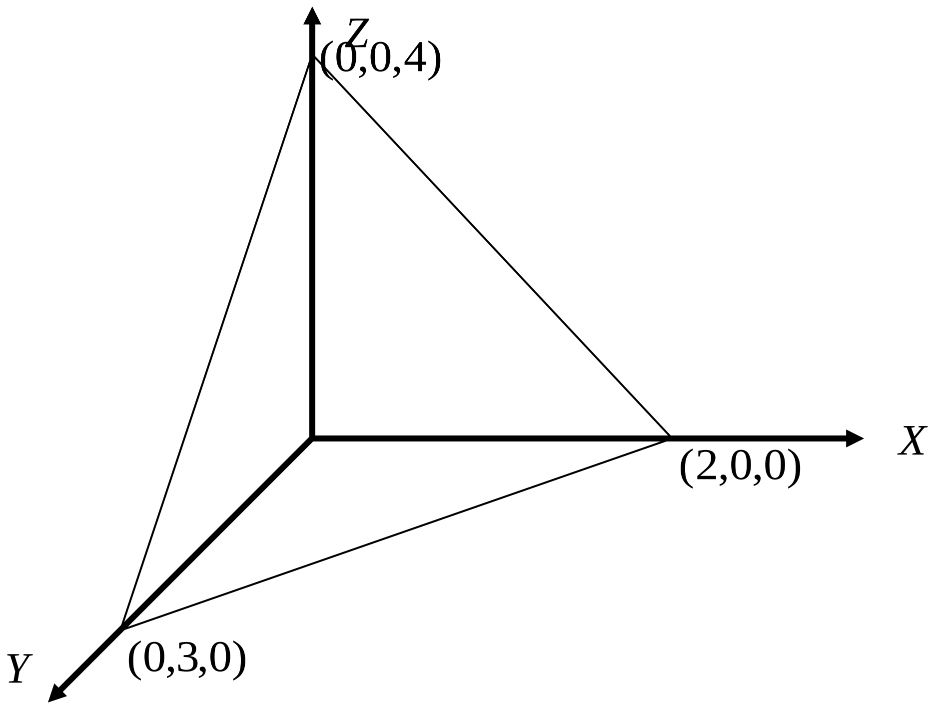
$$V=\iiint_R dv$$

dengan menganggap bahwa f(x,y,z)=1

Untuk perhitungan selanjutan dapat menggunakan koordinat Cartesius, koordinat tabung, atau koordinat bola.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

6. Dengan menggunakan integral ganda tiga tentukan Volume bangun yang dibatasi oleh $6x+4y+3z=12$



Volume Limas = $\frac{1}{3} Luas\ \ alas\ \ x\ tinggi$

= $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x.y).z$

= 4 SI

Dengan integral ganda tiga didapat

$$V = \iiint\limits_R dv$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} dzdxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} (12-6x-4y)dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12x - 3x^2 - 4yx\right]_0^{\frac{12-4y}{6}} dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12\left(\frac{12-4y}{6}\right) - 3\left(\frac{12-4y}{6}\right)^2 - 4y\left(\frac{12-4y}{6}\right)dy\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[2(12-4y) - \frac{1}{12}(144-96y+16y^2) - 8y + \frac{8}{3}y^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12 - 8y + \frac{4}{3}y^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(12y - 4y^2 + \frac{4}{9}y^3\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(12(3) - 4(3)^2 + \frac{4}{9}(3)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}(36 - 36 + 12) = 4$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Dengan menggunakan integral ganda dua hitunglah luas suatu luasan berikut ini:
   a. dibatasi oleh parabola $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$
   b. dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x,\ x^2 = 5 - 2y\ dan\ x = 0$
   c. di kuadran I dibatasi oleh $y^2 = 6x, y = 0, dan\ x = 6$
2. Tentukan volume berikut dengan menggunakan integral ganda tiga dalam koordinat tabung
   a. bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
   b. persekutuan silinder $x^2 + z^2 = 9$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$
   c. benda pejal yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,di bawah oleh z = 0 dan secara menyamping oleh $x^2 + y^2 = 4$