

PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDO KE-DUA

18.2 Persamaan Homogen Orde-Kedua

Suatu persamaan diferensial linear orde-kedua mempunyai bentuk

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x)$$

Dalam pasal ini, kita membuat dua anggapan penyederhana: (1) $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah konstanta, dan (2) $k(x)$ secara identik adalah nol (kasus homogen). Jadi tugas awal kita adalah menyelesaikan

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

Untuk menyelesaikan suatu persamaan orde-pertama diperlukan suatu pengintegralan dan menuju ke suatu penyelesaian umum dengan suatu konstanta sebarang. Dari analogi, kita boleh mengharap penyelesaian suatu persamaan orde-kedua mencakup dua pengintegralan dan karena ini penyelesaian umum akan mempunyai dua konstanta sebarang. Harapan kita benar. Nyatanya, suatu persamaan diferensial linear homogen orde-kedua selalu mempunyai dua penyelesaian fundamental $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang saling bebas satu sama lain (yakni, fungsi yang satu bukan kelipatan fungsi yang lainnya). Dari kelinearan operator $D^2 + a_1D + a_2$,

$$C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$$

adalah suatu penyelesaian juga. Tambahan pula, dapat ditunjukkan bahwa setiap penyelesaian mempunyai bentuk ini.

PERSAMAAN BANTU Karena $D_x(e^{rx}) = re^{rx}$, kelihatannya sangat mungkin bahwa e^{rx} akan merupakan suatu penyelesaian terhadap persamaan diferensial kita untuk suatu pilihan r yang sesuai. Untuk menguji kemungkinan ini, pertama kita tuliskan persamaan itu dalam bentuk operator

$$(1) \quad (D^2 + a_1D + a_2)y = 0$$

Sekarang

$$\begin{aligned} (D^2 + a_1D + a_2)e^{rx} &= D^2(e^{rx}) + a_1D(e^{rx}) + a_2e^{rx} \\ &= r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_2e^{rx} \\ &= e^{rx}(r^2 + a_1r + a_2) \end{aligned}$$

Ungkapan yang belakangan adalah nol, asal saja

$$(2) \quad r^2 + a_1 r + a_2 = 0$$

Persamaan (2) disebut **persamaan bantu** untuk (1) (perhatikan keserupaan dalam bentuk). Ia berupa suatu persamaan kuadrat biasa dan dapat diselesaikan dengan pemfaktoran atau jika perlu dengan Rumus Kuadrat. Terdapat tiga kasus yang ditinjau, berdasarkan terhadap apakah persamaan bantu mempunyai dua akar riil berlainan, akar tunggal berulang, atau akar-akar kompleks saling konjugat.

Teorema A

(Akar-akar riil berlainan). Jika r_1 dan r_2 berlainan, akar-akar riil persamaan bantu, maka penyelesaian umum $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

CONTOH 1 Tentukan penyelesaian umum dari $y'' + 7y' + 12y = 0$.

Penyelesaian Persamaan bantu

$$r^2 + 7r + 12 = (r + 3)(r + 4) = 0$$

mempunyai dua akar -3 dan -4 . Karena e^{-3x} dan e^{-4x} adalah penyelesaian bebas maka penyelesaian umum persamaan diferensial adalah

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$$

CONTOH 2 Tentukan penyelesaian dari $y'' - 2y' - y = 0$ yang memenuhi $y(0) = 0$ dan $y'(0) = \sqrt{2}$.

Penyelesaian Persamaan bantu $r^2 - 2r - 1 = 0$ paling baik diselesaikan memakai Rumus Kuadrat.

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Karena itu, penyelesaian umum terhadap persamaan diferensial ini adalah,

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

Syarat $y(0) = 0$ mensiratkan bahwa $C_2 = -C_1$. Maka

$$y' = C_1(1 + \sqrt{2})e^{(1+\sqrt{2})x} - C_1(1 - \sqrt{2})e^{(1-\sqrt{2})x}$$

sehingga,

$$\sqrt{2} = y'(0) = C_1(1 + \sqrt{2}) - C_1(1 - \sqrt{2}) = 2C_1\sqrt{2}$$

Kita simpulkan bahwa $C_1 = \frac{1}{2}$ dan

$$y = \frac{1}{2}e^{(1+\sqrt{2})x} - \frac{1}{2}e^{(1-\sqrt{2})x}$$

Ini semuanya baik jika persamaan bantu mempunyai akar-akar riil berlainan. Tetapi bagaimana jika ia mempunyai bentuk

$$r^2 - 2r_1r + r_1^2 = (r - r_1)^2 = 0$$

Maka metode kita menghasilkan penyelesaian fundamental tunggal e^{r_1x} dan kita harus mencari penyelesaian lain yang bebas dari penyelesaian ini. Penyelesaian yang demikian adalah xe^{r_1x} , seperti yang akan kita demonstrasikan sekarang.

$$\begin{aligned}(D^2 - 2r_1D + r_1^2)xe^{r_1x} &= D^2(xe^{r_1x}) - 2r_1D(xe^{r_1x}) + r_1^2xe^{r_1x} \\ &= (xr_1^2e^{r_1x} + 2r_1e^{r_1x}) - 2r_1(xr_1e^{r_1x} + e^{r_1x}) \\ &\quad + r_1^2xe^{r_1x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Teorema B

(Akar berulang). Jika persamaan bantu mempunyai akar tunggal berulang r_1 , maka penyelesaian umum terhadap $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ adalah

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$$

CONTOH 3 Selesaikan $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Penyelesaian Persamaan bantu mempunyai suatu akar berulang = 3. Jadi,

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$$

Akhirnya, kita tinjau kasus di mana persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat. Persamaan sederhana

$$(D^2 + \beta^2)y = 0$$

dengan persamaan bantu $r^2 + \beta^2 = 0$ dan akar-akar $\pm\beta i$ menawarkan suatu petunjuk. Penyelesaian-penyelesaian fundamentalnya secara mudah kelihatan berupa $\sin \beta x$ dan $\cos \beta x$. Anda dapat memeriksa dengan memakai penurunan langsung bahwa penyelesaian umum adalah sebagai berikut.

Teorema C

(Akar-akar kompleks saling konjugat). Jika persamaan bantu mempunyai akar-akar kompleks saling konjugat $\alpha \pm \beta i$, maka penyelesaian umum terhadap $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ adalah

$$y = C_1e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2e^{\alpha x} \sin \beta x$$

CONTOH 4 Selesaikan $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Penyelesaian Akar-akar persamaan bantu $r^2 - 4r + 13 = 0$ adalah $2 \pm 3i$. Karena itu penyelesaian umum adalah

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$$

PERSAMAAN ORDE LEBIH-TINGGI Semua yang telah kita lakukan meluas ke persamaan linear homogen orde lebih-tinggi dengan koefisien konstanta. Untuk menyelesaikan

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

tentukan akar-akar persamaan bantu

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

dan buat generalisasi dari kasus orde-kedua dengan jelas. Misalnya, jika persamaan bantu adalah

$$(r - r_1)(r - r_2)^3[r - (\alpha + \beta i)][r - (\alpha - \beta i)] = 0$$

maka penyelesaian umum terhadap persamaan diferensial ini adalah

$$y = C_1 e^{r_1 x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^{r_2 x} + e^{\alpha x} [C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x]$$

CONTOH 5 Selesaikan $\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^3 y}{dx^3} - 20 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

Penyelesaian Persamaan bantu adalah

$$r^4 - r^3 - 20r^2 = r^2(r - 5)(r + 4) = 0$$

dengan akar-akar -4 , 5 , dan suatu akar kembar 0 . Karena itu penyelesaian umum adalah

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{5x} + C_4 e^{-4x}$$

SOAL-SOAL 18.2

Dalam Soal 1–16, selesaikan persamaan diferensial.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' + 5y' - 6y = 0$
3. $y'' + 6y' - 7y = 0$; $y = 0$, $y' = 4$ pada $x = 0$.
4. $y'' - 3y' - 10y = 0$; $y = 1$, $y' = 10$ pada $x = 0$.
5. $y'' - 4y' + 4y = 0$
6. $y'' + 10y' + 25y = 0$
7. $y'' - 4y' + y = 0$
8. $y'' + 6y' - 2y = 0$
9. $y'' + 4y = 0$; $y = 2$ pada $x = 0$, $y = 3$ pada $x = \pi/4$.
10. $y'' + 9y = 0$; $y = 3$, $y' = 3$ pada $x = \pi/3$.
11. $y'' + 2y' + 2y = 0$
12. $y'' + y' + y = 0$

**SOAL- SOAL UANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN
SEBELUM BATASWAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN.**

**SOAL SOAL YANG ADA PADA AKHIR MATERI DIATAS YAITU ;
SOAL-SOAL 18.2 YAITU PADA NOMOR; 2. 3, 5, 8, 10 DAN 12**