METODA ELEMEN HINGGA

TORSI PADA PENAMPANG

BATANG NON-CIRCULAR

OLEH :

IR. A.A. Ketut Ngurah Tjerita, Msc

NIP : 19531231198602003

PROGRAM STUDI TEKNIK SIPIL

FAKULTAS TEKNIK

UNIVERSITAS UDAYANA

2018

KATA PENGANTAR

Hingga saat ini, masih dirasakan langkahnya perbendaharaan buku-buku berbahasa Indonesia mengenai Metoda Elemen Hingga yang dipergunakan di Fakultas Teknik Jurusan Teknik Sipil Universitas Udayana.

Sementara itu masih semakin terasa banyak problem mengenai metode elemen hingga yang timbul pada banyak analisa bangunan sipil di Indonesia, sedangkan tenag apengajar, apalagi tenaga teknisi menengah masih sedikit jumlahnya yang mengkhususkan perhatiannya terhadap masalah-masalah Elemen Hingga untuk keperluan Teknik Sipil.

Untuk membantu mengurangi masalah tersebut di atas, kami memprakarsai peterjamahan atau penulisan buu ini dari naskah aslinya yang ditulis dalam bahasa Inggris. Akhirnya kami ucapkan terima kish kepada semua pihak yang telah membantu tulisan ini, dengan harapan semoga bermanfaat bagi perkembangan pengetahuan Teknik Sipil di Indonesia.

Denpasar, April 2018

Penulis,

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

Pada umumnya, banyak masalah-masalah fisik yang dapat dinyatakan di dalam bentuk persamaan-persamaan differensial. Untuk dapat menyelesaikan masalah-masalah tersebut, maka harus diselesaikan persamaan-persamaan differensialnya. Cara yang terbaik untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan differensial adalah dengan penyelesaian secara analitik

Ada beberapa keadaan dimana penyelesaian secara analitik sulit didapatkan. Sebagai contoh, pada permasalahan suatu kontinum dengan batas-batas yang tidak teratur sehingga secara matematis syarat batas yang diperlukan tidak dapat ditentukan. Permaslaahan pada material anisotropic yang pada umumnya sulit untuk diselesaikan secara analitik karena analisis akan meliputi sejumlah persamaan yang bersifat non linier.

Suatu metode numerik dapat dipergunakan untuk mendapatkan penyelesaian secara pendekatan jika penyelesaian secara analitik tidak dapat dilakukan. Penyelesaian secara numerik akan menghasilkan harga-harga pada titik-titik diskrit yang ditinjau.

Ada beberapa metode untuk mendapatkan penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan differensial. Pada dasarnya metoda-metoda numerik ini merubah persamaan differensial menjadi suatu sistem persamaan aljabar., dan kemudian menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Salah satu metoda numerik yang akan dibahas disini adalah metoda elemen hingga (*finite element method*)

II. METODE ELEMEN HINGGA

Metoda elemen hingga banyak dipergunakan untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan dari masalah-masalah fisik, khususnya yang berhubungan dengan suatu kontinum. Sebagai contoh adalah masalah perambatan panas (*head transfer*), mekanika fluida (*fluide mechanic*) dan mekanika benda padat (*colid mechanic*)

Metoda elemen hingga ini mengkombinasikan beberapa konsep matematika untuk mendapatkan suatu sistem persamaan linier atau non linier.

Ada dua karakteristik dari metoda ini yang memberdakan dengan metoda-metoda numerik lainnya yaitu :

1. Metoda ini menggunakan formulasi integral untuk mendapatkan sistem persamaan aljabar.
2. Metode ini menggunakan "*continuous piecewise smooth function*" untuk mendekati parameter-parameter yang tidak diketahui.

Metode elemen hingga pada dasarnya dibagi menjadi lima langkah penyelesaian yaitu :

1. Diskritisasi daerah/kontinum yang ditinjau. Hal ini meliputi penentuan lokasi dan koordinat-koordinat serta penomoran dari titik-titik nodal (*node points*).
2. Tentukan persamaan interpolasi dan nyatakan persamaan ini didalam harga-harga dari titik-titik nodal yang tidak diketahui untuk tiap-tiap elemen.

3. Susun sistem persamaan untuk seluruh elemen dengan menggunakan *metoda Galerkin* atau *metoda energi potensial*.
4. Selesaikan sistem persamaan ini untuk mendapatkan harga-harga parameter dari tiap titik nodal.
5. Hitung besaran-besaran yang akan ditentukan.

   Besaran-besaran ini pada umumnya merupakan turunan dari parameter yaitu komponen-komponen tegangan, rambatan panas dan kecepatan aliran.

Karena jumlah persamaan pada umumnya adalah cukup besar, maka perhitungan dengan metoda ini perlu dilakukan dengan menggunakan komputer. Metoda elemen hingga menjadi tidak praktis jika tidak tersedia komputer dengan kemampuan yang cukup.

Metode elemen hingga mudah dipergunakan pada masalah-masalah kontinum dengan bentuk yang tidak teratur dan terdiri dari material yang berbeda. Metoda ini dapat juga dipergunakan pada m asalah “*steady state*” dan “*time dependent*” serta untuk masalah-masalah dengan sifat material yang non linier.

Pada saat ini banyak paket-paket program metoda elemen hingga tersedia untuk menyelesaikan masalah-masalah dua dimensi atau tiga dimensi. Untuk masalah dua dimensi, pada umumnya program-program tersebut menggunakan elemen segitiga atau elemen segi empat atau generalisasi dari kedua elemen tersebut.

Pada bagian selanjutnya akan dibahas formulasi dari elemen segitiga dan elemen segi empat yang bersifat linier serta penggunaan dari elemen-elemen tersebut untuk suatu masalah fisik.

III. ELEMEN SEGITIGA DAN ELEMEN SEGIEMPAT LINIER

Elemen segitiga dan elemen segi empat yang ditinjau disini adalah merupakan elemen-elemen dua dimensi. Elemen-elemen ini banyak dipergunakan pada program-program metoda elemen hingga karena elemen-elemen ini mempunyai formulasi persamaan yang sederhana. Kedua elemen ini dapat dipergunakan pada analisis suatu kontinum dengan batas-batas yang tidak teratur.

III. 1 Elemen Segitiga

Suatu elemen segitiga linier diperlihatkan pada Gambar 1. Elemen ini mempunyai sisi-sisi yang lurus dan titik-titik nodal pada tiap ujungnya. Persamaan interpolasi untuk elemen ini adalah :

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_{2x} + \alpha_{sy} \qquad (3.1)$$

Dimana persamaan ini merupakan polinomial linier karena terdiri dari suatu konstanta α_1 dan fungsi-fungsi x serta y.

Sebagai akibat dari penggunaan persamaan interpolasi tersebut, elemen ini dapat dipergunakan untuk semua arah sistem koordinat bidang x-y.

Harga ϕ pada titik-titik nodal i, j dan k adalah Φ_i, Φ_j dan Φ_k sedangkan koordinat-koordinatnya adalah (X_i, Y_i), (X_j, Y_j), dan (X_k, Y_k). Kondisi batas pada titik-titik nodal

$\phi = \Phi_i$, untuk $x = X_i$, $y = Y_i$

$\phi = \Phi_j$, untuk $x = X_j$, $y = Y_j$

$\phi = \Phi_k$, untuk $x = X_k$, $y = Y_k$

Substitusi harga-harga ini ke dalam (3.1), akan didapat suatu sistem persamaan linier yaitu :

$$\Phi_i, = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i$$

$$\Phi_j, = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j$$

$$\Phi_k, = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k \qquad (3.2)$$

Dari (3.2) akan didapat harga-harga α_1, α_2, dan α_3 yaitu :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j)\, \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k)\, \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i)\, \Phi_k]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k)\, \Phi_i + (Y_k - Y_i)\, \Phi_j + (Y_i - Y_j)\, \Phi_k]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - Y_j)\, \Phi_i + (X_i - X_k)\, \Phi_j + X_j - X_i)\, \Phi_k]$$

Dimana determinan :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & Y_i \\ 1 & x_j & Y_j \\ 1 & x_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \qquad (3.3)$$

A adalah luas dari elemen segitiga.

Substitusi harga-harga α_1, α_2 dan α_3 pada (3.1) akan didapat :

$$\phi = N_i\, \Phi_i + N_j\, \Phi_j + N_k\, \Phi_k \qquad (3.4)$$

Dimana :

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \qquad (3.5)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \qquad (3.6)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \qquad (3.7)$$

Dan

$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$ $\quad b_i = Y_j - Y_k$ $\quad c_i = X_k - X_j$

$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$ $\quad b_i = Y_j - Y_k$ $\quad c_i = X_k - X_j$

$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j$ $\quad b_i = Y_j - Y_k$ $\quad c_i = X_k - X_j$

N_i N_j dan N_k adalah fungsi-funsi bentuk (*shape functions*) dari elemen segitiga.

III.2 Elemen Segiempat

Suatu elemen segiempat linier diperlihatkan ada Gambar 2. Elemen segiempat mempunyai panjang 2b dan lebar 2a.

Persamaan interpolasi untuk elemen ini adalah :

$$\phi = C_1 + C_{2x} + C_{3y} + C_{4xy} \tag{3.8}$$

Persamaan interpolasi di atas hanya mempunyai satu dari tiga kemungkinan untuk term pada orde kedua (*second order*) yaitu xy. Elemen ini tidak dapat dipergunakan untuk semua arah yang sembarang pada koordinat bidang x-y karena term x^2 dan y^2 tidak terdapat pada persamaan interpolasi di atas. Sisi-sisi elemen segiempat harus selalu sejajar dengan sumbu x dan sumbu y.

Persamaan interpolasi (3.8) dapat ditulis dalam koordinat lokal s dan t.

$$\phi = C_1 + C_{2s} + C_{3t} + C_{4st} \tag{3.9}$$

Dengan menggunakan koordinat lokal ini, fungsi bentuk dari elemen segiempat dapat lebihi mudah dievaluasi.

Seperti halnya pada elemen segitiga, koefisien-koefisien C_1, C_2, C_3 dan C_4 pada (3.9) dapat ditentukan dengan menggunakan harga-harga ϕ dari titik-titik nodal pada koordinat sistem s-t. Dari langkah di atas akan didapat empat persamaan yaitu :

$\Phi_i \quad = C_1$

$\Phi_j \quad = C_1 = (2b)\ C_2$

$\Phi_k \quad = C_1 = (2b)\ C_2 + (2a)\ C_3 + (4ab)\ C_4$ (3.10)

$\Phi_m \quad = C_1 = (2a)\ C_3$

Solusi dari persamaan di atas akan menghasilkan

$C_1 \quad = \Phi_i$

$C_2 \quad = 1/2b\ (\Phi_j - \Phi_i)$

$C_3 \quad = 1/2a\ (\Phi_m - \Phi_i)$ (3.11)

$C_4 \quad = 1/4a\ (\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m)$

Substitusi (3.11) ke dalam (3.9) akan didapat

$\phi = N_i\Phi_i + N_j\Phi_j + N_k\Phi_k + N_m\Phi_m$ (3.12)

Dimana :

$N_i \quad = (1 – s/2b)\ (1 – t/2a)$

$N_j \quad = s/2b\ (1 – t/2a)$ (3.13)

$N_k \quad = st\ /\ 4ab$

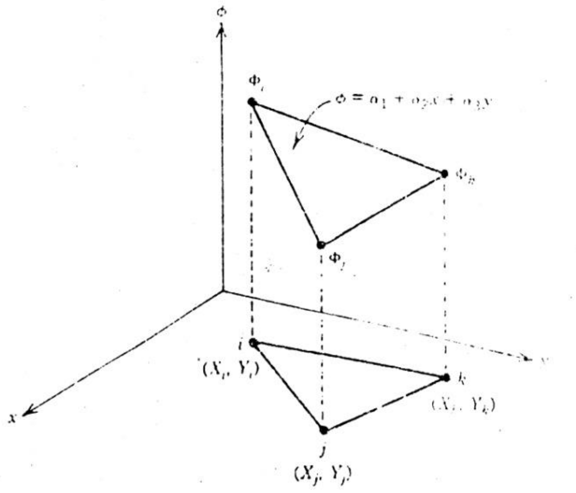
$N_m \quad = t/2a\ (1 – s/2b)$

Adalah fungsi-fungsi bentuk dari elemen segiempat.

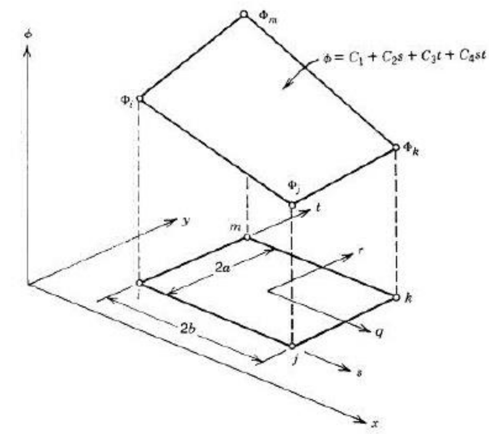
Fungsi bentuk dari elemen segitiga dan elemen segiempat ini adalah merupakan suatu parameter yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah mekanika solid atau persamaan differensial dengan metoda elemen hingga.

Sifat yang penting dari fungsi bentuk dari elemen segitiga dan elemen segiempat adalah bahwa fungsi bentuk berubah secara linier sepanjang sisi diantara dua titik nodal. Sebagai contoh pada elemen segeiempat, N_i berubah secara linier sepanjang sisi i-j dan sisi i-m.

Perubahan harga ϕ yang bersifat linier disepanjang sisi elemen segitiga dan elemen segiempat mempunyai arti bahwa kedua elemen ini bersifat kompatibel (*compatible*) antara satu dengan yang lainnya. Dengan demikian kedua elemen ini dapat dipergunakan secara bersama pada analisis suatu masalah dengan metoda elemen hingga.



Gambar 1 Parameter-Parameter elemen segitiga linier



$$\phi = C_1 + C_2 s + C_3 t + C_4 st$$

Gambar 2. Parameter-parameter elemen segiempat bilinier

IV. PERSAMAAN DIFFERENSIAL TORSI PADA PENAMPANG NON CIRCULAR

Pada tulisan ini akan ditinjau penggunaan metoda elemen hingga pada masalah torsi dari batang dengan penampang yang tidak berbentuk lingkaran (non circular sections).

Persamaan differensial dari penampang batang non circular yang mengalami torsi adalah bentuk khusus dari prsamaan medan dua dimensi. Persamaan medan dua dimensi dinyatakan oleh :

$$Dx\ \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + Dy\,\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} - G\phi + Q = 0 \qquad (4.1)$$

Persamaan differensial untuk penampang batang non circular yang mengalami torsi adalah :

$$\frac{1}{g}\ \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\ \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} + 2\theta = 0 \qquad (4.2)$$

Dimana g adalah modulus geser dari material dan θ adalah sudut putar penampang persatuan panjang.

Persamaan (4.2) didapt dari (4.1) dengan Dx = Dy = 1/g, G = 0 dan Q = 2θ. Variabel ϕ adalah fungsi tegangan (*stress function*) dan tegangan-tegangan geser (*shear stresses*) didalam penampang merupakan turunan dari ϕ terhadap x dan y.

Selain masalah torsi, persamaan (4.1) dapat juga digunakan pada beberapa macam masalah fisik antara lain ; masalah mekanika fluida, masalah perambatan panas dan masalah perambatan gelombang pada fluida.

Untuk dapat menyelesaikan persamaan differensial di atas dengan metoda elemen hingga, maka perlu terlebih dahulu disusun persamaan-

persamaan integral dari elemen-elemen dalam bentuk matrix. Pada dasarnya penyelesaian masalah persamaan differensial secara pendekatan dengan metoda elemen hingga adalah penyelesaian suatu sistem persamaan linier simultan yang disusun berdasarkan perhitungan dari sumbangan tiap-tiap elemen (*element's constribution*) dan menempatkan harga-harga ini pada posisi yang tepat didalam sistem persamaan.

Matrix-matrix elemen yang diperlukan untuk menganalisis persamaan differensial adalah matrix kekakuan element (*element stiffness matrix*) dan vektor gaya elemen (*element force vector*).

Suatu metoda untuk menyusun matrix elemen adalah dengan menggunakan metoda dari Galerkin. Pada prinsipnya cara Galerkin ini menggunakan metoda "*Weighted Residual*" yaitu suatu cara pendekatan untuk mendapatkan solusi numberik dari persamaan differensial. Pada metoda ini suatu penyelesaian pendekatan disubstitusikan ke dalam persamaan differensial. Jika penyelesaian pendekatan ini tidak memenuhi persamaan, akan terdapat suatu hasil kesalahan atau "residual".

Bentuk rumus dari metoda "Weighted Residual" adalah :

$$\int_o^H W_i\ (x)\ \ R(x)\ dx\ = 0 \qquad (4.3)$$

"Residual" R(x) dikalikan dengan suatu "weighting function" Wi(x) dan integral dari perkalina ini harus sama dengan nol.

Suatu sistem persamaan linier dapat dibentuk dari evaluasi integral di atas dengan menggunakan "weighting function" yang baru untuk tiap titik nodal dimana ϕ tidak diketahui.

Untuk mendapatkan rumus persamaan elemen hingga dari persamaan differensial, Galerkini menggunakan metoda “weighted residual” dengan “weighting function” disusun berdasarkan fungsi-fungsi bentuk dan elemen. Jadi pada metode Galerkin ini, “weighting function” untuk titik nodal ke n yaitu Wn, terdiri dari fungsi-fungsi bentuk yang berhubungan dengan titik nodal ke n.

IV.1 Persamaan Integral Matrix Elemen

Dengan menggunakan metoda dari Galerkin tersebut di atas, maka dapat disusun persamaan integral dari elemen-elemen matrix yang selanjutnya persamaan ini akan dipergunakan untuk menurunkan rumus-rumus dari metode elemen hingga.

Sumbangan suatu elemen pada sistem persamaan dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$(R^{10}) = - \int_A [N]^T \left(Dx \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \mathrm{Dy} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} - G\emptyset + Q \right) dA \qquad (4.4)$$

Dimana (N) adalah vektor baris dari fungsi-fungsi bentuk elemen.

Turunan kedua pada (4.4) dapat digantikan dengan menggunakan rumus perkalian dari differensial. Tujuan suatu fungsi :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([\,N\,]^T \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \right) \qquad (4.5)$$

Differensiasi (4.5) akan memberikan

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([\,N\,]^T \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \right) = [\mathrm{N}]^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial\, [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \qquad (4.6)$$

Substitusi $[N]^T \partial^2 \phi / \partial^2{}_x$ ke (4.4) dan disusun lagi akan menghasilkan :

$$- \int_A [N]^T Dx \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} \mathrm{dA} = - \int_A Dx \frac{\partial}{\partial x} \left([\,\mathrm{N}\,]^{\mathrm{T}} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \right) dA$$

$$= - \int_A Dx \ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} dA \qquad (4.7)$$

Integral pertama pada bagian kanan dari (4.7) dapat dirubah dengan suatu integral di sekeliling batas dengan menggunakan teori dari Green. Penggunaan teori ini akan menghasilkan :

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x} [N]^T \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \, dA = \int_\Gamma [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta \, d\Gamma \qquad (4.8)$$

Dimana θ adalah "angle to the outward normal" dan Γ adalah "element boundary". Substitusi (4.8) ke dalam (4.7) akan didapatkan hubungan untuk turunan kedua yaitu :

$$- \int_A [N]^T \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} \, dA = - \int_\Gamma Dx \, [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta \, d\Gamma$$

$$+ \int_A Dx \frac{[N]^T}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} dA \qquad (4.9)$$

Dengan cara yang sama seperti prosedur di ats, untuk fungsi ;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

Akan didapat :

$$- \int_A Dy \, [N]^T \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} \, dA = - \int_\Gamma Dy \, [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \sin \theta \, d\Gamma$$

$$+ \int_A Dy \frac{[N]^T}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial y} dA \qquad (4.10)$$

Substitusi (4.9) dan (4.10) ke dalam (4.4) akan didapat :

$$(R^{10}) = - \int_\Gamma [N]^T \left(Dx \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \theta + \mathrm{Dy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \theta \right) d\Gamma$$

$$+ \int_A Dx \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} + Dy \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial \emptyset}{\partial x} \mathrm{dA}$$

$$+ \int_A G [\, N \,]^T \phi \, dA - \int_A Q [\, N \,]^T \, dA \qquad (4.11)$$

Substitusi persamaan $\phi^{(Q)} = [\, N \,] \{\Phi^{(Q)}\}$ (4.12)

Ke dalam (4.14) akan didapat :

$$\{R^Q\} = - \int_\Gamma [N]^T \left(Dx \ \frac{\partial \phi}{\partial x} \ \cos\theta + \text{Dy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin\theta \right) d\Gamma$$

$$+ \left(\int_A \left(Dx \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \ \frac{\partial [N]}{\partial x} \ + \ Dy \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \ \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \right) dA \, \{\Phi^{(Q)}\}$$

$$+ \left(\int_\Gamma G \, [N]^T \, [N] dA \right) \{\Phi^{(Q)}\} - \int_\Gamma Q \, [N]^T \, dA \qquad (4.13)$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk umum.

$$\{R^{(Q)} = \{I^{(Q)}\} + [k^{(Q)}] \, \{\Phi^{(Q)}\} - \{f^{(Q)}\} \qquad (4.14)$$

Dimana

$$\{I^{(Q)}\} = - \int_\Gamma [N]^T \left(Dx \ \frac{\partial \phi}{\partial x} \ \cos\theta + \text{Dy} \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin\theta \right) d\Gamma \qquad (4.15)$$

$$[k^{(Q)}] = \left(\int_A \left(Dx \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \ \frac{\partial [N]}{\partial x} \ + \ Dy \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \ \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \right) dA$$

$$+ \left(\int_A G \, [N]^T \, [N] dA \right) \qquad (4.16)$$

$$\{f^{(Q)}\} = \int_A G \, [N]^T \, dA \qquad (4.17)$$

Integral pertama pada (4.16) dapat ditulis dalam notasi matrix

$$[\ D\ ] = \begin{bmatrix} Dx & 0 \\ 0 & Dy \end{bmatrix} \qquad (4.18)$$

Vektor gradien t

$$\{\ gv\ \} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} \\ \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi^{(Q)}\} = [\ B\ ] \, \{\Phi^{(Q)}\} \qquad (4.19)$$

Transpose dari matrix [B] akan menghasilkan :

$$[\ B\ ]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial x} & \frac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (4.20)$$

Dengan (4.18), (4.19) dan (4.20), matrix kekakuan $[k^{(Q)}]$ pada (4.16) dapat ditulis sebagai berikut :

$$[k^{(Q)}] = \int_A [\ B\ ]^T \, [\ D\ ] \ [\ B\ ] dA + \int_A G \, [\ N\ ]^T \, [\ N\ ] \ dA \qquad (4.21)$$

Atau dapat ditulis :

$$[k^{(Q)}] = [k_D^{(Q)}] + [k_G^{(Q)}] \qquad (4.22)$$

IV.2 Matrix Elemen Segitiga

Dengan menggunakan fungsi bentuk dan persamaan-persamaan diatas, matrix kekakuan $[k^{(Q)}]$ dan vektor gaya $[f^{(Q)}]$ dari elemen segitiga dapat dievaluasi.

Variabel ϕ pada suatu elemen segitiga dapat ditentukan oleh persamaan :

$$\phi^{(Q)} = [N_i \; N_j \; N_k] \, \{\Phi^{\{Q\}}\} \qquad (4.23)$$

Dimana :

$$N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_{ix} + c_{iy}]$$

$$N_j = \frac{1}{2A}[a_j + b_{jx} + c_{jy}]$$

$$N_k = \frac{1}{2A}[a_k + b_{kx} + c_{ky}]$$

Vektor gradient untuk elemen segitiga adalah :

$$\{gv\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Phi^{\{Q\}}\} \qquad (4.24)$$

Atau

$$\{gv\} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\{\Phi^{\{Q\}}\} = [\,B\,]\,\{\Phi^{\{Q\}}\} \qquad (4.25)$$

Matrix [B] pada (4.25) terdiri dari konstanta-konstanta, sedangkan matrix [D] pada (4.18) terdiri dari koefisien-koefisien materil Dx dan Dy.

Integral pertama pada (4.21) dapat dengan mudah dievaluasi.

$$[k_D^{(Q)}] = \int_A [\,B\,]^T [\,D\,] \; [\,B\,] dA + [\,B\,]^T [\,D\,] \; [\,B\,] \int_A dA$$

$$[k^{(Q)}] = [B]^T [D] [B] A \qquad (4.26)$$

Solusi dari perkalian matrix ini adalah :

$$[k_D^{(Q)}] = \frac{Dx}{4A} \begin{bmatrix} {b_i}^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & {b_j}^2 & b_i b_k \\ b_i b_k & b_j b_k & {b_k}^2 \end{bmatrix} + \frac{Dx}{4A} \begin{bmatrix} {c_i}^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c^2 & c_i c_k \\ c_i c_k & c_j c_k & {c_k}^2 \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

Integral kedua pada (4.21) mengandung fungsi-fungsi bentuk. Jika diasumsikan bahwa G mempunyai harga yang konstan di dalam elemen, maka integral ini akan menjadi :

$$[k_D^{(Q)}] = \int_A G [N]^T [N] dA = G \int_A \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} [N_i \; N_j \; N_k]$$

$$= G \int_A \begin{bmatrix} {N_i}^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_i N_j & {N_j}^2 & N_i N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & {N_k}^2 \end{bmatrix} dA \qquad (4.28)$$

Solusi dari integral ini akan memberikan :

$$[k_D^{(Q)}] = \frac{GA}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.29)$$

Matrix kekakuan elemen $[k_D^{(Q)}]$ untuk elemen segitiga adalah dari (4.27) dan (4.29)

Vektor gaya elemen $\{f^{(Q)}\}$ pada (4.17) juga mengandung fungsi-fungsi bentuk, evaluasi dari persamaan ini dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti halnya pada evaluasi $[k_D^{(Q)}]$.

Dengan mensubstitusikan fungsi-fungsi bentuk ke dalam (4.17) dan menganggap bahwa harga Q konstan, akan didapat :

$$\int_A Q [N]^T dA = Q \int_A \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} dA$$

Solusi dari persamaan ini akan memberikan harga dari vektor gaya elemen segitiga yaitu :

$$[f^{(Q)}] = \frac{QA}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad (4.30)$$

IV.3 Matrix Element Segiempat

Evaluasi dari matrix-matrix elemen untuk elemen segiempat dilakukan dengan menggunakan fungsi-fungsi bentuk pada (3.13). Karena sistem koordinasi s-t sejajar dengan sistem koordinat x-y dan suatu satua panjang pada sumbu s atau t adalah sama dengan pada sumbu x atau y maka persamaan integral dari kedua sistem koordinat dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\int_A f\,(x,y)dx\,dy = \int_A f\,(s,t)ds\,dt \qquad (4.31)$$

Hubungan turunan antara kedua sistem koordinat yang didapat dengan menggunakan rumus dari "chain rule" yaitu :

$$\frac{\partial\,N\beta}{\partial x} = \frac{\partial\,N\beta}{\partial s} \text{ dan } \frac{\partial\,N\beta}{\partial y} = \frac{\partial\,N\beta}{\partial t} \qquad (4.32)$$

Evaluasi vektor gaya ($f^{(Q)}$) dari elemen dapat dilakukan sebagai berikut :

$$[f^{(Q)}] = \int_A Q\,[\,N\,]^T\,dA = \int_o^{2b} \int_o^{2a} Q\begin{bmatrix}N_i\\N_j\\N_k\\N_m\end{bmatrix} dt\ \ ds$$

Tinjau integral di atas untuk koefisien ketiga Nk,

$$\int_o^{2b} \int_o^{2a} Nk\;dt\;ds = \int_o^{2b} \int_o^{2a} \frac{st}{4ab}\;dt\;ds$$

$$\int_o^{2b} \frac{st^2}{8ab} \Big|_o^{za} ds = \int_o^{2b} \frac{as}{2b} \; ds = \frac{A}{4}$$

Untuk ketiga integrasi dari koefisien N_i, N_j, dan N_m ; akan didapat harga yang sama dengan N_k, sehingga vektor gaya dari elemen segiempat adalah :

$$[f^{(Q)}] = \frac{QA}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

Evaluasi dari matrix $[k_G^{(Q)}]$ adalah sebagai berikut :

$$[k_G^{(Q)}] = G \int_A [\,N\,]^T \; dA$$

$$= G\int_A \begin{bmatrix} {N_i}^2 & N_iN_j & N_iN_k & N_iN_m \\ N_iN_j & {N_i}^2 & N_jN_k & N_jN_m \\ N_iN_k & N_jN_k & {N_k}^2 & N_kN_m \\ N_iN_m & N_jN_m & N_kN_m & {N_m}^2 \end{bmatrix} \text{ dA}$$

Dengan menyelesaikan persamaan integral di atas akan didapat :

$$[k_G^{(Q)}] = \frac{GA}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Evaluasi dari matrix $[k_D^{(Q)}]$ meliputi turunan dari fungsi-funsi bentuk. Matrix gradient [B] adalah :

$$[\,B\,] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Dengan menggunakan persamaan pada (4.32), matrik [B] dapat dinyatakan dalam sistem koordinat s – t.

Turuan dari fungsi-fungsi bentuk akan menghasilkan :

$$[\,B\,] = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2b-s) & -s & s & (2b-s) \end{bmatrix} \qquad (4.36)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.26), akan didapat harga untuk matrix $[k_D^{(Q)}]$ yaitu :

$$[k_D^{(Q)}] = \frac{Dxa}{6b}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{Dyb}{6a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.37)$$

Matrix kekakuan $[k^{(Q)}]$ untuk elemen segiempat adalah jumlah dari (4.34) dan (4.37).

V. TORSI PADA PENAMPANG BATANG NON CIRCULAR

Matrix Kekakuan dan vektor gaya untuk elemen-elemen segitiga dan segiempat telah dievaluasi pada bagian sebelumnya. Pada bagian ini akan dibahas mengenai penggunaan dari elemen-elemen segitiga dan segiempat pada metode beda hingga untuk mendapatkan solusi numerik dari tegangan-tegangan geser di dalam suatu penampang non circular yang mengalami torsi.

V.1 Torsi Dasar

Pada dasarnya ada dua teori yang dapat dipergunakan untuk menghitung tegangan-tegangan geser yang terjadi pada penampang yang non circular akibat torsi, yaitu teori dri St. Venant dan teori dari Prandtl. Pada pembahasan disini akan dipergunakan teori dari Prandtl.

Komponen-komponen dari tegangan geser pada suatu penampang akibat suatu beban torsi T yang bekerja pada sumbu z (Gambar 3a) dapat dihitung dari persamaan.

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \text{ dan } \tau_{zy} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (5.1)$$

Dimana ϕ (x,y) adalah fungsi tegangan (stress function).

Persamaan differensial untuk penampang batang noncircular yang mengalami torsi adalah :

$$\frac{1}{g}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 2\theta = 0 \qquad (5.2)$$

Dengan syarat batas (boundary condition) $\phi = 0$.

Parameter fisik pada (5.2) adlaah g, yaitu modulus geser (N/cm^2) dan θ, yaitu sudut putar persatuan panjang (rad/cm).

Teori dari Prandt tidak memasukkan momen torsi T (N/cm) pada persamaan differensial. Harga momen torsi T ini akan dihitung setelah harga ϕ (x,y) diketahui dengan menggunakan persamaan.

$$T = 2 \int_A \phi \, dA \qquad (5.3)$$

Fungsi tegangan ϕ akan merupakan suatu permukaan yang menutup penampang batang (Gambar 3b).

Momen torsi T akan sebanding dengan volume di bawah permukaan, sedangkan tegangan-tegangan geser berhubugan dengan gradient permukaan pada arah koordinat x dan y.

Persamaan differensial (5.2) sering ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2g\theta = 0 \qquad (5.4)$$

Persamaan ini ditetapkan dari (4.1) dengan memasukkan harga-harga Dx = Dy = 1, G = 0, dan Q = 2gθ

V.2 Matrix Kekakuan Elemen

Matrix kekakuan elemen untuk masalah torsi dapat ditentukan dari persamaan (4.22) yaitu :

$$[k^{(Q)}] = [k_D^{(Q)}] + [k_G^{(Q)}] \qquad (5.6)$$

Untuk G = 0, maka matrix $[k_G^{(Q)}] = 0$, sehingga matrix kekakuan elemen menjadi :

$$[k^{(Q)}] = [k_D^{(Q)}] \qquad (5.7)$$

Dengan harga Dx = Dy = 1 dan Q = 2gθ, maka matrix kekakuan elemen segitiga :

$$[k^{(Q)}] = \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} {b_i}^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & {b_j}^2 & b_ib_k \\ b_ib_k & b_jb_k & {b_k}^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4A}\begin{bmatrix} {c_i}^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c^2 & c_ic_k \\ c_ic_k & c_jc_k & {c_k}^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Vektor gaya elemen segitiga

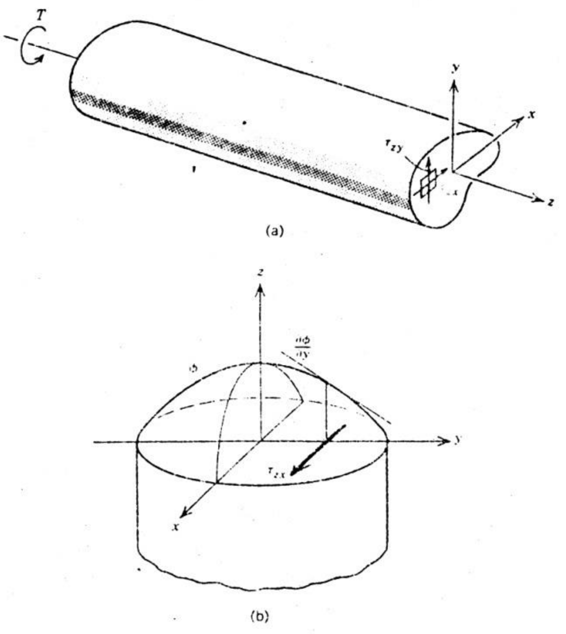
$$[f^{(Q)}] = \frac{2g\theta A}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Matrix kekakuan elemen segiempat

$$[k^{(Q)}] = \frac{a}{6b}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{b}{6a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Vektor gaya elemen segiempat

$$[f^{(Q)}] = \frac{2g\theta A}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$



Gambar 3

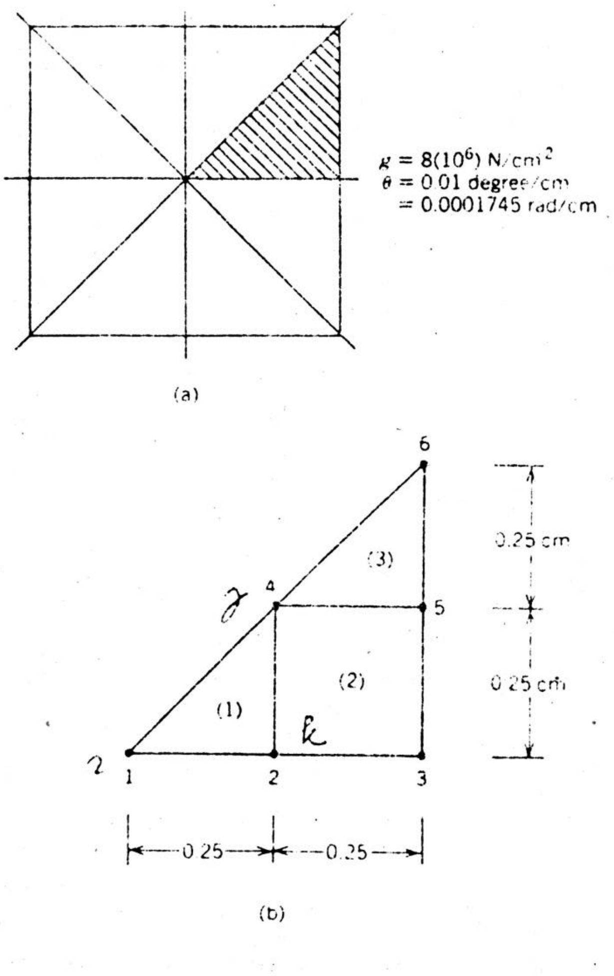
(a) Komponen-komoponen tegangan geser pada penampang non circular akibat torsi

(b) Permukaan ϕ dan komponen-koomponen tegangan geser.

VI. CONTOH PERHITUNGAN

Untuk memperjelas prosedur perhitungan masalah torsi dengan menggunakan metoda beda hingga, akan ditinjau suatu contoh perhitungan dari masalah ini.

Suatu penampang batang seperti pada Gambar 4 di bawah akan dianalisis terhdap torsi dengan menggunakan elemen segitiga dan segiempat.



Gambar 4. Pembagian elemen pada Penampang Batang

Karena penampang batang simetris, maka analisis perhitungan cukup dilakukan untuk seperdelapan dari penampang (Gambar 4b). Untuk menggambarkan prosedur perhitungan, disini hanya digunakan tiga elemen seja. Nomor-nomor elemen dan titik nodal adalah sebagai berikut :

e	i	j	k	m
1	1	2	4	
2	2	3	5	4
3	4	5	6	

VI.1 Perhitungan Matrix Kekakuan $[k^{(Q)}]$ pada Vektor Gaya $[f^{(Q)}]$

Elemen (1) dan elemen (3) mempunyai arah dan dimensi yang sama sehingga kedua elemen tersebut mempunyai matrix kekakuan dan vektor gaya yang sama.

Matrik kekakuan dan vektor gaya elemen segitiga dapat dihitung dari (5.8) dan (5.9).

Luas elemen segitiga $A^{(1)} = 0.03125\ cm^2$.

Koefisien-koefisien b dan c adalah :

$b_1^{(1)} = Y_2 - Y_4 = -0.25$ $\qquad$ $C_1^{(1)} = X_4 - X_2 = 0$

$b_2^{(1)} = Y_4 - Y_1 = 0.25$ $\qquad$ $C_2^{(1)} = X_1 - X_4 = -0.25$

$b_4^{(1)} = Y_1 - Y_2 = 0$ $\qquad$ $C_4^{(1)} = X_2 - X_1 = 0.25$

Substitusi harga-harga ini ke (5.8) akan didapat :

$$[k^{(1)}) = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0,5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jumlah kedua matrix di atas adalah :

$$[k^{(1)}) = 0,5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [k^{(3)}) \qquad (6.1)$$

Vektor gaya $\{f^{(1)}\}$ dapat ditentukan setelah parameter $2g\theta$ dihitung.

$$2g\theta = 2(8)\ (10^{\sigma})\ (0.01) \left(\frac{\pi}{180}\right) = 2790$$

Substitusi harga $2g\theta$ dan $A^{(1)}$ ke dalam (5.9) akan didapatkan

$$\{f^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 29.1 \\ 29.1 \\ 29.1 \end{bmatrix} = \{^{(3)}\} \qquad (6.2)$$

Matrix kekakuan elemen segiempat dapat ditentukan dari (5.10) dengan harga a = b = 0,125 yaitu :

$$[k^{(2)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jumlah kedua matrix di atas adalah :

$$[k^{(2)}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Vektor gaya elemen segiempat dapt ditentukan dari (5.110 yaitu ;

$$\{f^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 43.6 \\ 43.6 \\ 43.6 \\ 43.6 \end{bmatrix}$$

VI.2 Perhitungan Harga ϕ Pada Titik Nodal

Matrix kekakuan dan vektor gaya dari elemen (1), (2), dan (3) adalah :

$$[k^{(1)}) = 0{,}5 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \{f^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 29.1 \\ 29.1 \\ 29.1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$[k^{(2)}) = \frac{1}{6} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 5 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \{f^{(2)}\} = \begin{bmatrix} 43{,}6 \\ 43{,}6 \\ 43{,}6 \\ 43{,}6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{array}$$

$$[k^{(3)}) = 0{,}5 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & \sigma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \{f^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 29{,}1 \\ 29{,}1 \\ 29{,}1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ \sigma \end{array}$$

Matrix kekakuan global (*global stiffness matrix*), [K] dan vektor gaya global (*global force vector*), [F], didapat dengan menjumlahkan matrix kekakuan dan vektor gaya dari tiap-tiap elemen pada baris dan kolom yang sesuai.

$$[\,K\,] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \sigma \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1{,}667 & -0{,}167 & -0{,}667 & -0{,}333 & 0 \\ 0 & -0{,}167 & -0{,}667 & -0{,}333 & -0{,}167 & 0 \\ 0 & -0{,}667 & -0{,}333 & 1{,}667 & -0{,}667 & 0 \\ 0 & -0{,}333 & -0{,}167 & -0{,}667 & 1{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \sigma \end{array}$$

$$[\,F\,] = \begin{bmatrix} 29.167 \\ 72.667 \\ 43.667 \\ 101.833 \\ 72.667 \\ 29.167 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \sigma \end{array}$$

Dengan menggunakan hubungan [K] { Φ } – { F } = { 0 }, maka harga-harga ϕ pada titik-titik nodal dapat ditentukan yaitu dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1{,}667 & -0{,}167 & -0{,}667 & -0{,}333 & 0 \\ 0 & -0{,}167 & -0{,}667 & -0{,}333 & -0{,}167 & 0 \\ 0 & -0{,}667 & -0{,}333 & 1{,}667 & -0{,}667 & 0 \\ 0 & -0{,}333 & -0{,}167 & -0{,}667 & 1{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi 1 \\ \Phi 2 \\ \Phi 3 \\ \Phi 4 \\ \Phi 5 \\ \Phi \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29.167 \\ 72.667 \\ 43.667 \\ 101.833 \\ 72.667 \\ 29.167 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan syarat batas bahwa pada tepi penampang harga ϕ sama dengan nol, maka jumlah sistem persamaan akan berkurang.

Substitusi harga-harga $\Phi_3 = \Phi_5 = \Phi_\sigma = 0$ ke dalam sistem persamaan di atas, maka akan didapat :

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1{,}667 & -0{,}167 \\ 0 & -0{,}667 & 1{,}667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi 1 \\ \Phi 2 \\ \Phi 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 29.167 \\ 72.667 \\ 101.833 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini akan didapatkan harga-harga :

$\Phi_1 = 217$, $\Phi_2 = 159$, $\Phi_4 = 125$

VI.4 Perhitungan Tegangan Geser

Tegangan geser pada penampang akan tergantung pada gradient dari parameter titik nodal ϕ, yang dinyatakan oleh persamaan.

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ dan } \tau_{zy} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (5.1)$$

Vektor gradient untuk elemen segitiga :

$$(\text{ gv }) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix}$$

Vektor gradient untuk elemen segiempat :

$$(\ \mathrm{gv}\ ) = \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} -(2a-t) & (2a-t) & t & -t \\ -(2\mathrm{b}-\mathrm{s}) & -\mathrm{s} & \mathrm{s} & (2\mathrm{b}-\mathrm{s}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_\mathrm{i} \\ \Phi_\mathrm{j} \\ \Phi_\mathrm{k} \\ \Phi_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Vektor gradient elemen 1

$$\{\mathrm{gv}^{(1)}\} = \frac{1}{2*0.03125}\begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 217 \\ 159 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -232 \\ -136 \end{bmatrix}$$

Jadi tegangan-tegangan geser dri elemen 1 ialah :

$$\tau_{zx}^{(1)} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 136\ \mathrm{N/cm^2}\ ; \quad \tau_{zy}^{(1)} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 232\ \mathrm{N/cm^2}$$

Dengan cara yang sama tegangan geser dari elemen 3 dapat dihitung, dan didapat :

$$\tau_{zx}^{(9)} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{dan } \tau_{zy}^{(9)} = 500\ \mathrm{N/cm^2}$$

Tegangan geser di dalam elemen segiempat, mempunyai harga yang tidak konstan. Besarnya akan tergantung dari posisi titik diskrit yang akan ditinjau, jadi harga tegangan geser akan tergantung dari koordinat lokal s dan t.

Tegangan geser pada titik nodal 3 dapat dihitung dengan terlebih dahulu menentukan koordinat lokalnya yaitu s = 2b = 0.25, dan t = 0

Vektor gradient untuk elemen 2 adalah :

$$\{\mathrm{gv}^{(2)}\} = \frac{1}{4*0.125*0.125}\begin{bmatrix} -0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_5 \\ \Phi_4 \end{bmatrix}$$

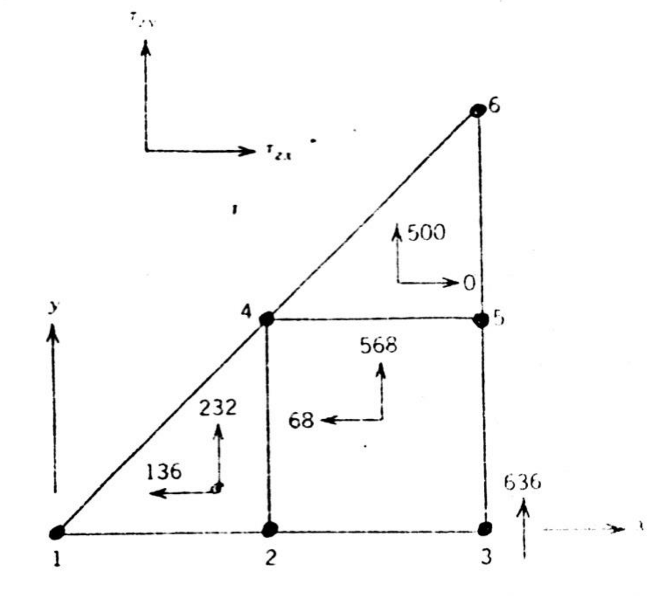
$$\{\mathrm{gv}^{(2)}\} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 159 \\ 0 \\ 0 \\ 125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -636 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tegangan-tegangan geser dari elemen 2 pada nodal 3 ialah

$$\tau_{zx}^{(2)} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \;\; ; \quad \tau_{zy}^{(2)} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 636 \text{ N/cm}^2$$

Harga-harga dari tegangan geser yang telah dihitung di atas dan harga-harga τ_{zx} dan τ_{zy} pada pusat dari elemen segiempat diperlihatkan pada Gambar 5.

Harga-harga dari tegangan geser yang telah dihitung untuk kedua elemen segitiga mampunyai harga yang konstan di dalam elemen, dan pada umumnya dianggap sebagai harga-harga pada pusat dari elemen.



Gambar 5. Harga-harga tegangan geser pada penampang

VI.4 Perhitungan Momen Torsi

Momen torsi T dapat ditentukan dri persamaan (5.3). Integral ini ekivalen dengan :

$$\int_{e=1}^{n} 2 \int_{A^{(e)}} \phi^e \, dA$$

Integral

$$\int_{A^{(e)}} \phi^e \, dA$$

Adalah :

$$\int_{A^{(e)}} \phi^e \, dA = \frac{A}{3} \left(\Phi i + \Phi j + \Phi k \right)$$

Untuk elemen segitiga, dan ;

$$\int_{A^{(e)}} \phi^e \, dA = \frac{A}{4} \left(\Phi i + \Phi j + \Phi k + \Phi m \right)$$

Untuk elemen segiempat

Momen Torsi T adalah : $T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)}$

Dimana :

$T^{(1)} \quad = 2 * \frac{A}{3} \left(\Phi i + \Phi j + \Phi k \right)$

$\quad = \frac{2 * 0.03125}{3} \left(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_4 \right) = 10.4$

$T^{(2)} \quad = 2 * \frac{A}{4} \left(\Phi i + \Phi j + \Phi k + \Phi m \right)$

$\quad = \frac{2 * 0.0625}{4} \left(\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5 + \Phi_4 \right) = 8.88$

$T^{(3)} \quad = 2 * \frac{A}{3} \left(\Phi i + \Phi j + \Phi k \right)$

$\quad = \frac{2 * 0.03125}{3} \left(\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_\sigma \right) = 2.60$

Jadi momen torsi adalah :

T = 10.4 + 8.88 + 2.60 = 21.9 N.cm

Momen torsi ini bekerja pada seperdelapan penampang batang. Jadi momen torsi yang bekerja pada penampang batang adalah :

21.9 * 8 = 175 N.cm

Jadi untuk memutar 1^o penampang batang baja dengan panjang 100 cm, diperlukan momen torsi sebesar 175 N.cm.

VII. PROGRAM KOMPUTER DAN APLIKASINYA.

Untuk keperluan perhitungan masalah torsi pada penampang batang yang non circular, dibawah ini dibuat suatu program komputer yang ditulis dalam bahasa FORTRAN 77. Pada program elemen hingga ini digunakan formulasi dari elemen segitiga dan elemen segiempat linier dua dimensi.

Bagan alir dari langkah-langkah perhitungan program ini secara garis besarnya adalah sebagai berikut :

1. Tentukan parameter-parameter masukan yang terdiri dari nomor-nomor elemen dan titik nodal, koordinat-koordinat titik nodal, koefisien-koefisien material 9 dan θ
2. Initialisasi matrix kekakuan sistem [K] dan vektor gaya sistem [F] sama dengan nol
3. Dengan data-data masukan di atas, hitung matrix kekakuan $[k^{(e)}]$ dan vektor gaya $\{f^{(e)}\}$ dari tiap elemen segitiga dan elemen segiempat
4. Susun semua matrix $[k^{(e)}]$ menjadi matrix [K] dan vektor $\{f^{(e)}\}$ menjadi vektor { F } dengan menggunakan "direct stiffness procedure"
5. Modifikasi matrix [K] dam veltpr {F} dengan memasukkan h arga-harga titik nodal Φ yang diketahui berdasarkan syarat batas.
6. Selesaikan sistem persamaan simultan untuk mendapatkan harga titik-titik nodal Φ.
7. Hitung komponen-komponen tegangan geser dan momen torsi dari elemen-elemen yang ditinjau.

Aplikasi Program Komputer

Sebagai contoh dari penggunaan program komputer ini, akan ditinjau dua contoh perhitungan tegangan geser dan momen torsi dari penampang batang yang mengalami torsi.

Contoh I

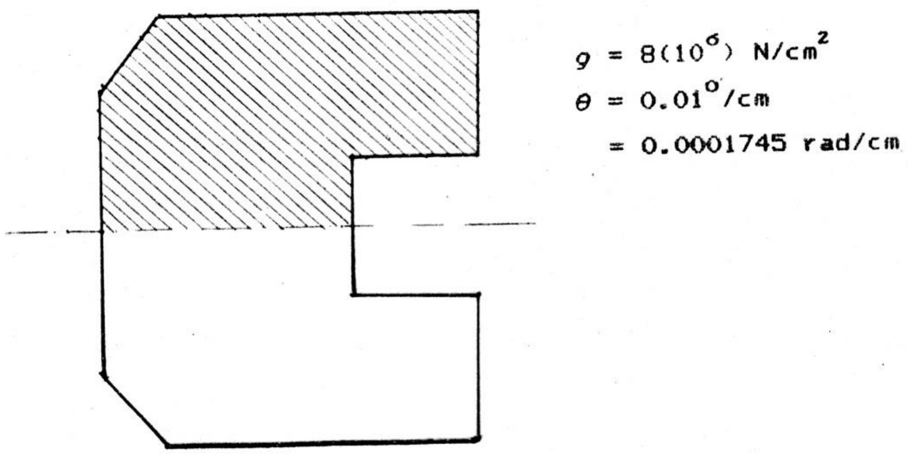
Sebagai contoh pertama, akan ditinjau suatu penampang batang dengan bentuk dan karakteristik material yang sama seperti contoh perhitungan pada bagian VI.

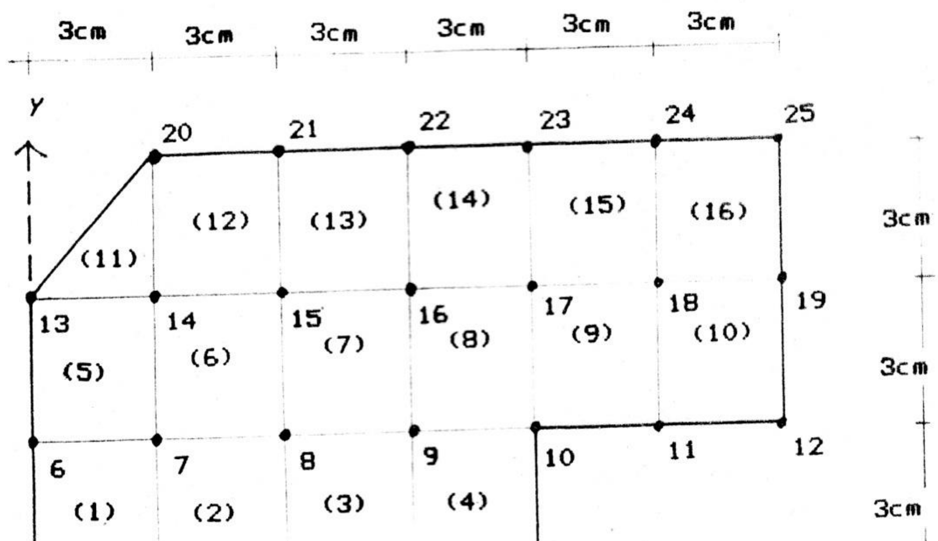
Hasil perhitungan tegangan-tegangan geser dan momen torsi yang didapat dari program komputer ini menunjukkan hasil yang sama dengan hasil yang didapat sebelumnya. Hasil perhitungan dengan program komputer ditunjukkan pada Lampiran I.

Contoh II

Sebagai contoh kedua akan dihitung tegangan-tegangan geser dan momen torsi dari suatu penampang dengan bentuk dan ukuran seperti pada Gambar 6.

Karena penampang simetris, maka di dalam perhitungan cukup ditinjau setengah bagian saja. Pembagian grid dan penomoran elemen-elemen serta titik-titik nodal diperlihatkan pula pada Gambar 6. Hasil perhitungan dengan program komputer ditunjukkan pada Lampiran II.





Gambar 6. Pembagian elemen pada penampang

VIII. KESIMPULAN

1. Metode elemen hingga merupakan suatu cara numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan dari masalah-masalah fisik dimana solusi analitiknya sulit atau tidak dapat diselesaikan. Untuk masalah-masalah fisik dengan batas-batas yang tidak teratur, metoda ini lebih mudah digunakan dibandingkan dengan metoda beda hingga. Dengan metoda inii solusi yang didapat hanya merupakan harga-harga pada titik-titik diskret. Namun demikian harga-harga ini dapat memberikan keterangan yang cukup mengenai proses fisik dari masalah yang ditinjau.
2. Pada masalah torsi dari penampang batang non-circular yang ditinjau pada tulisan ini, untuk mendapatkan harga-harga dari tegangan geser yang lebih teliti dari tiap-tiap elemen dapat dilakukan dengan dua cara yaitu :
   - Dengan menambah jumlah elemen-elemen yang dipergunakan didalam analisis perhitungan. Jika ukuran dari elemen-elemen yang dipergunakan berkurang, maka harga-harga dari tegangan geser yang dianggap konstan di dalam elemen akan lebih tepat.
   - Dengan menggunakan elemen-elemen yang mempunyai banyak titik-titik nodal dan menggunaan persamaan interpolasi dengan fungsi-fungsi polinomial kuadratik atau kubik.
3. Karena pada metoda elemen hingga ini diperlukan langkah untuk menyelesaikan sejumlah persamaan simultan yang cukup banyak, maka untuk analisis perhitungan dengan metoda ini perlu dilakukan dengan menggunakan bantuan komputer. Metode elemen hingga menjadi tidak praktis jika tidak tersedia komputer dengan kemampuan yang cukup.

DAFTAR PUSTAKA

Amrinsyah Nasution, *Fortran 77*, Penerbit Erlangga. 1978.

Bhirud, *Matrix Operations on The Computer*, Oxford & IBH Publishing, 1975.

Catatan Kuliah, *Metode Elemen Hingga Untuk Teknik Struktur*, Fakultas Pascasarjana Teknik Struktur ITB, 1988/1989.

D.M. Etter, *Structured Fortran 77 for Engineers and Scientists*, The Benjamin/Cumminings Publishing, First Edition. 1986.

Larry J. Sigerlind, *Applied Finite Element Analysis,* John Wiley & Sons, Second Edition. 1984.

Robert D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John wiley & Sons, Second Edition. 1981.

Timoshenko & Goodier, *Theory of Elsticity*, Mc.Grow-Hill, Third Edition. 1984.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

PERHITUNGAN TORSI PADA PENAMPANG
METODA ELEMEN HINGGA

Parameter Penampang

Modulus Geser Penampang	: 8000000.000 N/cm^2
Perputaran Sudut	: .0001745000 Rad/cm
Jumlah elemen	: 3
Jumlah Titik Nodal	: 6

Elemen Segitiga

Jumlah Elemen Segitiga : 2

Elemen Segiempat

Jumlah Elemen Segiempat : 1

Koordinat Titik Nodal

Nodal	X	Y
1	.00	.00
2	.25	.00
3	.50	.00
4	.25	.25
5	.50	.25
6	.50	.50

Stress Function (PHI)

PHI	1 =	216.509
PHI	2 =	158.343
PHI	3 =	.000
PHI	4 =	124.412
PHI	5 =	.000
PHI	6 =	.000

Tegangan Geser dan Torsi Pada Elemen Segitiga

	TX	TY
Tegangan Geser Elemen 1	-135.722	232.667
Tegangan Geser Elemen 3	.000	497.648

Momen Torsi Elemen 1 = 10.401

Momen Torsi Elemen 3 = 2.592

Torsi Geser dan Torsi pada Elemen Segiempat

	TX	TY
Tegangan Geser Elemen 2 :	-67.861	565.509
Momen Torsi Elemen 2 :	8.836	

Lampiran 2

PERHITUNGAN TORSI PADA PENAMPANG
METODA ELEMEN HINGGA

PARAMETER PENAMPANG

Modulus Geser Penampang : 8000000.000 N/cm^2
Perputaran Sudut : .0001745000 Rad/cm

Jumlah elemen : 16
Jumlah Titik Nodal : 25

Elemen Segitiga

Jumlah Elemen Segitiga : 1

Elemen Segiempat

Jumlah Elemen Segiempat : 15

Koordinat Titik Nodal

Nodal	X	Y
1	.00	.00
2	3.00	.00
3	6.00	.00
4	9.00	.00
5	12.00	.00
6	.00	.00
7	3.00	3.00
8	6.00	3.00
9	9.00	3.00
10	12.00	3.00
11	15.00	3.00
12	18.00	3.00
13	.00	6.00
14	3.00	6.00
15	6.00	6.00
16	9.00	6.00
17	12.00	6.00
18	15.00	6.00
19	18.00	6.00
20	3.00	9.00
21	6.00	9.00

22	9.00	9.00
23	12.00	9.00
24	15.00	9.00
25	18.00	9.00

Stress Function (PHI)

PHI 1	=	.000
PHI 2	=	31946.430
PHI 3	=	42790.660
PHI 4	=	32709.250
PHI 5	=	.000
PHI 6	=	.000
PHI 7	=	29393.130
PHI 8	=	39305.270
PHI 9	=	32444.400
PHI 10	=	.000
PHI 11	=	.000
PHI 12	=	.000
PHI 13	=	.000
PHI 14	=	18351.910
PHI 15	=	27366.780
PHI 16	=	24055.530
PHI 17	=	17943.740
PHI 18	=	11665.970
PHI 19	=	.000
PHI 20	=	.000
PHI 21	=	.000
PHI 22	=	.000
PHI 23	=	.000
PHI 24	=	.000
PHI 25	=	.000

Tegangan Geser dan Torsi pada Elemen Segitiga

	TX	TY
Tegangan Geser Elemen 11	-6117.303	-6117.303

Momen Torsi Elemen 11 = 55055.730

Tegangan Geser dan Torsi pada Elemen Segiempat

		TX	TY
Tegangan Geser Elemen 1	:	-425.550	-10223.260
Momen Torsi Elemen 1	:	276028.000	
Tegangan Geser Elemen 2	:	-1006.449	-3459.393
Momen Torsi Elemen 2	:	646459.700	
Tegangan Geser Elemen 3	:	-625.040	2823.711
Momen Torsi Elemen 3	:	662623.100	
Tegangan Geser Elemen 4	:	-44.141	10858.940
Momen Torsi Elemen 4	:	293191.400	
Tegangan Geser Elemen 5	:	-1840.203	-7957.507
Momen Torsi Elemen 5	:	214852.700	
Tegangan Geser Elemen 6	:	-3829.951	-3154.501
Momen Torsi Elemen 6	:	514876.900	
Tegangan Geser Elemen 7	:	-3387.894	1695.353
Momen Torsi Elemen 7	:	554273.900	
Tegangan Geser Elemen 8	:	1592.476	6426.032
Momen Torsi Elemen 8	:	334996.500	
Tegangan Geser Elemen 9	:	4934.951	1046.295
Momen Torsi Elemen 9	:	133243.700	
Tegangan Geser Elemen 10	:	1944.328	1944.328
Momen Torsi Elemen 10	:	52496.850	
Tegangan Geser Elemen 12	:	-7619.782	-1502.478
Momen Torsi Elemen 12	:	205734.100	

Tegangan Geser Elemen	13	:	-8570.384	551.876
Momen Torsi Elemen	13	:	231400.400	
Tegangan Geser Elemen	14	:	-6999.877	1018.632
Momen Torsi Elemen	14	:	188996.700	
Tegangan Geser Elemen	15	:	-4934.951	1046.295
Momen Torsi Elemen	15	:	133243.700	
Tegangan Geser Elemen	16	:	-1944.328	1944.328
Momen Torsi Elemen	16	:	52496.850	

Lampiran 3

```
C       PROGRAM TORSI PENAMPANG NONCIRCULAR
        DIMENSION SMT (30, 30), X (30), Y (30), B (30, 30) C (30, 30)
        DIMENSION SME (30, 30), FT (30), FE (30), TM (30)
        COMMON/CHOLESKY / SM (30, 30), F (30), JN
        COMMON/TGESER/ASE, AE, BE, S, T, I, J, K, M
        COMMON/STRESSF / PHI (30)
        CHARACTER * 15 DATA
        WRITE (*, ' (‘”0” , T15,A\)’)’ Nama Input Data File : ’
        READ (*, ’ (A)’) DATA
        OPEN (5, FILE-DATA)
        OPEN (6, FILE =’ TORSI, OUT’ ,STATUS=’NEW’)
        WRITE (6,1)
      1 FORMAT (‘   PERHITUNGAN TORSI PADA PENAMPANG’/’
        +       ’            METODA ELEMEN  HINGGA ‘/’
        +       ’      ------------------------------------------------------- ‘ / )
C
C   PARAMETER PENAMPANG
C
        WRITE (6, 3)
     3  FORMAT (‘   PARAMETER PENAMPANG’ / )
        READ(5, *)G, THETHA
        WRITE(6,4)G, THETHA
     4  FORMAT (‘       Modulus Geser Penampang   : ’,F13.3,’ N/cm2 ‘/
        +           ,       Perputaran Sudut              : ’,F13.10,’ Rad/cm’ /)
                Gt = 2*g*THETHA
        READ (6,*) JE, JN
        WRITE (6,5) JE, JN
     5  FORMAT (’       Jumlah Elemen                    : ’, 14/
        +           ’       Jumlah Titik Nodal               : ’, 14/)
C
C   KOORDINAT TITIK NODAL
C
        DO 90 J = 1, JN
              READ(5,*) I, X(I), Y (I)
     90 CONTINUE
        WRITE (*,*)’      Matrix kekakuan penampang sedang dihitung .....’
        WRITE (*,*)
```

ELEMEN SEGI-TIGA

```
        SMT ( I, I )        =    0.0
        SMT ( I, J )        =    0.0
        SMT ( I,K )         =    0.0
        SMT ( J, I )        =    0.0
        SMT ( J, J )        =    0.0
```

```
      SMT ( J, K )      =   0.0
      SMT ( K, I )      =   0.0
      SMT ( K, J )      =   0.0
      SMT ( K, K )      =   0.0

      WRITE (6,60)
   60 FORMAT ('       ELEMEN SEGI-TIGA '/ )
      DO 105 I   = I, JN
         FT (I) = 0.0
  105 CONTINUE
      READ (5,*) JEST, AST
      WRITE (6,6) JEST
    6 FORMAT ('       Jumlah Elemen Segi-Tiga : ', 14 / )
         DO 7 N = 1. JEST
      READ (5,*) NE, I, J, K
         B (NE, I)   = Y (J) – Y (K)
         B (NE, J)   = Y (K) – Y (I)
         B (NE, K)   = Y (I) – Y (J)
         C (NE, I)   = X (K) – X (J)
         C (NE, J)   = X (I) – X (K)
         C (NE, K)   = X (J) – X (I)
C
C   PERHITUNGAN MATRIX KEKAKUAN ELEMEN
C
      SM (I, I)   = 1/(4*AST)*(B(NE,I) **2 + C (NE, I) **2)
      SM (I, J)   = 1/(4*AST)*(B(NE,I) *B (NE,J) + C (NE, I)* C (NE, J))
      SM (I, K)   = 1/(4*AST)*(B(NE,I) *B (NE,K) + C (NE, I)*C (NE, K))
      SM (J, I)   = SM (I, J)
      SM (J, J)   = 1/(4*AST)*(B(NE,J)**2 + C (NE, J)**2)
      SM (J, K)   = 1/(4*AST)*(B(NE,J)*B (NE,K) + C (NE, J)*C (NE, K))
      SM (K, I)   = SM (I, K)
      SM (K, J)   = SM (J, K)
      SM (K, K) = 1/(4*AST)*(B(NE,K)**2 + C (NE, K)**2)
C
C   PERHITUNGAN MATRIX GLOBAL ELEMEN SEGI-TIGA
C
      SMT (I, I)  =    SMT (I, I)  + SMT (I, I)
      SMT (I, J)  =    SMT (I, J)  + SMT (I, J)
      SMT (I, K)  =    SMT (I, K)  + SMT (I, K)
      SMT (J, I)  =    SMT (J, I)  + SMT (J, I)
      SMT (J, J)  =    SMT (J, J)  + SMT (J, J)
      SMT (J, K)  =    SMT (J, K)  + SMT (J, K)
      SMT (K, I)  =    SMT (K, I)  + SMT (K, I)
      SMT (K, J)  =    SMT (K, J)  + SMT (K, J)
      SMT (K, K) =    SMT (K, K)+ SMT (K, K)
```

```
C
C    PERHITUNGAN VEKTOR GAYA
C
              F (I)    = (GT*AST) / 3
              F (J)    = (GT*AST) / 3
              F (K)    = (GT*AST) / 3
        FT (I)         = FT (I)  + F (I)
        FT (J)         = FT (J)  + F (J)
        FT (K)         = FT (K)  + F (K)
     7  CONTINUE
```

ELEMEN SEGI EMPAT

```
                    DO    10  I = 1,30
                          DO 11 J = 1,20
                              SM (I,J) = 0.0
                              SME (I,J) = 0.0
     11 CONTINUE
     10 CONTINUE
        DO  106 I    = 1, JN
             FE (I)  =  0.0
     106   CONTINUE
           WRITE (6, 65)
      65   FORMAT ('      ELEMEN SEGI-EMPAT  '/ )
           READ (5,*) JESE
           WRITE (6,12) JESE
      12   FORMAT ('    Jumlah elemen Segi-Empat  : ', 14/)
               DO 13  N = 1, JESE
               READ (5,*)  NE, I, J, K, M.
                  BE       = (X (J) – X (I)) / 2
                  AE       = (Y (M) – Y (I)) / 2
                  CE       = AE / (6*BE)
                  DE       = BE / (6*AE)
                 ASE       = BE * AE
C
C    PERHITUNGAN MATRIX KEKAKUAN ELEMEN
C
        SM (I, I)      = 2*CE + 2*DE
        SM (I, J)      = -2*CE + DE
        SM (I, K)      = -CE - DE
        SM (I, M)      = CE –  2*DE
        SM (J, I)      = SM (I, J)
        SM (J, J)      = SM (I, I)
        SM (J, K)      = SM (I, M)
        SM (J, M)      = SM (I, K)
        SM (K, I)      = SM (I, K)
        SM (K, J)      = SM (J, K)
```

```
      SM (K, K)   = SM (I, I)
      SM (K, M)   = SM (I, J)
      SM (M, I)   = SM (I, M)
      SM (M, J)   = SM (J, M)
      SM (M, K)   = SM (K, M)
      SM (M, M)   = SM (I, I)
C
C   PERHITUNGAN MATRIK GLOBAL ELEMEN SEGI-EMPAT
C
      SME (I, I)   =  SME (I, I)   +  SM (I, I)
      SME (I, J)   =  SME (I, J)   +  SM (I, J)
      SME (I, K)   =  SME (I, K)   +  SM (I, K)
      SME (I, M)   =  SME (I, M)   +  SM (I, M)
      SME (J, I)   =  SME (J, I)   +  SM (J, I)
      SME (J, J)   =  SME (J, J)   +  SM (J, J)
      SME (J, K)   =  SME (J, K)   +  SM (J, K)
      SME (J, M)   =  SME (J, M)   +  SM (J, M)
      SME (K, I)   =  SME (K, I)   +  SM (K, I)
      SME (K, J)   =  SME (K, J)   +  SM (K, J)
      SME (K, K)   =  SME (K, K)   +  SM (K, K)
      SME (K, M)   =  SME (K, M)   +  SM (K, M)

C
C   PERHITUNGAN VEKTOR GAYA
C
            F (I)   = (GT * ASE)
            F (J)   = (GT * ASE)
            F (K)   = (GT * ASE)
            F (M)   = (GT * ASE)
          FE (I)    = FE (I)  + F (I)
          FE (J)    = FE (J)  + F (J)
          FE (L)    = FE (K)  + F (K)
          FE (M)    = FE (M)  + F (M)
   13 CONTINUE
      WRITE (6,70)
   70 FORMAT ('         Koordinat Titik Nodal '/ )
      Write (6,75)
   75 FORMAT ('         Nodal          X         Y ' )
      WRITE (6,80) (I, x (I), Y (I), I = 1, JN)
   80 FORMAT (17, 2F 10.2)
```

```
          DO     16  I    = 1,30
                 F (I)    = 0.0
          DO     17  J    = 1,30
                 SM (I, J) = 0.0
   17 CONTINUE
   16 CONTINUE
          DO  18  I       = 1, JN
            F (I)         = FT (I)  + FE (I)
          DO  19  J       = 1, JN
            SM (I, J)     = SMT (I, J)  + SME (I, J)
   19 CONTINUE
   18 CONTINUE
C
C   TITIK NODAL PADA KONDISI BATAS
C
      READ (5,*) NDB
          DO 30 N = 1, NDB
      READ (5,*) I
            F (I)    = 0.0
          DO 35 J   = 1, JN
            SM (I, J)    = 0.0
            SM (J, I)    = 0.0
   35 CONTINUE
   30 CONTINUE
      WRITE (*, *)'        Tegangan geser pada elemen sedang dihitung.....'
C
      CALL HITUNG
      WRITE (6, 8)
      WRITE (6, 45)
   45 FORMAT ('            STRESS FUNCTION (PHI) ' / )
      WRITE (6, 40) (I, PHI (I), I = 1, JN)
   40 FORMAT ('            PHI' 13, ' = ', F13.3)
```

```
          DO      160 I   = 1, JN
                  FE (I)  = 0.0
                  FT (I)  = 0.0
  160 CONTINUE
      READ 95, *) JEST, AST
      WRITE (6, *)
      WRITE (6, 161)
  161 FORMAT ('    TEGANGAN GESER DAN TORSI PADA ELEMEN SEGITIGA' /)
      WRITE (6, 162)
C
C   PERHITUNGAN TEGANGAN GESER
C
  162 FORMAT ('                         TX                         TY')
          DO 170 N = 1, JEST
      READ (5, *) NE, I, J, K
      WRITE (6,163) NE
  163 FORMAT ('         Tegangan Geser Elemen ', J3)
          FE (NE)  = -1/(2*AST)*((B (NE,I)*PHI (I)) + (B(NE,J)*PHI (J))
      +                 + (B(NE,K) * PHI (KK)))
          FE (NE)  =  1/(2*AST)*((C (NE, I)*PHI (I)) + (C(NE,J)*PHI(J))
       +                + (C (NE, K) * PHI (K)))
      WRITE (6,164) FT (NE, FE (NE)
  164 FORMAT (15X, 2F15.3)
C
C   Perhitungan Momen Torsi
C
      TM (NE) = (2*AST/3) * (PHI (I) + PHI (J) + PHI (K))
      WRITE (6, *)
      WRITE (6,300) NE, TM (NE)
  300 FORMAT ('         Momen Torsi Elemen  ', 12, ' = ', F15.3)
      WRITE (6, *)
  170 CONTINUE
      READ (5, *) JESE
      WRITE (6, 201)
  201 FORMAT ('         TEGANGAN GESER DAN TORSI PADA
                       ELEMEN SEGI-EMPAT' / )
      WRITE (6,202)
C
C        Perhitungan Tegangan Geser
C
  202 FORMAT ('                         TX                         TY' )
          DO 180 N = 1, JESE
          READ (5, *) NE, I, J, K, M

                  BE      = (X (J) – X (I)) / 2
```

```
                AE      = (Y (M) – Y (I)) / 2
                CE      = AE / (6 * BE)
                DE      = BE / (6*AE)
               ASE      = BE * AE
C
      WRITE (6,210) NE
  210 FORMAT ('         Tegangan Geser Elemen' , I3)
      S = BE
      T = AE
      CALL TEGANGAN
C
C   Perhitungan Moomen Torsi
C
      TM (NE) = (2*4*ASE/4)*(PHII (I) + PHI (J) + PHI (K) + PHI (M))
      WRITE (6,301) NE, TM (NE)
      WRITE (6,*)
  301 FORMAT ('         Momen Torsi Elemen  ',I2,' = ', F15.3)
  180 CONTINUE
      STOP
      END
```

SUBROUTINE HITUNG

```
     SUBROUTINE HITUNG
     COMMON / CHOLESKY / SM (30, 30), F (30), JN
     COMMON/STRESSF / PHI (30)
          DO 10     I      = 1, JN
          IN  = I – 1
          DO 10 J = 1, JN
          SUM = SM (I, J)
          IF (I – 1) 6, 6 ,4
   4 DO 5 K = 1, IN
   5 SUM = SUM – SM (K, I) * SM (K,  J)
   6 IF (J – I)7, 8, 7
   7 SM (I, J) = SUM * TEMP
     GO   TO  10
   8 IF (SUM.EQ.0.00)  THEN
     TEMP = 0.0
     ELSE
     TEMP = 1.0 / SQRT (SUM)
     END IF
     SM (I, I) = TEMP
  10 CONTINUE


C
```

```
C    SOLVE BY FORWARD SUBSTITUTION
C
          DO 20 I = 1, JN
          SUM = F (I)
          IF (I-1) 20, 20, 11
     11   IN = I – 1
          DO 15 K = 1,  IN
     15   SUM = SUM – SM (K, I) * PHI (K)
     20   PHI (I) = SUM * SM (I, I)
C
C    SOLVE BY BACK SUBSTITUTION
C
          DO 30 L = 1, JN
          I = JN – L + 1
          SUM = PHI (I)
          I I = I + 1
          IF (I I – JN) 21, 21, 26
     21   DO 25 K = I I , JN
     25   SUM = SUM -  SM (I, K) * PHI (K)
     26   PHI (I) = SUM * SM (I, I)
     30   CONTINUE
          END
```