

DETERMINAN MATRIK



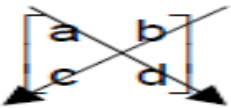
Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan.

Pengertian Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan $\det(A)$.

Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan $+1$ atau -1 . Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2×2 dan matriks berordo 3×3 .

1. Determinan matriks berordo 2 X 2

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari 

Contoh: $P = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka $\det(P) = |P| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8 \times 4) - (4 \times 3) = 20$

2. Determinan matriks berordo 3 X 3

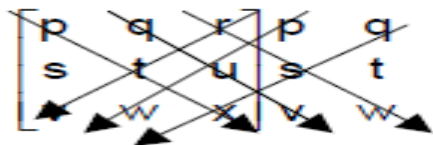
Untuk mencari determinan matriks berordo 3 X 3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut :

a. Metode Sarrus

Jika matriks $B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$

$$\text{maka } \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix} = ptx + quv + rsw - rtv - qsx - puw$$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari



Perlu diperhatikan bahwa cara demikian **tidak berlaku** bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $\det(Q) = |Q|$ adalah

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{vmatrix} = (2 \times 3 \times 9) + (4 \times 5 \times 7) + (6 \times 1 \times 8) - (6 \times 3 \times 7) - (2 \times 5 \times 8) - (4 \times 1 \times 9) = 242 - 242 = 0$$

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu Akan dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke- i dan elemen-elemen pada kolom ke- j .

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $M_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, M_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

M_{11} , M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks Q .

Kofaktor suatu elemen baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks A dilambangkan dengan $K_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

Untuk mencari $\det(A)$ dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan $\det(Q)$ dengan metode

kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $\det(M_{11})=-13$,

$\det(M_{12})=-26$ dan $\det(M_{13})=-13$, maka :

$$|Q| = q_{11} \cdot k_{11} + q_{12} \cdot k_{12} + q_{13} \cdot k_{13}$$

$$= q_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det(M_{11}) + q_{12} \cdot (-1)^{1+2} \det(M_{12}) + q_{13} \cdot (-1)^{1+3} \det(M_{13})$$

$$= 2 \cdot 13 - 4 \cdot 26 + 6 \cdot 13 = 0$$

3. Adjoin Matriks

Adjoin matriks **A** adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan $\text{adj } A = (k_{ij})^t$

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa

$k_{11}=13$, $k_{12}=-26$ dan $k_{13}=13$ sekarang kita hanya mencari kofaktor dari ekspansi baris ke-2 dan ekspansi baris ke-3, yaitu :

$$k_{21}=(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -12, \quad k_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 24, \quad k_{23}=(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

$$k_{31}=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad k_{32}=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -4, \quad k_{33}=(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 & 2 \\ -26 & 24 & -4 \\ 13 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

D. Invers Matriks

Matrks-matriks persegi A dan B sedemikian hingga $AB = BA = I$ maka A disebut insvers B ditulis B^{-1} dan sebaliknya B adalah invers A ditulis A^{-1} sehingga berlaku $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I matriks identitas.

Invers matriks A dirumuskan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{Adj}(A)$

1. Invers matriks berordo 2x2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} !

Jawab: $\det(A) = (5 \times 2) - (3 \times 3) = 1$