DETERMINAN MATRIK

Untuk setiap matriks persegi terdapat suatu bilangan tertentu yang disebut determinan.

Pengertian Determinan matriks adalah jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A dan dinyatakan dengan det(A).

Yang diartikan dengan sebuah hasil perkalian elementer bertanda dari suatu matriks A adalah sebuah hasil perkalian elementer pada suatu kolom dengan +1 atau -1. Untuk lebih jelasnya, berikut ini diuraikan cara mencari determinan matriks berordo 2x2 dan matriks berordo 3x3.

1. Determinan matriks berordo 2 X 2

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det (A) = $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

<u>Contoh</u>: $P = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, maka $\det(P) = |P| = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (8x4)-(4x3) = 20$

2. Determinan matriks berordo 3 X 3

Untuk mencari determinan matriks berordo 3 X 3 dapat digunakan dua metode, sebagai berikut :

a. Metode Sarrus

Jika matriks $B = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{bmatrix}$

maka det(B) = $|B|$ = $\begin{vmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{vmatrix}$ = ptx + quv +rsw – rtv – qsx-puw

Sebagai pengingat ketentuan di atas diperoleh dari

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} p & q & r & p & q \\ s & t & u & s & t \\ v & w & x & v & w \end{array}\right]$$

Perlu diperhatikan bahwa cara demikian **tidak berlaku** bila matriks berordo 4x4 dan yang lebih tinggi lagi.

<u>Contoh</u>: Q = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka det(Q) = $|Q|$ adalah

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right] = (2\times3\times9)+(4\times5\times7)+(6\times1\times8)-(6\times3\times7)-$$

$$(2\times5\times8)-(4\times1\times9) = 242-242 = 0$$

b. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu Akan dijelaskan tentang sub matriks atau minor dari suatu matriks. Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke-i dan elemen-elemen pada kolom ke-j.

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, maka $M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

M_{11}, M_{12} dan M_{13} merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks Q.

Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan $K_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}| = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$

Untuk mencari det(A) dengan metode kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja misal ekspansi baris ke-1

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan det(Q) dengan metode kofaktor adalah mencari terlebih dahulu determinan-determinan minornya yang diperoleh dari ekspansi baris ke-1 diatas, yaitu $\det(M_{11})=-13$, $\det(M_{12})=-26$ dan $\det(M_{13})=-13$, maka :

$$|Q| = q_{11}.k_{11} + q_{12}.k_{12} + q_{13}.k_{13}$$

$$= q_{11}.(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + q_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + q_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= 2.13 - 4.26 + 6.13 = 0$$

3. Adjoin Matriks

Adjoin matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan adj A = $(k_{ij})^t$

Contoh: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ telah diketahui dari hitungan sebelumnya bahwa

$k_{11}=13$, $k_{12}=-26$ dan $k_{13}=13$ sekarang kita hanya mencari kofaktor dari ekspansi baris ke-2 dan ekspansi baris ke-3, yaitu :

$k_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=-12$, $k_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=24$, $k_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=-12$

$k_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2$, $k_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-4$, $k_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 & 2 \\ -26 & 24 & -4 \\ 13 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

Universitas Bina Darma
FIND US FOR QUALITY

D. Invers Matriks

Matrks-matriks persegi A dan B sedemikian hingga AB = BA = I maka A disebut insvers B ditulis B^{-1} dan sebaliknya B adalah invers A ditulis A^{-1} sehingga berlaku $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I matriks identitas.

Invers matriks A dirumuskan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} .\mathrm{Adj}(A)$

1. Invers matriks berordo 2x2

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

<u>Contoh</u>: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan A^{-1} !

<u>Jawab</u>: det(A) = (5x2) – (3x3) = 1