MATRIK

Pengertian matriks dan ordo matriks

Perhatikan tabel yang memuat data jumlah siswa di suatu sekolah

Tabel Jumlah Siswa

Kelas	Laki-laki	Wanita
I	240	180
II	220	210
III	205	205

Dari tabel di atas, bila diambil angka-angkanya saja dan ditulis dalam tanda kurung buka dan kurung tutup , bentuknya menjadi $\begin{bmatrix} 240 & 180 \\ 220 & 210 \\ 205 & 205 \end{bmatrix}$.

Bentuk sederhana inilah yang kita sebut sebagai matriks.

Pengertian Matriks: Susunan bilangan (elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegipanjang.

Matriks dinotasikan dengan huruf kapital A, B, K, dan sebagainya.

Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks menentukan ukuran dari matriks tersebut. yang disebut ordo matriks

$$\text{Secara umum, matriks } A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa elemen matriks A tersebut berindeks rangkap, misalnya a_{23} menyatakan elemen matriks A pada baris ke-2 dan kolom ke-3, sedangkan matriks A berordo m X n dan ditulis A_{mxn}

Jenis-jenis matriks

a. Matrik bujursangkar/persegi yaitu matriks berordo n x n atau banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom disebut juga sebagai matriks persegi berordo n.

Contoh: $B_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$, maka 1 dan 12 dikatakan berada pada diagonal utama B.

b. Matriks baris yaitu matriks berordo 1 x n atau hanya memiliki satu baris.

Contoh: $C_{1x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

c. Matriks kolom yaitu matriks yang hanya memiliki satu kolom

Contoh: $E_{2x1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

d. Matriks tegak yaitu matriks berordo m x n dengan m>n

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, A berordo 3 X 2 sehingga matriks A tampak tegak

e. Matriks datar yaitu matriks berordo m x n dengan m<n

Contoh: $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, F berordo 2 X 3 sehingga matriks F tampak datar

Berdasarkan elemen-elemen penyusunnya terdapat jenis matriks, sbb :

a. Matriks nol yaitu matriks yang semua elemen penyusunnya adalah nol dan dinotasikan sebagai O.

Contoh: $O_{1x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $O_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. Matriks diagonal yaitu matriks persegi yang semua elemen diatas dan dibawah diagonalnya adalah nol dan dinotasikan sebagai D.

Contoh: $D_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. Matriks skalar yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonalnya sama.

Contoh: $D_{4x4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d. Matriks simetri yaitu matriks persegi, yang setiap elemennya, selain elemen diagonal, adalah simetri terhadap diagonal utama.

Contoh: $F_{2x2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. Matriks simetri miring yaitu matriks simetri yang elemen-elemennya, selain elemen diagonal, saling berlawanan.

<u>Contoh</u>: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 \\ -5 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

f. Matriks Identitas/satuan yaitu matriks diagonal yang semua elemen pada diagonal utamanya adalah 1 dan dinotasikan sebagai I.

<u>Contoh</u>: $I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g. Matriks segitiga atas yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya adalah nol.

<u>Contoh</u>: $G_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

h. Matriks segitiga bawah yaitu matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya adalah nol.

<u>Contoh</u>: $H_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

i. Matriks transpose yaitu matriks yang diperoleh dari memindahkan elemen-elemen baris menjadi elemen pada kolom atau sebaliknya. Transpose matriks A dilambangkan dengan A^T

Contoh: $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka $A^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, perhatikan bahwa ordo dari A^T adalah 2 X 3.

KESAMAAN MATRIKS

- Dua buah matriks atau lebih dikatakan sama , jika dan hanya jika memiliki ordo sama dan memiliki elemen-elemen yang seletak juga sama.

Contoh: $A_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka A = B

Perhatikan bahwa $C_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ dan $C_{2x3} \neq A_{2x3}$ karena ada elemennya yang seletak dan nilainya tidak sama. Perhatikan juga bahwa

$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ dan $D \neq A$ karena ordo kedua matriks tersebut tidak sama.

Operasi matriks dan sifat sifatnya

- Penjumlahan Matriks.

Jika A + B = C, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j. Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama.

<u>Contoh</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ maka $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = C$$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. $A+B = B+A$ (hukum komutatif untuk penjumlahan)

2. $A+(B+C) = (A+B)+C$ (hukum asosiatif untuk penjumlahan)

3. $A+O = O+A = A$

4. $(A+B)^T = A^T + B^T$

5. Ada matriks B sedemikian sehingga $A + B = B + A = 0$ yaitu $B = - A$

Pengurangan matriks

Jika $A - B = C$, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen A dan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks ini dapat dipandang sebagai penjumlahan, yaitu $A + (-B)$

<u>Contoh</u>: $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{atau } A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks dengan Bilangan Real (Skalar)

Matriks A dikalikan dengan suatu bilangan real k maka kA diperoleh dari hasilkali setiap elemen A dengan k.

Contoh: $P = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ maka $4P = 4 \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}$

Jika a dan b bilangan real dan B, C dua matriks dengan ordo sedemikian hingga dapat dilakukan operasi hitung berikut, maka berlaku sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar :

1) $a(B+C)=aB+aC$

2) $a(B-C) = aB-aC$

3) $(a+b)C = aC+bC$

4) $(a-b)C = aC-bC$

5) $(ab)C = a(bC)$

6) $(aB)^T = aB^T$

PERKALIAN MATRIKS

Dua matriks AB dapat dikalikan bila dan hanya bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B. Jadi $A_{mxn} B_{nxp}$ bisa didefinisikan, tapi $B_{nxp} A_{mxn}$ tidak dapat didefinisikan.

$$\underset{mxn}{A} \qquad \underset{nxp}{B} \qquad = \qquad \underset{mxp}{AB}$$

Perhatikan bahwa hasil kali matriks AB berordo mxp

Elemen-elemen dari AB diperoleh dari hasil kali setiap baris pada matriks A dengan setiap kolom pada matriks B, kemudian dijumlahkan menjadi satu elemen.

Contoh perkalian matriks 1xp dengan matriks px1 :

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \; B_{1x3}\,C_{3x1} = \begin{bmatrix} (6X4)+(8X7)+(7X2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 94 \end{bmatrix}$$

Contoh perkalian matriks px1 dengan matriks 1xp:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \; A_{3x1}\,B_{1x3} = \begin{bmatrix} 2x6 & 2x8 & 2x7 \\ 5x6 & 5x8 & 5x7 \\ 4x6 & 4x8 & 4x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 14 \\ 30 & 40 & 35 \\ 24 & 32 & 28 \end{bmatrix}$$

Hasilkalinya merupakan suatu matriks berordo 3X3.

Contoh perkalian matriks mxn dengan matriks nxp:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{2x2} B_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1x1)+(2x0) & (1x0)+(2x2) & (1x1)+(2x0) \\ (3x1)+(4x0) & (3x0)+(4x2) & (3x1)+(4x0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat perkalian matriks dengan matriks :

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $A(B+C) = AB + AC$

3) $(B+C)A = BA + CA$

4) $A(B-C) = AB-AC$

5) $(B-C)A = BA-CA$

6) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

7) $AI = IA = A$