DERET FORIER

Bila a_n dan b_n yang merupakan konstanta sebarang dari f(x) yang berbentuk deret trigonometri tak hingga f(x)= $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ yang periodis dengan periode 2L memenuhi syarat-syarat dirichlet berikut maka deret dari f(x) ini dinamakan <u>Deret Fourier</u>.

Syarat dirichlet tersebut adalah,

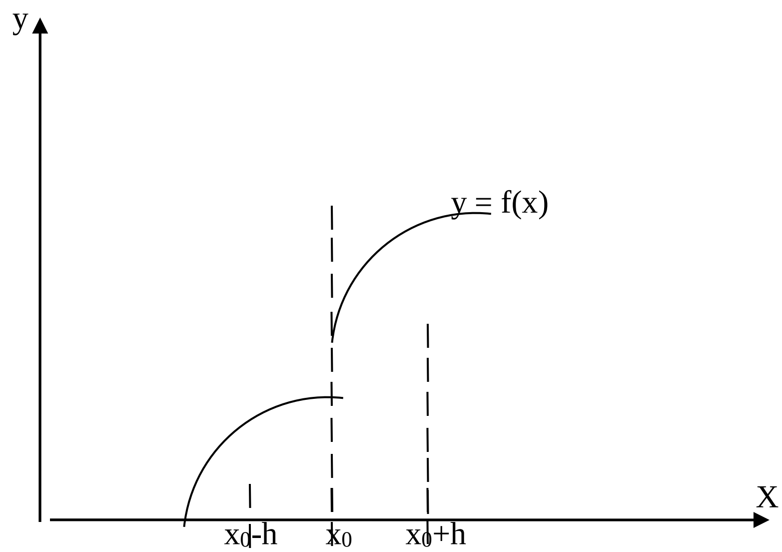
1. f(x) tertentu,berharga satu, continue kecuali diberhingga banyak titik pada (-L,L).
2. f(x), diluar interval (-L,L) periodis dengan periode 2L.
3. f(x), $f'(x)$ continue bagian demi bagian.
4. f(x) mempunyai harga ekstrim yang banyaknya berhingga.

<u>Perhatikan.</u>

Bila f(x) mempunyai diskontinuitas berhingga pada $x=x_0$ maka nilai f(x) harus diambil nilai rata-ratanya yaitu,

F(x)= $\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)+\lim_{h\to 0} f\left(x_0-h\right)\right)$

Bila kedua limit ini ada dan berbeda.



Mencari a_n dan b_n.

Dari persamaan deret fourier untuk

f(x)= $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ diganda dengan cos $\frac{m\pi x}{L}$, kemudian diintegralkan dengan batas dari –L ke L, ke x hingga diperoleh :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

$$\cos\frac{m\pi x}{L}$$

(Dalam interval konvergensi deret dapat diintegrasikan suku demi suku) hingga,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \right)$$

Perhatikan penyelesaiannya.

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0$$

Pandang rumus trigonometri cos A cos B = $\frac{1}{2}\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)$

Sehingga untuk m,n bilangan alam positip dan $\mathrm{m} \neq \mathrm{n}$, maka

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos\frac{(n-m)\pi x}{L} \right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{L}}{\frac{(n+m)\pi}{L}} + \frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{L}}{\frac{(n-m)\pi}{L}} \right)_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)\pi - \sin-(n+m)\pi}{\frac{(m+n)\pi}{L}} + \frac{\sin(n-m)\pi - \sin-(n-m)\pi}{\frac{(n-m)\pi}{L}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}L\left(\frac{0-0}{(n+m)\pi} + \frac{0-0}{(n-m)\pi}\right) = 0.(m \neq n).$$

Jadi, untuk $\mathrm{m} \neq \mathrm{n}$ maka $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$

Untuk m=n $\neq 0$ maka didapat :

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1+\cos\frac{2m\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{L}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{L}\right)_{-L}^{L}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2L + \frac{L}{2m\pi}\left(\sin 2m\pi + \sin 2m\pi\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2L + \frac{L}{2m\pi}\left(0+0\right)\right) = L$$

Hingga diperoleh

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

. Pandang rumus trigonometri :

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B)+\sin(A+B)\right)$$

untuk $m \neq n$ maka didapat :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)+\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\,dx+\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(0+0)$$

$=0$

Untuk m=n, maka didapat :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{2m\pi x}{L}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{L}{2m\pi}\cos\frac{2m\pi x}{L}\,/_{-L}^{L}$$

$$=-\frac{1}{4m\pi}\left(\cos 2m\pi-\cos 2m\pi\right)$$

$$=-\frac{L}{4m\pi}(0)$$

$= 0$

untuk $m \neq n$ maka didapat :

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)+\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}\,dx+\int_{-L}^{L}\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}\,dx$$

$= \frac{1}{2}(0+0)$

$=0$

Sehingga $\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

Dengan demikian diperoleh persamaan:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0 + a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + 0$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = a_n L. \qquad (m = n)\ ;\ n \neq 0$$

Sehingga diperoleh:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, n = 1,2,3,4,....$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(xdx)$$

<u>Perhatikan.</u>

untuk $a_n=0$ tidak berarti $a_0=0$. untuk ini a_0 harus dihitung tersendiri.

Dengan jalan sama b_n dapat ditunjukkan,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad .\sin\frac{m\pi x}{L}$$

Hingga diperoleh,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx\right)$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = b_n.\mathrm{L}. \quad (m = n)\ ;\ n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx,\ \text{n = 1,2,3,……}$$

$b_0 =$ selalu nol

Dalam bidang teknik banyak kita jumpai penggunaan deret fourier dalam bentuk khusus yaitu dengan periode 2π dimana L diganti dengan π.
Dalam periode 2π yaitu $-\pi < x < \pi$ maka deret fourier dari f(x) adalah :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) dengan$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx.(n = 0,1,2,3,.......)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.(n = 1,2,3,........)$$

Selain tersebut diatas dalam periode 2L yaitu dalam bentuk umum (c, c + 2L) maka deret fourier dari f(x) adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ dengan}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \quad \text{(n = 0,1,2,3,….)}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \quad \text{(n = 0,1,2,3,….)}$$

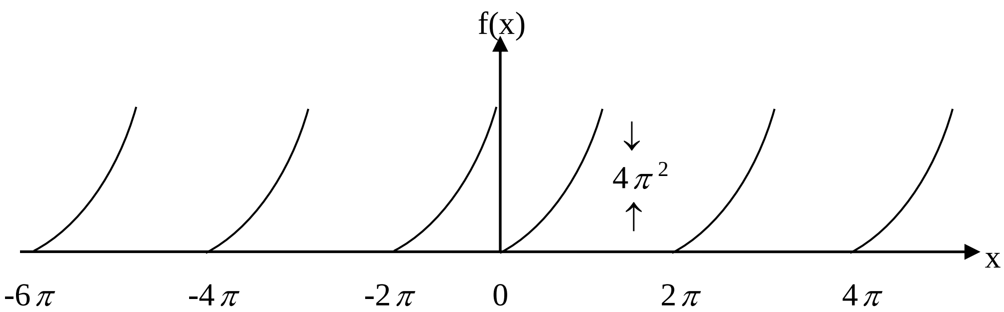
bila c=-L maka bentuk umum itu menjadi bentuk khusus ($-\pi, \pi$)

Contoh: 1

Ekspansi dalam $0<x<2\pi$ dengan periode 2π untuk $f(x) = x^2$ ke dalam deret fourier.

Penyelesaian

$y = x^2$ merupakan parabola dengan puncak (0,0)



Periode = 2L = $2\pi \rightarrow L = \pi$

Pilih c = 0 hingga $c \rightarrow c + 2L = 0 + 2\pi = 2\pi$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x^2\,d\sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(x^2\sin nx/_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin nx.2x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(x^2\sin nx/_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\,d\cos nx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[x^2\sin nx/_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\left(x\cos nx/_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[x^2\sin nx/_0^{2\pi} + \frac{2}{n}(x\cos nx/_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} d\sin nx)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[x^2\sin nx/_0^{2\pi} + \frac{2}{n}(x\cos nx/_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\sin nx/_0^{2\pi}\right]$$

$= \frac{1}{\pi n}\left[0 + \frac{2}{n}(2\pi\cos 2n\pi - 0) - 0\right]$

$= \frac{1}{\pi n}.\frac{2}{n}.2\pi\cos 2n\pi$

$= \frac{4}{n^2}.1$

$= \frac{4}{n^2}$ (n $\neq 0$)

Untuk n = 0 maka didapat

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{3}x^3/_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx$

$= \frac{-1}{\pi n}\int_0^{2\pi} x^2 d\cos nx$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(x^2\cos nx/_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx.2x dx\right)$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(4\pi^2 - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x d\sin nx\right)$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(4\pi^2 - \frac{2}{n}\left(x\sin nx/_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin nx dx\right)\right)$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(4\pi^2 - \frac{2}{n}\left(0 + \frac{1}{n}\int d\cos nx\right)\right)$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(4\pi^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}\cos nx/_0^{2\pi}\right)\right)$

$= -\frac{1}{\pi n}\left(4\pi^2 - \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}(1-1)\right)\right)$

$= -\frac{4\pi}{n}$

Jadi ekspansi tersebut adalah :

$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$

Contoh 2

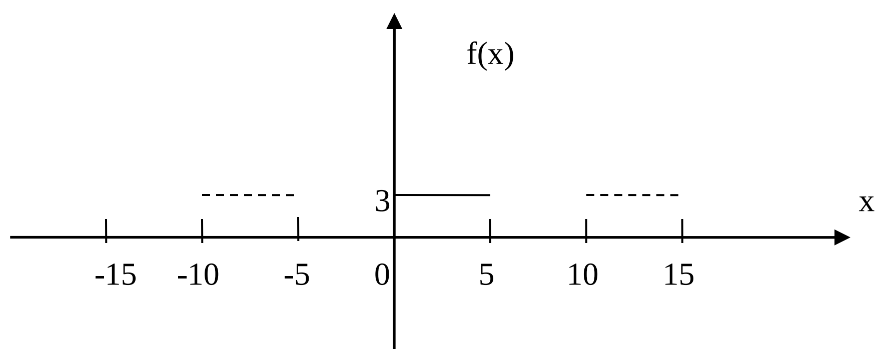
.Apabila kita gunakan periode 10 maka tentukan coefficient fourier untuk

a. $f(x) \begin{cases} 0\ , & -5 < x < 0 \\ 3\ , & 0 < x < 5 \end{cases}$

b. tentukan deret fourier ini.

c. bagaimana f(x) harus didefinisikan di x = -5, x = 0 dan x=5 agar deret fourier konvergen untuk $-5 \leq x \leq 5$

<u>penyelesaian</u>



a. Periode 2L = 10 $\rightarrow$ L = 5

Interval di ambil dari C ke c +2L. Jadi dari c= -5 ke c+ 2L = -5 + 10 = 5

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3.\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\ \Big|_{0}^{5}$$

$$= \frac{3}{n\pi}(\sin n\pi - \sin 0)$$

$$= \frac{3}{n\pi}(\sin n\pi) = 0$$

$(n \neq 0)$

Untuk n=0 maka a_0 dihitung sendiri :

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\cos 0 dx = \frac{3}{5}x/_0^5 = 3$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0} 0\sin\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 3\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 - 3.\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}/_0^5\right)$$

$$= \frac{-3}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{3}{n\pi}(1 - \cos nx)$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

b. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + ...\right)$$

c. berhubung pada titik-titik continue, deret adalah konvergen ke f(x) maka pada titik-titik discontinue agar deret onvergen haruslah diambil konvergen ke :

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bila kita definisikan f(x) sebagai,

$$f(x) = \begin{cases} 3/2, & x = -5 \\ 0, & -5 < x < 0 \\ 3/2, & x = 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \\ 3/2, & x = 5 \end{cases}$$

Maka deret konvergen ke f(x) untuk $-5 \le x \le 5$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. **Gambarkan grafik dari yungsi berikut;**

   $a. f(x) = \begin{cases} 3 & , \ 0 < x < 5 \\ -3 & , -5 < x < 0 \end{cases}$ **, periode = 10**

   $b. f(x) = \begin{cases} Sin\, x & , \ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \ , & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ **, periode = 2µ**

2. **Fungsi** $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ -5 < x < 0 \\ 3 & , 0 < x < 5 \end{cases}$ **, periode = 10**

   a. **Carilah koefisien Fourier yang bersisusaian dengan fungsi tersebut.**

   b. **Tuliskan deret Fourier fungsi tersebut.**