2 Aplikasi Integral Ganda Tiga

Integral ganda tiga sebagai perluasan integral ganda dua dinyatakan dalam bentuk umum

$$V = \iiint_R dv$$

Sebagaimana telah dinyatakan pada bab III, bahwa integral ganda tiga dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius, koordinat silider, dan koordinat bola.

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Cartesius maka

$$V = \iiint_R f(x,y,z)dv$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{y_1=y(z)}^{y_2=y(z)} \int_{x_1=x(y,z)}^{x_2=x(y,z)} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{z_1=z(y)}^{z_2=z(y)} \int_{x_1=x(z,y)}^{x_2=x(z,y)} f(x,y,z)dxdzdy$$

atau

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \int_{z_1=a}^{z_2=b} \int_{x_1=x(z)}^{x_2=x(z)} \int_{y_1=y(x,z)}^{y_2=y(x,z)} f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{z_1=z(x)}^{z_2=z(x)} \int_{y_1=x(z,x)}^{y_2=y(z,x)} f(x,y,z)dydzdx$$

atau

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} \int_{z_1=z(y,x)}^{z_2=z(y,x)} f(x,y,z)dzdydx$$

$$= \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} \int_{z_1=z(x,y)}^{z_2=z(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Tabung maka

$$V=\iiint_R f(x,y,z)dv \quad \iiint_R f(r,\theta,z)\,dv=\int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta}\int_{r_1=\rho(\theta)}^{r_2=\rho(\theta)}\int_{z_1=z(r,\theta)}^{z_2=z(r,\theta)} f(r,\theta,z)rdzdrd\theta$$

Jika dinyatakan dalam bentuk koordinat Bola maka

$$V=\iiint_R f(x,y,z)dv$$

$$\iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\,dv=\int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta}\int_{\phi_1=\rho(\theta)}^{\phi_2=\rho(\theta)}\int_{\rho_1=\rho(\phi,\theta)}^{\rho_2=\rho(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

Selanjutnya integral ganda tiga dapat digunakan untuk menentukan volume (isi) bendan dan secara umum volume benda dengan menggunakan integal ganda tiga adalah

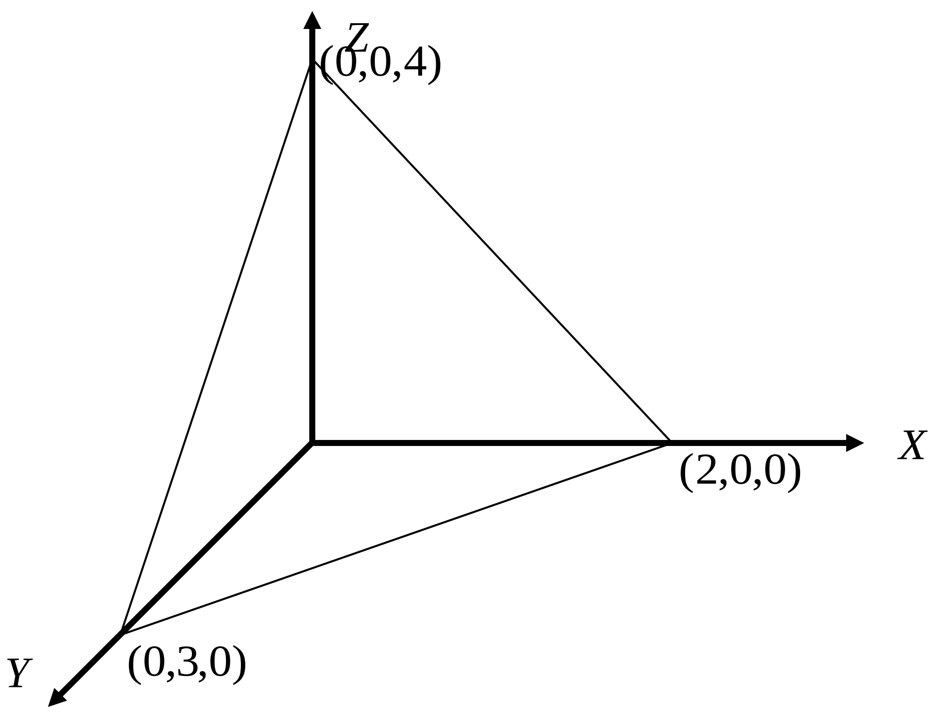
$$V=\iiint_R dv$$

dengan menganggap bahwa f(x,y,z)=1

Untuk perhitungan selanjutan dapat menggunakan koordinat Cartesius, koordinat tabung, atau koordinat bola.

Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

6. Dengan menggunakan integral ganda tiga tentukan Volume bangun yang dibatasi oleh $6x+4y+3z=12$



Volume Limas = $\frac{1}{3} Luas\ \ alas\ \ x\ tinggi$

= $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x.y).z$

= 4 SI

Dengan integral ganda tiga didapat

$$V = \iiint_R dv$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} \int_0^{\frac{12-6x-4y}{3}} dzdxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^{\frac{12-4y}{6}} (12-6x-4y)dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12x - 3x^2 - 4yx\right]_0^{\frac{12-4y}{6}} dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12\left(\frac{12-4y}{6}\right) - 3\left(\frac{12-4y}{6}\right)^2 - 4y\left(\frac{12-4y}{6}\right)dy\right]$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[2(12-4y) - \frac{1}{12}(144-96y+16y^2) - 8y + \frac{8}{3}y^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \left[12 - 8y + \frac{4}{3}y^2\right]dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(12y - 4y^2 + \frac{4}{9}y^3\right)_0^3$$

$$= \frac{1}{3}\left(12(3) - 4(3)^2 + \frac{4}{9}(3)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}(36 - 36 + 12) = 4$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN.

1. Dengan menggunakan integral ganda dua hitunglah luas suatu luasan berikut ini:
   a. daerah yang dibatasi oleh 3x + 4y = 24, x = 0, y = 0
   b. dibatasi oleh parabola-parabola $y = 2 - x^2$ dan $y = 3x^2 - 6x$
   c. di kuadran I dibatasi oleh $y^2 = 6x, y = 0, dan\ x = 6$
2. Carilah luas bagian bidang x + y + z = 6 dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$
3. entukan volume benda pejal berikut ini dengan menggunakan integral ganda tiga dalam koordinat Cartesius.
   a. di dalam tabung $x^2 + y^2 = 9$ di atas z = 0 dan dibawah x + z = 4
   b. dibatasi oleh $y = 0,\ z = 0, x + y = 2, 2y + x = 6, y^2 + z^2 = 4$
4. Tentukan volume berikut dengan menggunakan integral ganda tiga dalam koordinat tabung
   a. persekutuan silinder $x^2 + z^2 = 9$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$
   b. benda pejal yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,di bawah oleh z = 0 dan secara menyamping oleh $x^2 + y^2 = 4$