

APLIKASI INTEGRAL GANDA(Dr. Jemakmun, M.Si)

1. Aplikasi Integral Ganda Dua

Integral ganda (rangkap) dua yang bentuk umumnya : $\iint_R f(x, y) dA$

dapat diaplikasikan untuk beberapa persoalan, diantaranya adalah:

a. Luas suatu Luasan (Bidang)

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral ganda dua jika $f(x,y) = 1$, sehingga integral ganda dua menjadi :

$$A = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} dy dx \quad \text{atau} \quad \Leftrightarrow A = \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} dx dy$$

Dalam koordinat polar, bentuk di atas dinyatakan dengan:

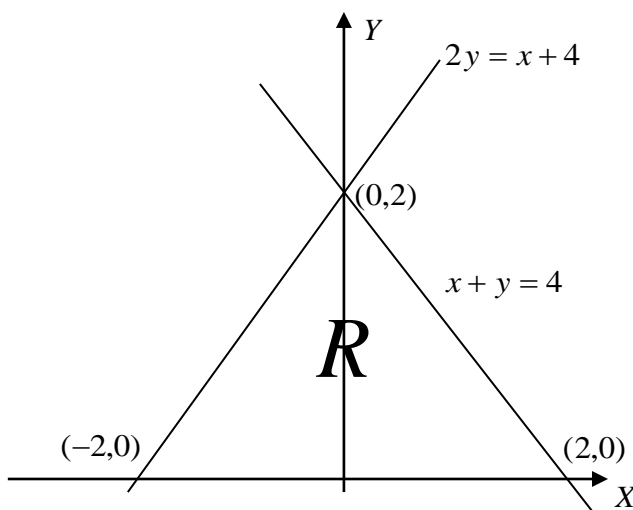
$$A = \iint_R dA = \int_{\theta_1=\alpha}^{\theta_2=\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho d\theta$$

Contoh :

1. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh $x + y = 2$ dan $2y = x + 4$

Jawab :

Sebelum ditentukan luasnya, daerah tersebut digambar terlebih dahulu

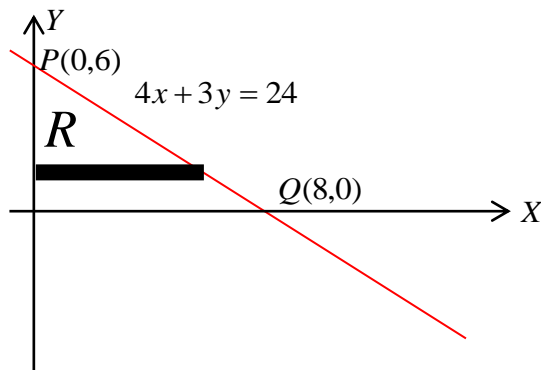


$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R dA = \int_0^2 \int_{2y-4}^{2-y} dx dy = \int_0^2 (x)_{2y-4}^{2-y} dy \\
 &= \int_0^2 (2-y) - (2y-4) dy \\
 &= \int_0^2 (6-3y) dy \\
 &= (6y - \frac{3}{2} y^2) \Big|_0^2 = (12 - 6) = 6
 \end{aligned}$$

2. Gunakan integral ganda dua untuk menentukan luas suatu luasan yang dibatasi oleh:

$$3x + 4y = 24, x = 0, y = 0$$

Jawab



Luas luasan di atas adalah

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \iint_R dA \\
 &= \int_0^6 \int_0^{\frac{24-4y}{3}} dx dy \\
 &= \int_0^6 [x]_0^{\frac{24-4y}{3}} dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^6 (24 - 4y) dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} [24y - 2y^2]_0^6 \\
&= \frac{1}{3} (24 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2) - (24 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2) \\
&= \frac{1}{3} (144 - 72) \\
&= 24 \text{ satuan luas}
\end{aligned}$$

b. Pusat Luasan

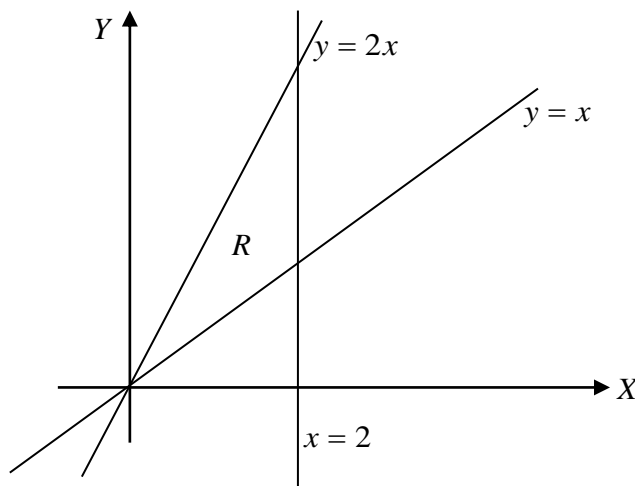
Misal R adalah suatu luasan yang dibatasi oleh kurva-kurva, maka luasan tersebut mempunyai pusat luasan dan dinyatakan dengan (\bar{x}, \bar{y}) dengan hubungan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R dA}$$

dengan $\iint_R dA$ adalah luas dari luasan dimaksud.

Contoh

- 1) Tentukan pusat luasan berikut dengan menggunakan integral ganda dua. $y = 2x$, $y = x$, $x = 0$, dan $x = 2$



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan (\bar{x}, \bar{y}) , dengan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R) = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} dy dx = \int_0^2 (y)_x^{2x} dx = \int_0^2 x \, dx = \left(\frac{1}{2} x^2 \right)_0^2 = 2$$

dan

$$\iint_R y \, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} y \, dy dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_x^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 [4x^2 - x^2] dx = \frac{1}{2} (x^3)_0^2 = \frac{9}{2}$$

$$\iint_R x \, dA$$

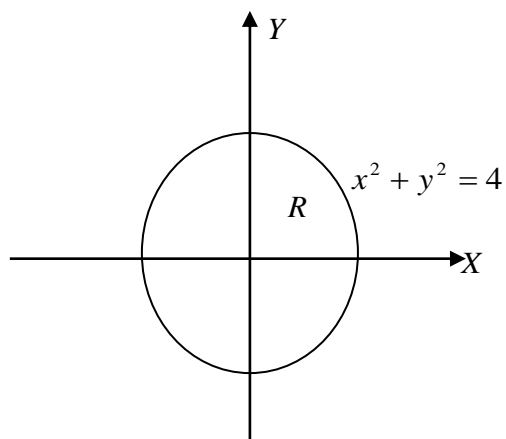
$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_x^{2x} x \, dy dx = \int_0^2 [xy]_x^{2x} dx = \int_0^2 [2x^2 - x^2] dx = \left(\frac{1}{3} x^3 \right)_0^2 = \frac{9}{2}$$

sehingga $\bar{x} = \frac{9}{9}$ dan $\bar{y} = \frac{9}{9}$

diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh $y = 2x$, $y = x$, $x = 0$, dan $x = 2$

adalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

2) Tentukan pusat luasan dengan batasan $x^2 + y^2 = 4$ pada kuadra I.



Pusat suatu luasan dinyatakan dengan (\bar{x}, \bar{y}) , dengan

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \, dA}{\iint_R dA} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \, dA}{\iint_R dA}$$

Luasan di atas dengan menggunakan integral ganda dua didapat:

$$A(R) = \iint_R dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy dx = \int_0^2 (y)_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t \, dt$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\frac{\sin t \cos t}{2} - \frac{1}{2} t \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \pi$$

dan

$$\iint_R y \, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y \, dy dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 [4-x^2] dx = \frac{1}{2} (4x - x^3)_0^2 = 0$$

$$\iint_R x \, dA$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, dy dx = \int_0^2 [xy]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^2 [x\sqrt{4-x^2}] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cdot 2 \cos t \cdot 2 \cos t \, dt$$

$$\Leftrightarrow 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^2 t \, dt = -8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, d(\cos t) = -\frac{8}{3} (\cos^3 t)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$$

sehingga $\bar{x} = \frac{8}{3\pi}$ dan $\bar{y} = \frac{0}{\pi}$, diperoleh pusat luasan yang dibatasi oleh

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ pada kuadra I. adalah } \left(\frac{8}{3\pi}, 0 \right)$$

c. Luas Permukaan Lengkung

Jika S adalah bagian dari permukaan R' dengan persamaan $z=f(x,y)$. R' dapat diproyeksikan pada bidang koordinat yang cocok sehingga menghasilkan suatu daerah R pada bidang dalam ruang. Dengan demikian fungsinya terintegralkan pada R .

1. Jika R' diproyeksikan pada XOY maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$

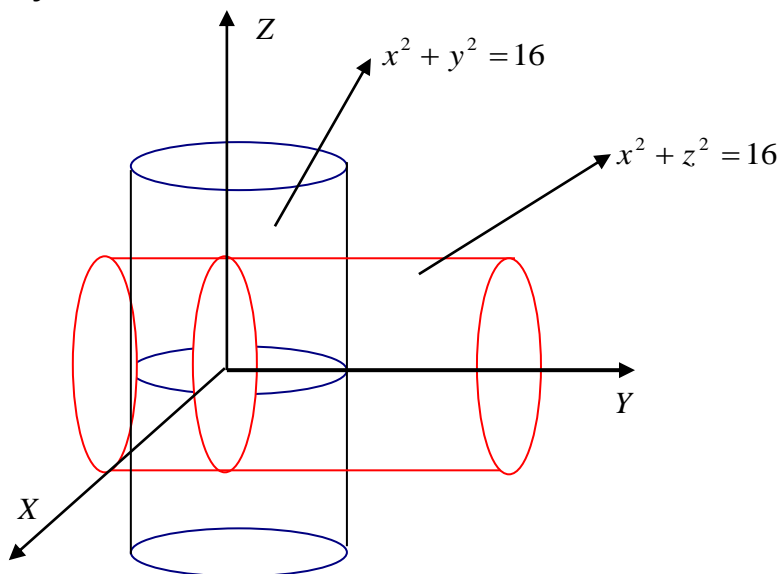
2. Jika R' diproyeksikan pada YOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dA$

3. Jika R' diproyeksikan pada XOZ maka $S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dA$

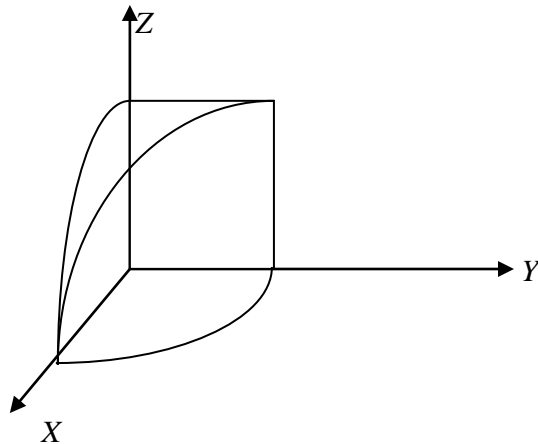
tanda integrasi urutannya menyesuaikan dengan bidang proyeksi, Jika bidang proyeksinya X)Y maka dA berubah menjadi $dx dy$ atau dx .

Contoh; Carilah luas permukaan silinder $x^2 + z^2 = 16$ didalam silinder $x^2 + y^2 = 16$

Jawab



Perpotongan kedua selinder menghasilkan bangun



dengan menganggap bidang XOY sebagai bidang proyeksi, maka

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

$$z = \sqrt{16 - x^2}, \text{ sehingga } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \text{ dan } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ sehingga}$$

$$S = 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2} dy dx$$

$$\Leftrightarrow 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} dy dx$$

$$\Leftrightarrow 32 \int_0^4 dx = 32(4) = 128 \text{ satuan luas}$$

d. Volume Bangun Ruang

Volume bangun suatu ruang dapat dinyatakan dengan menggunakan integral ganda dua dan dituliskan dengan

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

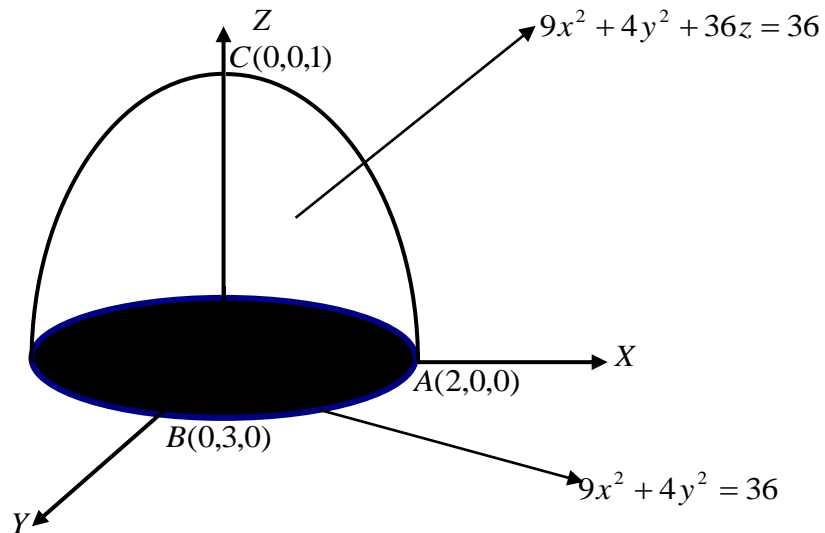
$$\Leftrightarrow A = \int_{x_1=a}^{x_2=b} \int_{y_1=y(x)}^{y_2=y(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{atau} \quad \Leftrightarrow A = \int_{y_1=a}^{y_2=b} \int_{x_1=x(y)}^{x_2=x(y)} f(x, y) dx dy$$

Contoh

1. Cari volume irisan $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ oleh bidang $z = 0$

Jawab

Gambar bangun yang pembatasnya $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ adalah



$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

Dengan melakukan perubahan $dA = dydx$ diperoleh

$$V = 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}} \frac{36-9x^2-4y^2}{36} dydx$$

$$= \frac{4}{36} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}} 36-9x^2-4y^2 dydx$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^2 \left[36y - 9x^2y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^{\sqrt{36-9x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^2 36 \left(\frac{1}{2} \sqrt{36-9x^2} \right) - 9x^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{36-9x^2} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{36-9x^2} \right)^3 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \int_0^2 (18\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2}) - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} (36-9x^2)\sqrt{36-9x^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 (18\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} - \frac{1}{6}(36-9x^2)\sqrt{36-9x^2}) dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 (18-6)\sqrt{36-9x^2} - \frac{9}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} + \frac{3}{2}x^2\sqrt{36-9x^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 12\sqrt{36-9x^2} - \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{6}\right)x^2\sqrt{36-9x^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 [12\sqrt{36-9x^2} - 3x^2\sqrt{36-9x^2}] dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 [12\sqrt{9(4-x^2)} - 3x^2\sqrt{9(4-x^2)}] dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}] dx
\end{aligned}$$

Dengan metode substitusi $x = 2 \sin t$ didapat $dx = 2 \cos t dt$

Untuk $x = 2$ maka $t = \frac{\pi}{2}$

Untuk $x = 0$ maka $t = 0$

Sehingga

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \int_0^2 [36\sqrt{(4-x^2)} - 9x^2\sqrt{(4-x^2)}] dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [36\sqrt{(4-4\sin^2 t)} - 9(4\sin^2 t)\sqrt{(4-4\sin^2 t)}] (2 \cos t dt) \\
&= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [36(2 \cos t) - 36(1-\cos^2 t)(2 \cos t)] 2 \cos t dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 \cos t) - (1 - \cos^2 t)(2 \cos t)] 2 \cos t \, dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 \cos^2 t - 4 \cos^2 t + 4 \cos^4 t] \, dt \\
&= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt
\end{aligned}$$

Karena $\int \cos^m x \, dx = \frac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \frac{(m-1)}{m} \int \cos^{m-1} x \, dx$

Maka

$$\begin{aligned}
&= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt \\
&= 16 \left[\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2} t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 16 \left(0 + \frac{3}{4} \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) \right) - 16 \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\
&= 3\pi \text{ satuan isi}
\end{aligned}$$

Volume bangun di atas dapat juga dilakukan dengan mengubah urutan tanda integrasi $dx dy$.

Dengan melakukan perubahan $dA = dy dx$ diperoleh

$$\begin{aligned}
V &= 4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{36-4y^2}} \frac{36-9x^2-4y^2}{36} \, dx dy \\
&= \frac{4}{36} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{36-4y^2}} 36-9x^2-4y^2 \, dx dy \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 \left[36x - 3x^3 - 4y^2 x \right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{36-4y^2}} \, dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9} \int_0^3 36 \left(\frac{1}{3} \sqrt{36-4y^2} \right) - 3 \left(\frac{1}{3} \sqrt{36-4y^2} \right)^3 - 4y^2 \left(\frac{1}{3} \sqrt{36-4y^2} \right) dy \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 12 \sqrt{36-4y^2} - \frac{1}{9} (36-4y^2) \sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3} y^2 \sqrt{36-4y^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 12 \sqrt{36-4y^2} - 4 \sqrt{36-4y^2} + \frac{4}{9} y^2 \sqrt{36-4y^2} - \frac{4}{3} y^2 \sqrt{36-4y^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 (12-4) \sqrt{36-4y^2} + \left(\frac{4}{9} y^2 - \frac{4}{3} y^2 \right) \sqrt{36-4y^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 8 \sqrt{4(9-y^2)} - \frac{8}{9} y^2 \sqrt{4(9-y^2)} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^3 16 \sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9} y^2 \sqrt{9-y^2} dx
\end{aligned}$$

Dengan metode substitusi $y = 3 \sin t$ didapat $dx = 3 \cos t \, dx$

Untuk $x = 3$ maka $t = \frac{\pi}{2}$

Untuk $x = 0$ maka $t = 0$

Sehingga

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{9} \int_0^3 16 \sqrt{9-y^2} - \frac{16}{9} y^2 \sqrt{9-y^2} dx \\
&= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[16 \sqrt{(9-9 \sin^2 t)} - \frac{16}{9} (3 \sin t)^2 \sqrt{9-9 \sin^2 t} \right] 3 \cos t \, dt \\
&= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[16 \sqrt{9(1-\sin^2 t)} - \frac{16}{9} (9 \sin^2 t) \sqrt{9(1-\sin^2 t)} \right] (3 \cos t \, dt) \\
&= \frac{3}{9} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [16(3 \cos t) - 16(1-\cos^2 t)(3 \cos t)] \cos t \, dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [48 \cos t - 48 \cos t + 48 \cos^3 t] \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 48 \cos^4 t \, dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

Karena $\int \cos^m x \, dx = \frac{\sin x \cos^{m-1} x}{m} + \frac{(m-1)}{m} \int \cos^{m-1} x \, dx$

Maka

$$16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt$$

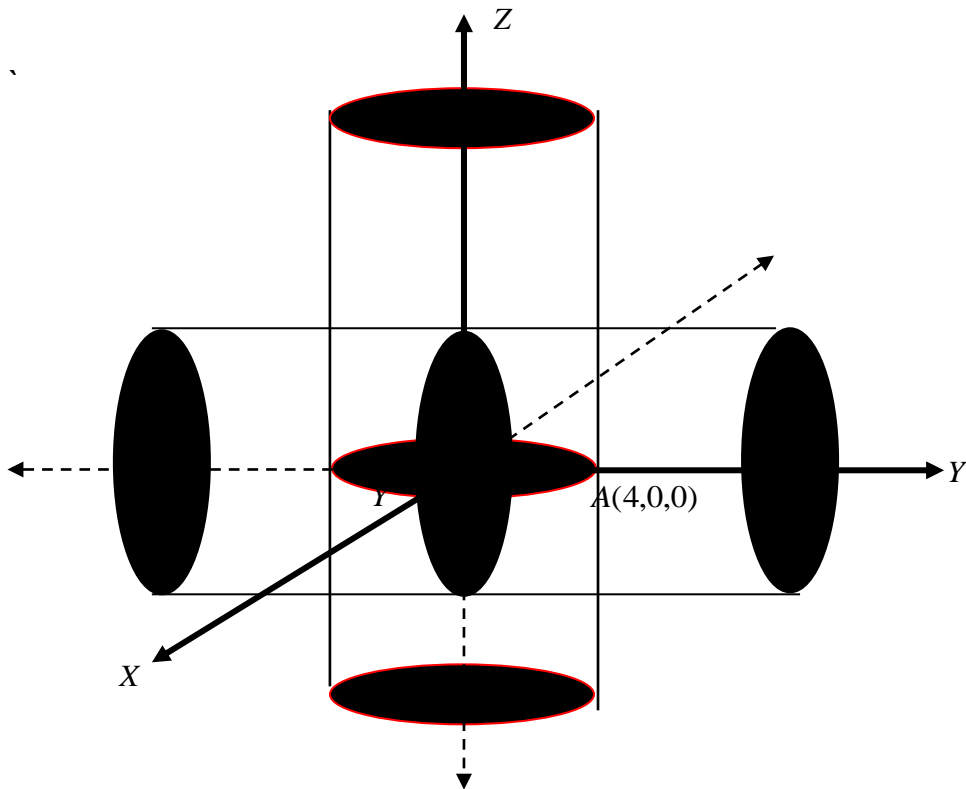
$$= 16 \left[\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2} t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 16 \left(0 + \frac{3}{4} \left(0 + \frac{\pi}{4} \right) - (0) \right) = 3\pi$$

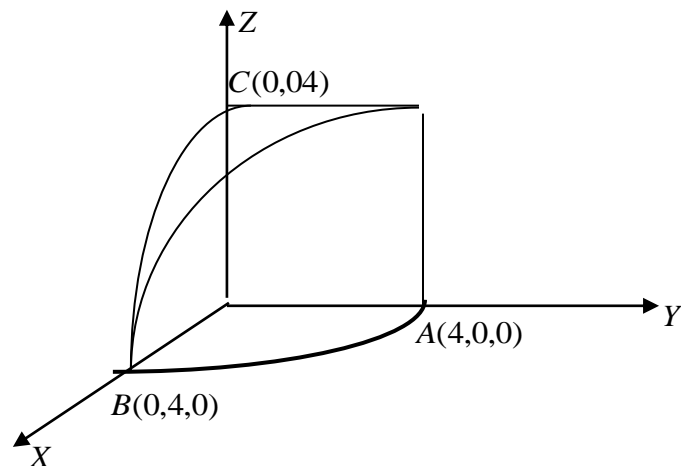
2. Carilah volume persekutuan silinder $x^2 + y^2 = 16$ dan $x^2 + z^2 = 16$

Jawab

Gambar silinder persekutuannya adalah:



Gambar di oktan I persekutuan silinder di atas adalah

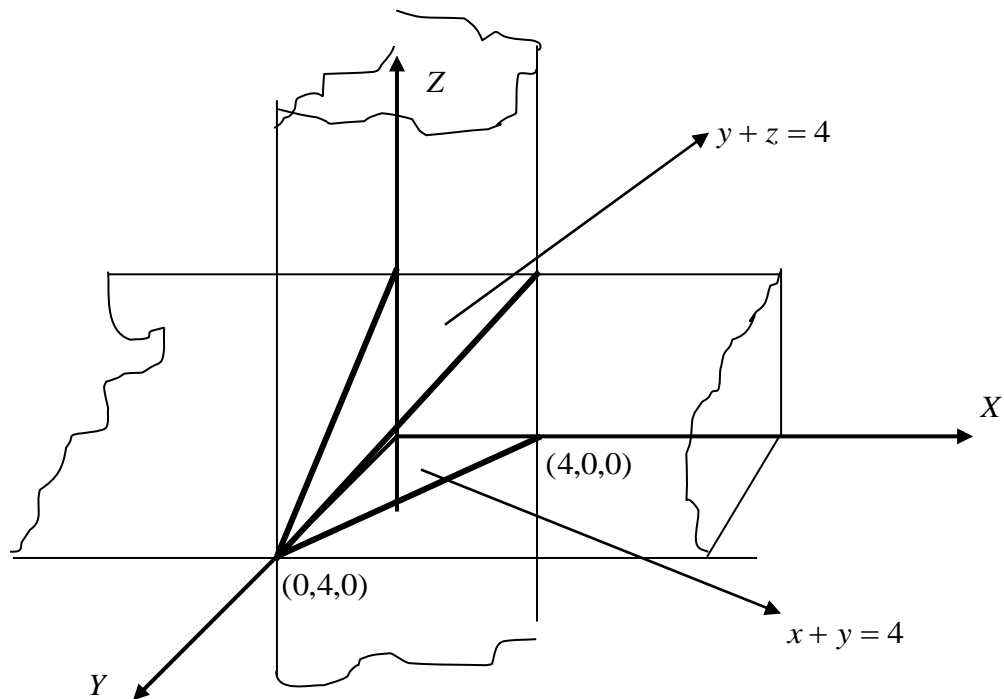


$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R f(x, y) \, dA \\
 &= 2 \int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2} \, dy \, dx \\
 &= 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16-x^2} \, dy \, dx \\
 &= 8 \int_0^4 \left(y \sqrt{16-x^2} \right)_0^{\sqrt{16-x^2}} \, dx \\
 &= 8 \int_0^4 (16-x^2) \, dx \\
 &= 8 \left(16x - \frac{1}{3}x^3 \right)_0^4 \\
 &= 8 \left[\left(16 \cdot 4 - \frac{1}{3}4^3 \right) - \left(16 \cdot 0 - \frac{1}{3}0 \right) \right] \\
 &= 8(128/3) \\
 &= \frac{1024}{3} \text{ satuan isi}
 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan integral ganda dua, tentukan volume bangun ruang yang dibatasi oleh bidang $z = 0$, $x + y = 4$ dan $y + z = 4$

Jawab

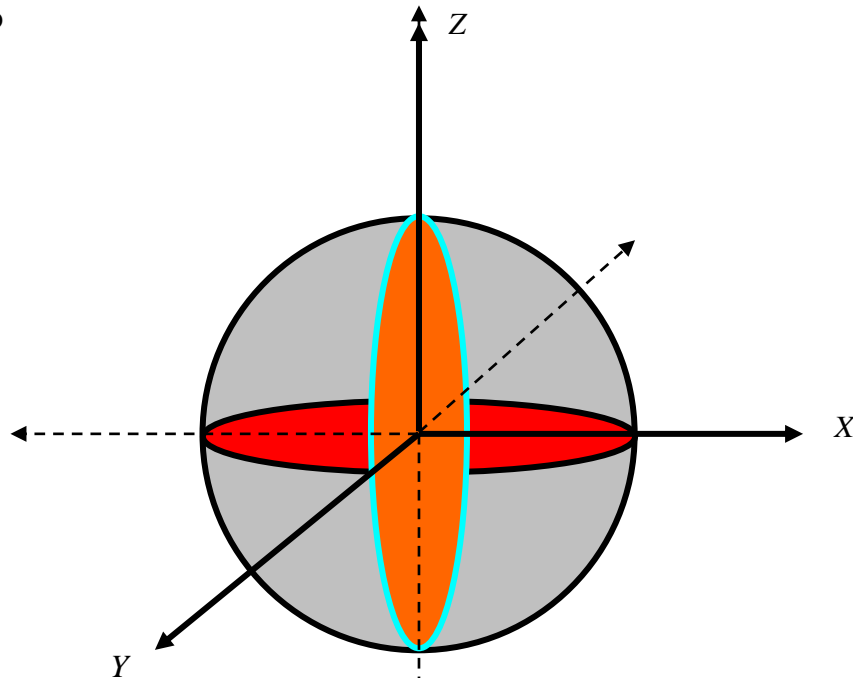
Bangun persekutuan bidang seperti gambar berikut



$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R f(x, y) \, dA \\
 &= \int_0^4 \int_0^{4-y} 4 - y \, dx \, dy \\
 &= \int_0^4 (4x - yx)_0^{4-y} \, dy \\
 &= \int_0^4 4(4-y) - y(4-y) \, dy \\
 &= \int_0^4 (16 - 4y - 4y + y^2) \, dy \\
 &= \int_0^4 (16 - 8y + y^2) \, dy \\
 &= \left[16y - \frac{8}{3}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^4 \\
 &= \left[16 \cdot 4 - \frac{8}{3} \cdot 4^2 + \frac{1}{3} \cdot 4^3 \right] - \left[16 \cdot 0 - \frac{8}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right] \\
 &= 64 - \frac{128}{3} + \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

4. Tentukan volume bola $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ menggunakan integral ganda dua.

Jawab



Dengan integral ganda dua diperoleh

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} \, dx dy \\ &= 8 \int_0^{2\sqrt{r^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{(r^2-y^2)-x^2}} \sqrt{(r^2-y^2)-x^2} \, dx dy \end{aligned}$$

Dengan menggunakan substitusi fungsi trigonometri diperoleh

$$x = \sqrt{r^2-y^2} \cos t \quad \text{dan} \quad dx = -\sqrt{r^2-y^2} \sin t$$

untuk $x = 0$ didapat $t = \frac{\pi}{2}$ dan untuk $x = \sqrt{r^2-y^2}$ didapat $t = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} &8 \int_0^{2\sqrt{r^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{(r^2-y^2)-x^2}} \sqrt{(r^2-y^2)-x^2} \, dx dy \\ &= 8 \int_0^{2\sqrt{r^2-y^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(r^2-y^2)-(r^2-y^2)\sin^2 t} (\sqrt{r^2-y^2} \cos t) \, dt dy = 8 \int_0^{2\sqrt{r^2-y^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2-y^2) \cos^2 t \, dt dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2 - y^2) \left(\frac{\sin t \cos t}{2} + \frac{1}{2} t \right) dy \\
&= 8 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^r (r^2 - y^2) dy \\
&= 2\pi \left(r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right)_0^r = 2\pi \left(r^2 r - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3
\end{aligned}$$

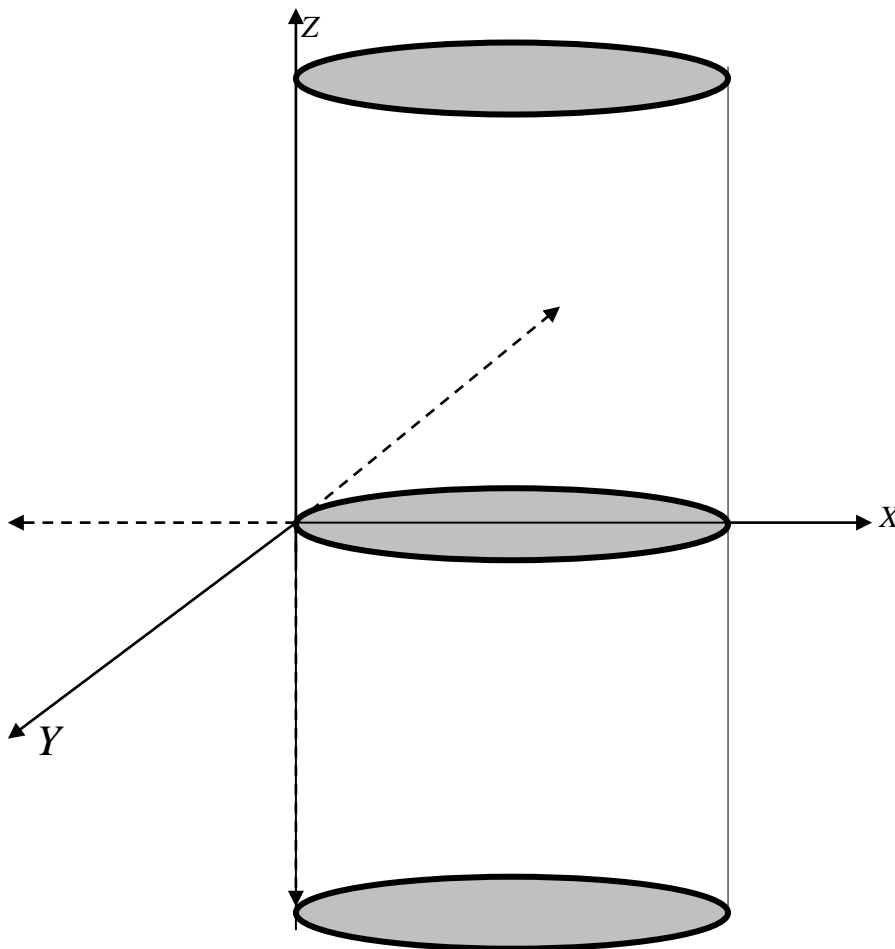
5. Gambar kurva ruang $x^2 + y^2 = 4x$

Jawab

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$



**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN DIKIRIMKAN
SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

1. Dengan menggunakan integral ganda dua hitunglah luas suatu luasan berikut ini:
 - a. dibatasi oleh parabola $y^2 = 4 - x$ dan $y^2 = 4 - 4x$
 - b. dibatasi oleh kurva $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$ dan $x = 0$
 - c. di kuadran I dibatasi oleh $y^2 = 6x$, $y = 0$, dan $x = 6$
2. Tentukan volume berikut dengan menggunakan integral ganda tiga dalam koordinat tabung
 - a. bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
 - b. persekutuan silinder $x^2 + z^2 = 9$ dan silinder $x^2 + y^2 = 9$
 - c. benda pejal yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, di bawah oleh $z = 0$ dan secara menyamping oleh $x^2 + y^2 = 4$