TURUNAN PARSIAL

a. Fungsi dua peubah atau lebih

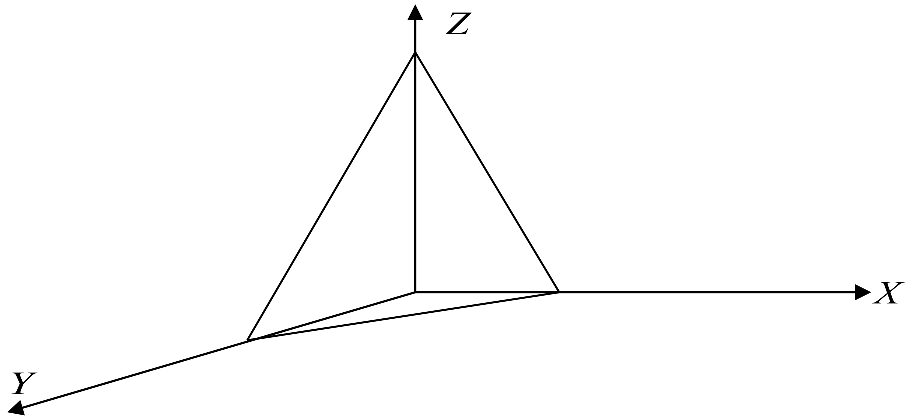
Fungsi dua peubah atau lebih dapat ditulis dalam bentuk eksplisit atau implisit. Jika fungsi dua peubah dinyatakan dalam bentuk eksplisit, maka secara umum ditulis dalam bentuk z = F(x,y). Sebaliknya jika fungsi dituliskan dalam bentuk implisit, secara umum ditulis dalam bentuk F(x,y,z) = 0.

Contoh:

1. $z = 2x + y$
2. $z = \ln \left|x^2 - 2y^4\right|$
3. $z = 1 - 2\sqrt{\dfrac{1}{2\sin x - \sin y}}$
4. $xy + xz - yz = 0$
5. $xy - e^x \sin y = 0$
6. $\ln \left|x^2 - y^2\right| - \arctan \dfrac{y}{x} = 0$
7. $\arctan \dfrac{y}{x} - 2z = 0$

Pada contoh di atas, fungsi yang ditulis dalam bentuk eksplisit adalah pada contoh 1,2, dan 3. Sedangkan contoh 4, 5, 6, dan 7 adalah fungsi yang ditulis dalam bentuk implisit. Semua fungsi dalam bentuk eksplisit dengan mudah dapat dinyatakan dalam bentuk implisit. Akan tetapi tidak semua bentuk implisit dapat dinyatakan dalam bentuk eksplisit.

Untuk menggambar fungsi dua peubah dapat dengan membuat sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu x, sumbu y, dan sumbu z seperti gambar berikut:



b. Turunan Parsial Fungsi Dua dan Tiga Peubah

Misal z = F(x,y) adalah fungsi dengan variable bebas x dan y. Karena x dan y variable bebas maka terdapat beberapa kemungkinan yaitu:

1. y dianggap tetap, sedangkan x berubah-ubah.
2. x dianggap tetap, sedangkan y berubah-ubah
3. x dan y berubah bersama-sama sekaligus.

Pada kasus 1 dan 2 diatas mengakibatkan fungsinya menjadi fungsi satu peubah, sehingga fungsi tersebut dapat diturunkan dengan menggunakan definisi turunan pertama yang telah dipelajari pada kalkulus diferensial.

Definisi

Misal z = F(x,y) adalah fungsi dua peubah yang terdefinisi pada interval tertentu, turunan parsial pertama z terhadap x dan y dinotasikan dengan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dan didefinisikan oleh

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh :

Tentukan turunan parsial pertama dari

a. z = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta y)^2} - \sqrt{x^2 + y^2}}{\Delta y} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + (y+\Delta x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + (y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

b. z = Sin (x+y)

Jawab

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x + y) - \sin(x + y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x + \Delta x + y + x + y)\sin\frac{1}{2}(x + \Delta x + y - x - y)}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + y + \frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\,(x+y+\frac{\Delta x}{2})\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\,(x+y+\frac{\Delta x}{2})\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x / 2}.\frac{1}{2}$$

$= 2\cos(x+y)(1)(1/2)$

$= \cos(x+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + y + \Delta y) - \sin(x + y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(x+y+\Delta y+x+y)\sin\frac{1}{2}(x+y+\Delta y-x-y)}{\Delta y}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+y+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+y+\frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x}$$

$$= 2\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2}.\frac{1}{2}$$

$= 2\cos(x+y)(1)(1/2)$

$= \cos(x+y)$

Untuk memudahkan dalam menentukan turunan parcial dapat dilakukan dengan menggunakan metode sederhana sebagai berikut. Andaikan z = F(x,y) maka untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ sama artinya dengan menurunkan variabel x dan variabel y dianggap konstan dan selanjutnya y diturunkan. Demikian pula untuk menentukan $\frac{\partial z}{\partial y}$ sama artinya dengan menurukan variable y dan variable x dianggap konstant lalu diturunkan.

Dengan cara yang sama, andaikan W = F(x,y,z) adalah fungsi tiga peubah yang terdefinisi dalam selang tertentu maka turunan parsial pertama dinyatakan dengan $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, dan $\frac{\partial W}{\partial z}$ yang secara berturut didefinisikan oleh:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to o} \frac{F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to o} \frac{F(x, y+\Delta y, z) - F(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to o} \frac{F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z)}{\Delta z}$$

Asalkan limitnya ada.

Contoh:

1. Ditentukan F(x,y,z) = xyz + 2 tan $\left(\frac{y}{x}\right)$

   Carilah turunan parsial pertamanya.

   Dengan metode sederhana didapat

   a. $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = yz + \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

   $= \text{yz} - \frac{2yx^2}{x^2(1+y^2)}$

   b. $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = xz + \frac{2}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)$

   $= \text{xz} - \frac{2x^2}{x(1+y^2)}$

   c. $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = xy$

Untuk latihan para pembaca tentukan turunan persial fungsi-fungsi di bawah ini:

1. z = ln $\sqrt{x+y}$
2. z = 36 – x^2 – y^2
3. z = 3 - $\frac{1}{\sqrt{\sin(x+y)}}$
4. z = $xy^2 - 2x^2 + 3y^3$
5. z = arc tan $\frac{y}{x}$
6. F(x,y,z) = xy – yz + xz
7. F(x,y,z) = $\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$
8. F(x,y,z) = sin (xy) – 2e ^{xy}
9. F(x,y,z) = arc sin $\left(\frac{xy}{z}\right)$

Selanjutnya turunan parsial fungsi dua peubah atau lebih dapat ditentukan turunan parsial ke n, untuk n ≥ 2 turunan parsialnya dinamakan turunan parsial tingkat tinggi.

Dengan menggunakan analogi fungsi satu peubah dapat ditentukan turunan parsial tingkat 2, 3 dan seterusnya.

Jadi andaikan z = F(x,y) maka:

Turunan parsial tingkat dua adalah $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, dan\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Demikian pula, jika W = F(x,y,z)

Turunan parsial tingkat dua adalah

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}$$

Demikian seterusnya. Banyaknya turunan tingkat ditentukan oleh rumus m^n , dimana m banyaknya variabel dan n menunjukkan turunan ke-n

Contoh

Tentukan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dari fungsi berikut:

1. z = $\frac{xy}{x-y}$

   Jawab

   Dari z = $\frac{xy}{x-y}$, diperoleh $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x-y)-xy(1)}{(x-y)^2}$

$$= \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x-y)-xy(-1)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

   Sehingga $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)$$

$$= \frac{0(x-y)^2 - (-y^2)(2)(x-y)(1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{2xy^2 - 2y^3}{(x-y)^4}$$

Dan $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)$

$$= \frac{0(x-y)^2 - x^2(2)(x-y)(-1)}{(x-y)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 - yx^2}{(x-y)^4}$$

2. z = $\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$

3. z = sin 3x cos 4y

d. Differensial Total dan Turunan Total

Misal z = F(x,y), dan fungsi tersebut dapat diturunkan terhadap variable x dan y, maka diperoleh turuna parisal terhadap x dan turunan parsial terhadap y yang secara berturut-turut dinotasikan dengan

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ ------------- (1) dan

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ ------------- (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx$ dan $dz = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$

Jumlah diferensialnya diperoleh:

dz = $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$

Bentuk di atas disebut diferensial total.

Contoh.

1. Jika r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ dengan x = panjang sisi yang pendek, y = panjang sisi yang panjang

Differensial total

dr = $\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy$

dimana dr $\approx \Delta r$, dx $\approx \Delta x$, dx $\approx \Delta y$

didapat

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y$$

$$= \frac{15}{\sqrt{15^2+20^2}}\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{20}{\sqrt{15^2+20^2}}\left(-\frac{5}{16}\right)$$

$$= \frac{15}{25}\frac{5}{8} - \frac{20}{25}\frac{5}{16}$$

$$= \frac{1}{8} \text{ cm}$$

2. Suatu tempat berbentuk silinder (tabung) dengan jari-jari alasnya 15 cm dan tingginya 20 cm. Karena pemuaian, tinggi slinder bertambah 0,5 cm/det dan tingginya berkurang 1 cm/det. Hitunglah perubahan yang terjadi terhadap volume dan luas permukaan silinder.

Jawab.

Misal jari-jari tabung r, tinggi h dan volume I, maka

I = $\pi r^2 h$

I = I(r,h)

Diketahui r = 15 cm, h = 20, $\frac{\Delta r}{\Delta t} = 0{,}5 cm/\det$, $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -1 cm/\det$

Dengan definisi turunan total

I = I(r,h) dengan r dan h bergantung pada waktu t, maka diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial I}{\partial h}\frac{dh}{dt}$$

$$= 2\pi r h\frac{dr}{dt} + \pi r^2\frac{dh}{dt}$$

Turunan Parsial Fungsi Implisit

Turunan Fungsi Implisit 2 Peubah

Fungsi implisit dua peubah secara umum dinyatakan dengan F(x,y) = 0.

Untuk menentukan turunan parsialnya dapat dilakukan dengan menggunakan kaidah differensial total.

Karena f(x,y) = 0, maka df(x,y) = d(0)

Atau

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

Carilah $\frac{dy}{dx}$ dari

b. f(x,y) = xy-e^x sin y = 0 (FUNGSI IMPLISIT 2 PEUBAH X DAN Y)

akan dicari $\frac{dy}{dx}$, menurut definisi turunan total

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} = -\frac{y - e^x \sin y}{x - e^x \cos y}$$

3. $\ln(x^2 + y^2)$ - arc tan $\left(\frac{y}{x}\right)$ = 0 (FUNGSI IMPLISIT 2 PEUBAH X DAN Y)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$$

$$= -\frac{\frac{2x+y}{x^2+y^2}}{\frac{2y-x}{x^2+y^2}} = \frac{2x+y}{x-2y}$$

Turunan Fungsi Implisit 3 Peubah

Fungsi Implisit 3 peubah secara umum dinyatakan dalam bentuk f(x,y,z) =0

Contoh:

Contoh

1. xy + yz + xz = 0
2. $e^{xyz} - z\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

Fungsi Implisit 4 Peubah

BU dinyatakan dengan

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

Atau ditulis dalam bentuk

F(x,y,u,v) = 0 dan G(x,y,u,v) = 0

dengan x,y variable berpasangan dan u,v variabel berpasangan dan F(x,y,u,v) = 0 serta G(x,y,u,v) = 0 tidak dapat berdiri sendiri.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

1. $\begin{cases} x + y^2 + 2uv = 0 \\ x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0 \end{cases}$

Atau ditulis dengan $x+y^2 + 2uv = 0$, $x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0$

2. $\begin{cases} 2u - v + x^2 + xy = 0 \\ u + 2v + xy - y^2 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0 \\ uv + x - y = 0 \end{cases}$ dan seterusnya.

Turunan Parsial dilakukan dengan menggunakan metode substitusi.

Dalam F(x,y,u,v) = 0 dan G(x,y,u,v)= 0, u,v variabel sejenis, x,y variabel sejenis sehingga tidak dapat ditentukan $\frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial v}, dan \frac{\partial v}{\partial u}$.

Sehingga turunan parsialnya adalah $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial y}$ dan seterusnya.

Untuk menentukan turunan parsial 4 peubah, langkah ditempuh adalah menurunkan fungsi terhadap peubah yang dimaksud.

Contoh:

1. Tentukan $\frac{\partial u}{\partial x} dan \frac{\partial x}{\partial u}$ dari

   $x+y^2 +2uv = 0$ dan $x^2-xy+y^2+u^2+v^2 = 0$ didapat

   $1\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$ -----→ 1

   $\Leftrightarrow 1+0+2u\frac{\partial v}{\partial x}+2v\frac{\partial u}{\partial x}=0$ atau $2u\frac{\partial v}{\partial x}+2v\frac{\partial u}{\partial x}=-1$

   $2x\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)-\left(x\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial x}{\partial x}\right)+2y\frac{\partial y}{\partial x}+2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$ ----→ 2

   $\Leftrightarrow$ 2x-0-y+0+2u $\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0$ atau 2u $\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=y-2x$

   Setelah di eliminasi $\frac{\partial v}{\partial x}$ didapat

   $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-v-u(y-2x)}{2(v^2-u^2)}$$

   $$=\frac{v+u(y-2x)}{2(u^2-v^2)}$$

   $x+y^2 +2uv = 0$ dan $x^2-xy+y^2+u^2+v^2 = 0$ didapat

   diturunkan terhadap $\frac{\partial x}{\partial u}$ (yang tidak boleh $\frac{\partial v}{\partial u}=0$)

   $1\frac{\partial x}{\partial u}+2y\frac{\partial y}{\partial u}+2v=0$ atau

   $\Leftrightarrow 1\frac{\partial x}{\partial u}+2y\frac{\partial y}{\partial u}=-2v$ -----→ (1)

$$2x\frac{\partial x}{\partial u}-\left(x\frac{\partial y}{\partial u}+y\frac{\partial x}{\partial u}\right)+2y\frac{\partial y}{\partial u}+2u\frac{\partial u}{\partial u}+0=0 \text{ atau}$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)\frac{\partial x}{\partial u}+(2y-x)\frac{\partial y}{\partial u}=-2u \text{ -------} \rightarrow (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), dengan metode eliminasi diperoleh

$$1\frac{\partial x}{\partial u}+2y\frac{\partial y}{\partial u}=-2v \quad \text{.................................. . (2y-x)}$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)\frac{\partial x}{\partial u}+(2y-x)\frac{\partial y}{\partial u}=-2u \text{ .... (2y)}$$

Didapat

$$\Leftrightarrow \text{(2y-x) } 1\frac{\partial x}{\partial u}+2y(2y-x)\frac{\partial y}{\partial u}=-2v(2y-x)$$

$$\Leftrightarrow (2x-y)2y\frac{\partial x}{\partial u}+(2y-x)2y\frac{\partial y}{\partial u}=-2u(2y)$$

-- -

$$[(2y-x)-(2x-y)(2y)]\frac{\partial x}{\partial u} = -2v(2y-x)+2u(2y)$$

Diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{-4vy+2vx+4uy}{(2y-x)-(4xy-2y^2)}$$

$$=-\frac{4vy-2vx-4uy}{(2y-x-4xy+2y^2)}$$

2. Cari turunan parsial pertama dari $\frac{\partial x}{\partial u}$ dan $\frac{\partial x}{\partial v}$ dari persamaan

   $2u-v+x^2+xy=0$, $dan\ \ u+2v+xy-y^2=0$

<u>Penyelesaian :</u>

1) Mencari $\frac{\partial x}{\partial u}$

Persamaan 1) $2u-v+x^2+xy=0$

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right)-1\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)+2x\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\left(x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)+y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)=0$$

$$2-0+(2x+y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=0$$

$$(2x+y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)=-2 \quad \text{....}\mathbf{(1)}$$

Persamaan 2) $u + 2v + xy - y^2 = 0$

$$1\left(\frac{\partial u}{\partial u}\right) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right) + \left(x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) + y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) - 2y\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0$$

$$1 + 0 + y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (x - 2y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0$$

$$y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (x - 2y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -1 \text{ .... } \textbf{(2)}$$

$\boldsymbol{Eliminasi\ persamaan\ 1\ dan\ 2}$

$$(2x + y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + x\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -2 \quad \Big| \text{ dikali } (x - 2y)$$

$$y\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + (x - 2y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -1 \quad \Big| \text{ dikali } x$$

Maka,

$$(2x + y)(x - 2y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + x(x - 2y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -2(x - 2y)$$

$$xy\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + x(x - 2y)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) = -x$$

$$(2x^2 + xy - 4xy - 2y^2 - xy)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = -2x + x + 4y$$

$$2(x^2 - 2xy - y^2)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 4y - x$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \underline{\underline{\frac{4y - x}{2(x^2 - 2xy - y^2)}}}}$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN, DAN JAWABAN HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SIDAH DITENTUKAN.

1. Carilah turunan parsial dari fungsi berikut;
   a. $f(x, y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$
   b. $f(x, y, z) = e^{-xyz} - \ln(xy - xyz)$
   c. $f(x, y, z) = 3x^2y - xyz + y^2z^2$