

# KALKULUS PEUBAH BANYAK( JEKMAKMUN)

## INTEGRAL RANGKAP

### INTEGRAL GANDA

Integral untuk fungsi satu variable, kita membentuk suatu partisi dari interval  $[a,b]$  menjadi interval-interval yang panjangnya  $\Delta x_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Dengan cara yang sama, Kita definisikan integral untuk fungsi dua variable.

Misalkan fungsi  $z = f(x,y)$  didefinisikan pada suatu daerah tertutup  $R$  di bidang xoy. Kemudian daerah ini dibagi atas  $n$  buah sub daerah yang masing-masing luasnya  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$

Dalam setiap sub daerah, pilih suatu titik  $P_k(x_k, y_k)$  dan bentuklah jumlah :

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A = f(x_1, y_1) \Delta_1 A + f(x_2, y_2) \Delta_2 A + \dots + f(x_n, y_n) \Delta_n A$$

Jika jumlah sub daerah makin besar ( $n \rightarrow \infty$ ), maka integral rangkap (lipat dua) dari fungsi  $f(x,y)$  atas daerah  $R$  didefinisikan :

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta_k A$$

Untuk menghitung integral lipat dua dapat digunakan integral berulang yang ditulis dalam bentuk :

$$a. \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

dimana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variabel  $y$  konstanta, kemudian hasilnya diintegral kembali terhadap  $y$ .

$$b. \iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dy dx = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x, y) dy \right\} dx$$

dimana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variabel  $x$  konstanta, kemudian hasilnya diintegral kembali terhadap  $x$ .

Jika integral lipat dua diatas ada, maka (a) dan (b) secara umum akan memberikan hasil yang sama.

## INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN BATAS PERSEGI PANJANG

Bentuk umum :

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

dimana :  $R = \{ (x, y) ; a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$

$a, b, c$  dan  $d$  adalah konstanta

Contoh :

$$1. \int_0^1 \int_1^2 dx dy$$

$$2. \int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) dx dy$$

$$3. \int_2^4 \int_1^2 (xy + 3y^2) dy dx$$

$$4. \int_2^4 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta + r \cos 2\theta) d\theta r$$

## INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN BATAS BUKAN PERSEGI PANJANG

$$a. \iint_R f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$

dimana :

$$R = \{ (x, y) ; f_1(x) \leq y \leq f_2(x), a \leq x \leq b \}$$

$$b. \iint_R f(x, y) dA = \int_{y=c}^d \int_{x=f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx dy$$

dimana :

$$R = \{ (x, y) ; f_1(y) \leq x \leq f_2(y), c \leq y \leq d \}$$

Contoh :

$$1. \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$$

$$2. \int_1^2 \int_y^{3y} (x+y) dx dy$$

$$3. \int_0^2 \int_{2x^2}^{x^2+x} x dy dx$$

## APLIKASI INTEGRAL LIPAT DUA

Aplikasi integral lipat dua yang bentuk umumnya :  $\iint_R f(x, y) dA$

dapat dijelaskan sbb :

### 1. LUAS

Luas bidang dapat dipandang sebagai integral lipat dua jika  $f(x, y) = 1$  , sehingga integral lipat dua menjadi :

$$A = \iint_R dA \quad \text{atau} \quad A = \iint_R dx dy = \iint_R dy dx$$

Dalam koordinat polar :

$$A = \iint_R dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\rho}^u \rho d\rho d\theta$$

contoh :

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh  $x + y = 2$  dan  $2y = x + y$

Jawab :

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dA = \int_0^2 \int_{2y-4}^{2-y} dx dy = \int_0^2 x \Big|_{2y-4}^{2-y} dy \\ &= \int_0^2 (2-y-2y-4) dy = \int_0^2 (6-3y) dy \\ &= \left(6y - \frac{3}{2}y^2\right) \Big|_0^2 = (12-6) = 6 \end{aligned}$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN, DAN JAWABAN HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN.

1. Selesaikanlah integral berikut;

a.  $\int_{-3}^3 \int_0^x (x^2 - y^3) dy dx$

b.  $\int_1^5 \int_0^x \frac{3}{x^2 + y^2} dy dx$

c.  $\int_0^{\pi/2} \int_0^z \int_0^y \sin(x + y + z) dx dy dz$