**Matriks**

Matriks adalah sekumpulan bilangan riil (*atau elemen*) atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran (*array*) persegi panjang.

Matriks yang mempunyai *m* baris dan *n* kolom disebut matriks *m* x *n* (yaitu '*m* kali *n*') atau matriks berorde *m x n*.

Suatu matriks ditunjukkan dengan menuliskan jajarannya di antara kurung siku, misalnya  adalah matriks 2 x 3, yaitu matriks ‘2 kali 3', dengan 5, 7, 2, 6, 3, 8 adalah elemen-elemennya. Perhatikan bahwa dalam menyatakan matriks, yang pertama disebutkan adalah banyaknya baris dan yang kedua adalah banyaknya kolom.

Adalah matriks berorde 4 x 3, yaitu matriks dengan 4 baris dan 3 kolom.

Jadi matriks

 berorde 3 x 2

Dan matriks



Matriks hanyalah sekedar jajaran sekumpulan bilangan: tidak ada hubung­an aritmetis antar elemen-elemennya. Matriks berbeda dari determinan, karena tidak ada harga numerik suatu matriks yang diperoleh dari perkalian antar elemennya. Juga, pada umumnya baris dan kolom tidak dapat diper­tukarkan seperti dalam determinan.

Matriks baris (*line matrix*): Suatu matriks baris hanya terdiri dari satu baris saja.

Contoh, [4 3 7 2] adalah matriks baris berorde 1 x 4.

Matriks kolom (*column matrix*): Suatu matriks kolom hanya terdiri dari satu kolom saja. Contoh,  adalah matriks kolom berorde 3 x 1.

Untuk menghemat tempat, matriks kolom seringkali dituliskan dalam satu garis, tetapi diberi kurung kurawal. Contoh, {6 3 8} menyatakan ma­triks yang sama dengan matriks kolom berorde 3 x 1.

Untuk menyatakan koordinat *x* dan *y* sebuah titik relatif terhadap sumbu *x* dan *y*, kita menggunakan matriks baris sederhana, walaupun dalam hal ini biasanya kita menggunakan kurung biasa. Sebagai contoh, jika *P* adalah titik (3, 5) maka angka 3 menyatakan koordinat *x* dan angka 5 menyatakan koordinat *y*. Tetapi dalam matriks pada umumnya tanda koma yang memisahkan elemen-elemennya tidak dicantumkan.

***Matriks berelemen tunggal***: Sebuah bilangan dapat dipandang sebagai matriks berukuran 1 x 1, yaitu matriks yang hanya mempunyai 1 b dan 1 kolom saja.

***Notasi dua indeks***: Masing-masing elemen suatu matriks memiliki ’alamat’ atau tempat yang dapat ditentukan dengan menggunakan sistem dua-indeks, indeks pertama menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. Dengan demikian:

 

 menunjukkan elemen yang terletak pada baris kedua dan kolom tiga.

**Notasi matriks**: Jika tidak menimbulkan keragu-raguan, keseluruhan ma­triks dapat dinyatakan dengan sebuah elemen umum yang dituliskan dalam kurung siku, atau dengan sebuah huruf yang dicetak tebal. Penulisan ini singkat dan rapih, dan juga menghemat banyak huruf dan tempat. Sebagai contoh,

 dapat dinyatakan dengan  atau  atau dengan **A** saja

Serupa dengan itu,

  dapat dinyatakan dengan  atau  atau dengan **x** saja

Untuk menyatakan matriks (*m* x *n*) akan kita gunakan huruf besar tebal, misalnya **A**. Untuk matriks baris atau matriks kolom kita gunakan huruf kecil tebal, misalnya **x**.

Jadi, jika B menyatakan matriks 2 x 3, tuliskanlah elemen-elemen *b* dalam matriks tersebut dengan menggunakan notasi dua-indeks. Hasilnya :



**Kesamaan matriks**: Menurut definisinya, dua matriks dikatakan sama jika semua elemen yang bersesuaian letak sama. Karena itu kedua matriks terse­but harus pula berorde sama.

Jadi, jika 

maka all = 4; a12 = 6; a13 = 5; a21 = 2; dan seterusnya

Dengan demikian, jika [*aij*] = [*xij*] maka *aij* = *xij* untuk semua harga *i* dan *j*.

**Penjumlahan dan pengurangan matriks:** Agar dua matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan, maka *orde* keduanya haruslah sama. Selanjutnya jumlah atau selisihnya diperoleh dengan menambahkan atau menglikan elemen-elemennya yang bersesuaian.

**Perkalian Matriks:**

(a) *Perkalian dengan skalar:* Mengalikan matriks dengan sebuah bilangan (yaitu skalar) berarti mengalikan masing-masing elemennya dengan bilangan tersebut.

Contoh 

yaitu, secara umum. *k*.[*aij*] = [*kaij*].

Kebalikannya juga berlaku, yaitu kita dapat mengeluarkan faktor yang sama dari setiap elemen - bukan hanya dari satu baris atau kolom dalam determinan.

Karena itu,  dapat dituliskan sebagai 

(b) *Perkalian dua buah matriks:* Dua buah matriks dapat dikalikan, satu terhadap yang lain, hanya jika banyaknya kolom dalam matriks yang per­tama sama dengan banyaknya baris dalam matriks yang kedua.

Contoh  dan 

Maka : 

 

yaitu masing-masing elemen matriks **A** dalam baris yang atas dikalikan de­ngan elemen yang bersesuaian dalam kolom pertama matriks **b** dan kemu­dian semua hasil-kalinya dijumlahkan. Serupa dengan itu, baris kedua dari hasil-kali kedua matriks diperoleh dengan mengalikan masing-masing ele­men dalam baris kedua matriks **A** dengan elemen yang bersesuaian dalam kolom pertama matriks **b**.

Perhatikan bahwa perkalian matriks (3 x 2) dengan matriks (2 x 4) menghasilkan matriks berore (3 x 4).

Yaitu orde (3 x 2) x orde (2 x 4)  orde (3 x 4).

Secara umum, perkalian matriks (*l x m*) dengan (*m x n*) akan menghasilkan matriks berorde (*l x n*).

Perkalian matriks hanya didefinisikan jika banyaknya kolom dalma matriks pertama = banyaknya baris dalam matriks kedua.

Jika **A** adalah matriks (*m x n*) dan **B** adalah matriks (*n x m*), maka perkalian **A****B** dan **B****A** keduanya mungkin dilakukan.

Dalam perkalian matriks, **A****B**  **B****A**, yaitu perkalian matriks non-komutatif. Urutan faktor dalam perkalian sangatlah penting!

Dalam perkalian **A****B**, **B** *dikalikan-kiri* (pre-multiplied) dengan **A**

dan **A** dikaikan-kanan (post-multiplied) dengan **B**

**Transpose matriks** : Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan, maksudnya :

baris pertama menjadi kolom pertama,

baris kedua menjadi kolom kedua,

baris ketiga menjadi kolom ketiga, dan seterusnya.

Maka matriks baru yang terbentuk disebut transpose ari matriks semula. Jika matriks semula adalah **A**, maka transposenya dinyatakan dengan **** atau ****. Kita akan menggunakan notasi yang terakhir, **AT**.

Jika **A** = , maka **AT** = 

**Matriks-matriks khusus**:

(a) *Matriks bujur sangkar* adalah matriks berorde *m x m*.

Contoh:  adalah matriks 3 x 3

Matriks bujur sangkar [*aij*] disebut simetrik jika *aij*= *aji*,

Contoh  yaitu matriks tersebut simetris terhadap

diagonal utamanya.

Perhatikan bahwa di sini berlaku **A** = **AT** .

Matriks bujur sangkar [*aij*]

disebut anti-simetrik jika *aij* = -*aji* , contoh 

Dalam hal ini, **A** = - **AT**

(b) *Matriks diagonal* adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol, kecuali elemen pada diagonal utamanya, jadi

 

(c) *Matriks satuan* adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya sama dengan satu, yaitu

 

Matriks satuan dinyatakan dengan **I**.

Jadi sifat matriks satuan I sangat mirip dengan bilangan satu dalam ilmu hitung dan aljabar biasa.

(d) *Matriks nol:* Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya sama dengan nol,

Yaitu  dan dinyatakan dengan **0** atau cukup 0 saja.

Jika **A • B = 0**, kita tidak dapat menarik kesimpulan bahwa **A = 0** dan **B = 0**

**Determinan matriks bujur sangkar**. Determinan matriks bujur-sangkar ada­lah determinan yang mempunyai elemen-elemen yang sama dengan matriks tersebut. Sebagai contoh,

determinan dari  adalah 

dan harga determinan ini adalah

5(42 - 12) - 2(0 - 24) + 1(0 - 48)

= 5(30) - 2(-24) + 1(-48) = 150 + 48 - 48 = 150

Perhatikan bahwa matriks transpose-nya adalah  dan determinan

dari transpose ini adalah  yang harganya sama dengan

5(42 - 12) -0(14 -4)+8(6 -6)= 5(30) = 150.

Hal ini menunjukkan bahwa determinan suatu matriks bujur-sangkar me­miliki harga yang sama dengan determinan matriks transposenya.

Suatu matriks yang determinannya sama dengan nol disebut *matriks singular*.

Harga determinan matriks  adalah 

 = 3(-30) - 2(15) + 5(25) = 5.

Dan harga determinan matriks diagonal  adalah 

 = 2(20) + 0 + 0 = 40

**Kofaktor**. Jika **A** = [*aij*] adalah matriks bujur-sangkar, kita dapat mem­bentuk determinan yang elemen-elemennya adalah :

 

Masing-masing elemen memberikan *kofakto*r, yang tidak lain daripada minor elemen dalam determinan bersama-sama dengan 'tanda tempat'-nya.

Untuk masing-masing elemen, minornya diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang memuat elemen yang bersangkutan an kemudian dibentuk determianan dari elemen-elemen yang tersisa. Tanda tempat yang sesuai diberikan oleh :

 

Tanda plus dan minus bergantian, dimulai dengan di sudut kiri atas yang memuat tanda +.

**Adjoint matriks bujur sangkar :**

Jika kita mulai dengan A =  , determinannya adalah

Det A =  =  dari sini kita dapat membentuk matriks baru **C** yang elemen-elemennya kofaktor :

 C =  dengan *A11* adalah kofaktor *a11*

 *Aij* adalah kofaktor *aij* dan seterusnya.

Matriks kofaktornya adalah **C** = 

dan transpose dari **C**, yaitu **CT** =  matriks ini disebut matriks *adjoin* dari matriks A semula dan dituliskan Adj.**A**.

Jadi untuk memperoleh adjoin suatu matriks bujur sangkar **A** kita harus :

1. membentuk matriks kofaktor **C**
2. menuliskan tarnspose **C**, yaitu **CT**.

**Invers matriks bujur sangkar**

Adjoin suatu matriks bujur sangkar sangatlah penting, karena matriks ini memungkinkan kita untuk membentuk invers matriks yang bersangkutan. Jika masing-masing elemen dari matriks adjoin **A** dibagi dengan harga determinan **A**, yaitu |**A**|, (asal saja |**A**|), maka diperoleh matriks baru yang disebut invers dari matriks **A** dan dituliskan sebagai **A-1**.

Jadi, untuk membentuk invers dari matriks bujur-sangkar **A** :

1. Hitung determinan **A**, yaitu |**A**|
2. Bentuk matriks **C** yang elemen-elemennya adalah kofaktor elemen |**A**|.
3. Tuliskan transpose matriks **C**, yaitu **CT**, untuk memperoleh adjoin **A**.
4. Bagilah masing-masing elemen **CT** dengan |**A**|.
5. Matriks tarakhir yang diperoleh adalah matriks invers **A-1** dari matriks **A** semula.