Penerapan Fungsi eksponensial dan Logaritma dalam konteks sehari-hari

Masalah nyata:

Diketahui masalah nyata sebagai berikut; pada awal tahun kita menabung *A* rupiah dengan bunga tertentu di sebuah Bank. Berapakah jumlah uang kita pada waktu yang akan datang? Untuk membuat model matematika dari masalah ini, dapat diidentifikasi beberapa variabel yang mempengaruhinya, misalnya suku bunga (*interst rate*) dan waktu.

Next

Model waktu diskrit:

Jika masalah kita sederhanakan dengan asumsi suku bunga majemuk (*compounds interest rate*) konstan "*r*" per tahun, waktu (*t*) sebagai variabel mengikuti bilangan bulat taknegatif *t=0,1,2,3,…* dan *G(t)* menyatakan jumlah uang pada saat setelah tahun ke *t*, maka kita mendapatkan:

Next

$$G(1) = A + rA = A(1+r)^1,$$

$$G(2) = G(1) + rG(1) = G(1)(1+r) = A(1+r)(1+r)^1 = A(1+r)^2$$

$$G(3) = G(2) + rG(2) = G(2)(1+r) = A(1+r)(1+r)^2 = A(1+r)^3$$

dan seterusnya dengan induksi matematika diperoleh model matematika $G(t) = A(1+r)^t$, $t=0,1,2,3,\ldots$.

Next

Sebagai ilustrasi jika pada awal tahun kita menabung $A = Rp.15.000.000$ dan suku bunga konstan r=10%, maka diperoleh tabel berikut:

Tabel 1:

r	t	A	$(1+r)^t$	$G(t) = A(1+r)^t$
0,10	0	15.000.000,00	1,00	15.000.000,00
0,10	1	15.000.000,00	1,10	16.500.000,00
0,10	2	15.000.000,00	1,21	18.150.000,00
0,10	3	15.000.000,00	1,33	19.965.000,00

Next

Lanjutan

r	t	A	$(1+r)^t$	$G(t) = A(1+r)^t$
0,10	4	15.000.000,00	1,46	21.961.500,00
0,10	5	15.000.000,00	1,61	24.157.650,00
0,10	6	15.000.000,00	1,77	26.573.415,00
0,10	7	15.000.000,00	1,95	29.230.756,50
0,10	8	15.000.000,00	2,14	32.153.832,15
0,10	9	15.000.000,00	2,36	35.369.215,37
	…		…	….. / dan seterusnya

Next

Model waktu kontinyu:

Sekarang misalkan masalah kita sederhanakan dengan asumsi suku bunga majemuk (*compounds interest rate*) konstan "*r*" per tahun, dan waktu (*t*) sebagai **variabel mengikuti bilangan real**. Misalkan pula *F(t)* menyatakan jumlah uang kita pada waktu *t* dan diasumsikan *F(t)* fungsi diferensiabel terhadap *t*. Karena *r* dapat dipandang sebagai angka pertumbuhan uang, maka kita mendapatkan model matematika dalam bentuk persamaan diferensial:

$$\frac{1}{F(t)}\frac{d}{dt}F(t) = r \text{, dengan syarat } F(0) = A.$$

Next

Penyelesaian model tersebut adalah:

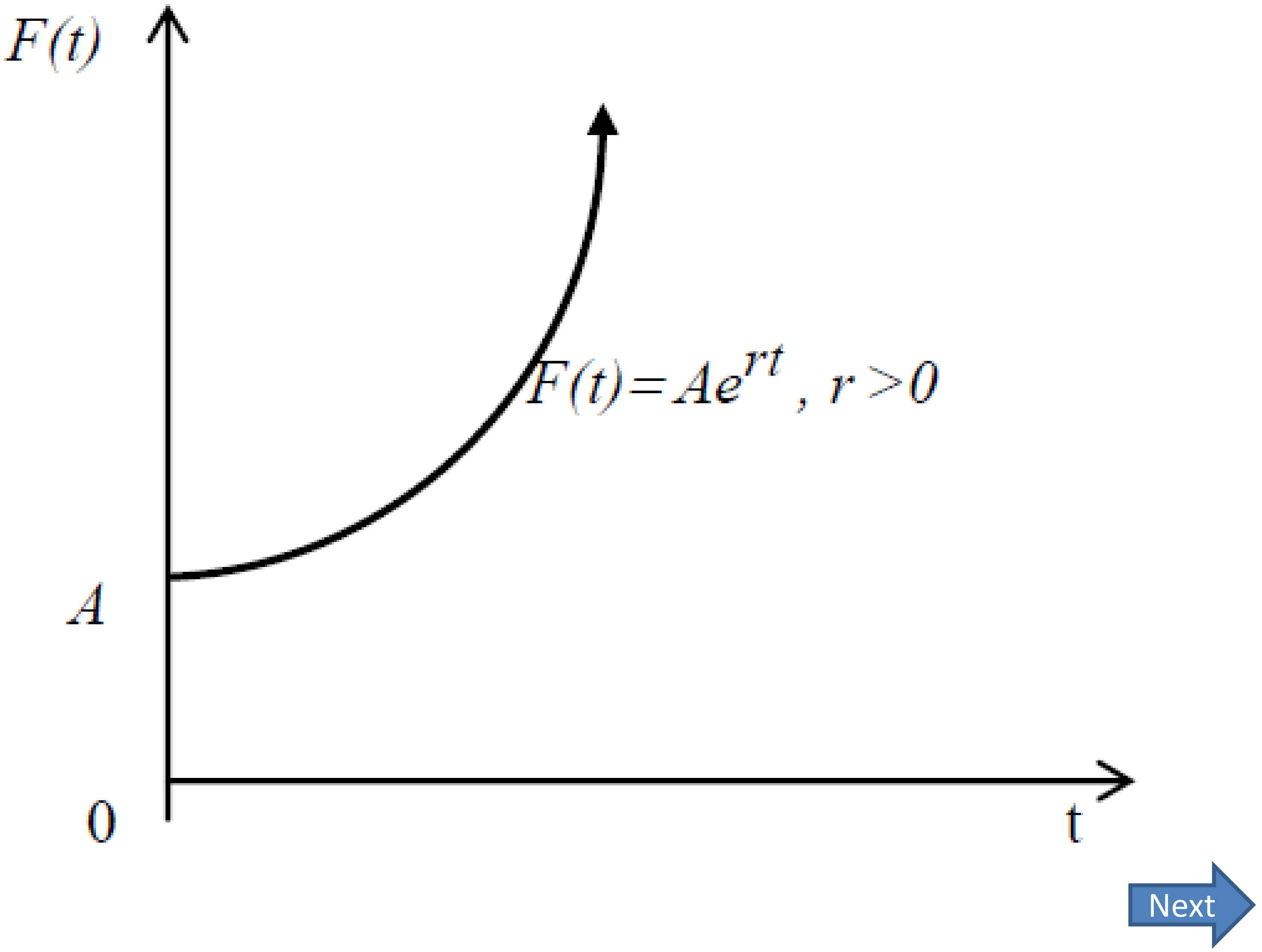
$$\int \frac{dF(t)}{F(t)} = \int r dt \Leftrightarrow \ln F(t) = rt + c \Leftrightarrow F(t) = e^{rt+c} = e^{c} e^{rt}.$$

Karena syarat $F(0) = A$, diperoleh $A = e^{c}$ dan

$$F(t) = Ae^{rt},$$

dengan $e = 2,7182818\ldots \approx 2,7182818.$

Next



$F(t)$
$F(t) = Ae^{rt}$, $r > 0$
A
0
t
Next

Sebagai ilustrasi jika pada awal tahun kita menabung $A = Rp.15.000.000$ dan suku bunga konstan $r=10\%$, maka diperoleh table berikut:

Tabel 2:

e	r	t	A	e^{rt}	$F(t)= Ae^{rt}$
2,7182818	0,10	0,00	15.000.000,00	1,00	15.000.000,00
2,7182818	0,10	0,10	15.000.000,00	1,01	15.150.752,50
2,7182818	0,10	0,20	15.000.000,00	1,02	15.303.020,10
2,7182818	0,10	0,30	15.000.000,00	1,03	15.456.818,00
2,7182818	0,10	0,40	15.000.000,00	1,04	15.612.161,61

Next

Lanjutan

e	r	t	A	e^{rt}	$F(t) = Ae^{rt}$
2,7182818	0,10	0,50	15.000.000,00	1,05	15.769.066,44
2,7182818	0,10	0,60	15.000.000,00	1,06	15.927.548,19
2,7182818	0,10	0,70	15.000.000,00	1,07	16.087.622,71
2,7182818	0,10	0,80	15.000.000,00	1,08	16.249.306,00
2,7182818	0,10	0,90	15.000.000,00	1,09	16.412.614,24
2,7182818	0,10	1,00	15.000.000,00	1,11	16.577.563,75
2,7182818	0,10	1,10	15.000.000,00	1,12	16.744.171,04

Next

Lanjutan

e	r	t	A	e^{rt}	$F(t) = Ae^{rt}$
2,7182818	0,10	1,20	15.000.000,00	1,13	16.912.452,75
2,7182818	0,10	1,30	15.000.000,00	1,14	17.082.425,73
2,7182818	0,10	1,40	15.000.000,00	1,15	17.254.106,96
2,7182818	0,10	1,50	15.000.000,00	1,16	17.427.513,61
2,7182818	0,10	1,60	15.000.000,00	1,17	17.602.663,04
2,7182818	0,10	1,70	15.000.000,00	1,19	17.779.572,74
2,7182818	0,10	1,80	15.000.000,00	1,20	17.958.260,41

Next

Lanjutan

e	r	t	A	e^{rt}	$F(t)= Ae^{rt}$
2,7182818	0,10	1,90	15.000.000,00	1,21	18.138.743,93
2,7182818	0,10	2,00	15.000.000,00	1,22	18.321.041,33
2,7182818	0,10	2,10	15.000.000,00	1,23	18.505.170,86
2,7182818	0,10	2,20	15.000.000,00	1,25	18.691.150,92
2,7182818	0,10	2,30	15.000.000,00	1,26	18.879.000,10
2,7182818	0,10	2,40	15.000.000,00	1,27	19.068.737,21
2,7182818	0,10	**2,50**	15.000.000,00	1,28	**19.260.381,20**

Next

Lanjutan

e	r	t	A	e^{rt}	$F(t) = Ae^{rt}$
2,7182818	0,10	2,60	15.000.000,00	1,30	19.453.951,25
2,7182818	0,10	2,70	15.000.000,00	1,31	19.649.466,71
2,7182818	0,10	2,80	15.000.000,00	1,32	19.846.947,13
2,7182818	0,10	2,90	15.000.000,00	1,34	20.046.412,26
		...		...	...

Next

Dalam kehidupan sehari-hari hampir tidak pernah ada suku bunga majemuk "r" konstan sepanjang masa, sehingga model di atas dirasa kurang cocok dengan kenyataan dan perlu dimodifikasi. Untuk itu asumsi yang tadinya r konstan dilonggarkan menjadi tidak konstan. Yang agak sederhana, misalnya suku bunga majemuk (*compounds interest rate*) dianggap r_1 untuk tiga tahun pertama dan r_2 setelah tahun ke tiga.

Next

Jika $F^*(t)$ menyatakan jumlah uang kita pada waktu t dan diasumsikan $F^*(t)$ fungsi diferensiabel terhadap t kecuali pada saat $t=3$, dan $F^*(t)$ kontinyu di $t=3$, maka model matematikanya menjadi:

$$\frac{1}{F^*(t)}\frac{d}{dt}F^*(t)=r(t) \text{ dengan } F^*(0)=A \text{ dan}$$

$$r(t)=\begin{cases} r_1 \; jika \; 0 \le t \le 3 \\ r_2 \; jika \; 3 < t < \infty \end{cases}.$$

Next

Penyelesaiannya: Untuk $0 \le t \le 3$, jelas $F^*(t) = Ae^{r_1 t}$. Sedangkan untuk $t > 3$ diperoleh

$$\int \frac{dF^*(t)}{F^*(t)} = \int r_2 dt \Leftrightarrow \ln F^*(t) = r_2 t + c \Leftrightarrow F^*(t) = e^{r_2 t + c} = e^c e^{r_2 t}.$$

Next

Karena F^* kontinyu di $t=3$, didapatkan

$$\lim_{\substack{t \to 3 \\ t > 3}} F^*(t) = \lim_{t \to 3} e^{c} e^{r_2 t} = e^{c} e^{3r_2} = F^*(3).$$

Dilain pihak dari $0 \le t \le 3$, diperoleh $F^*(3) = Ae^{3r_1}$, sehingga

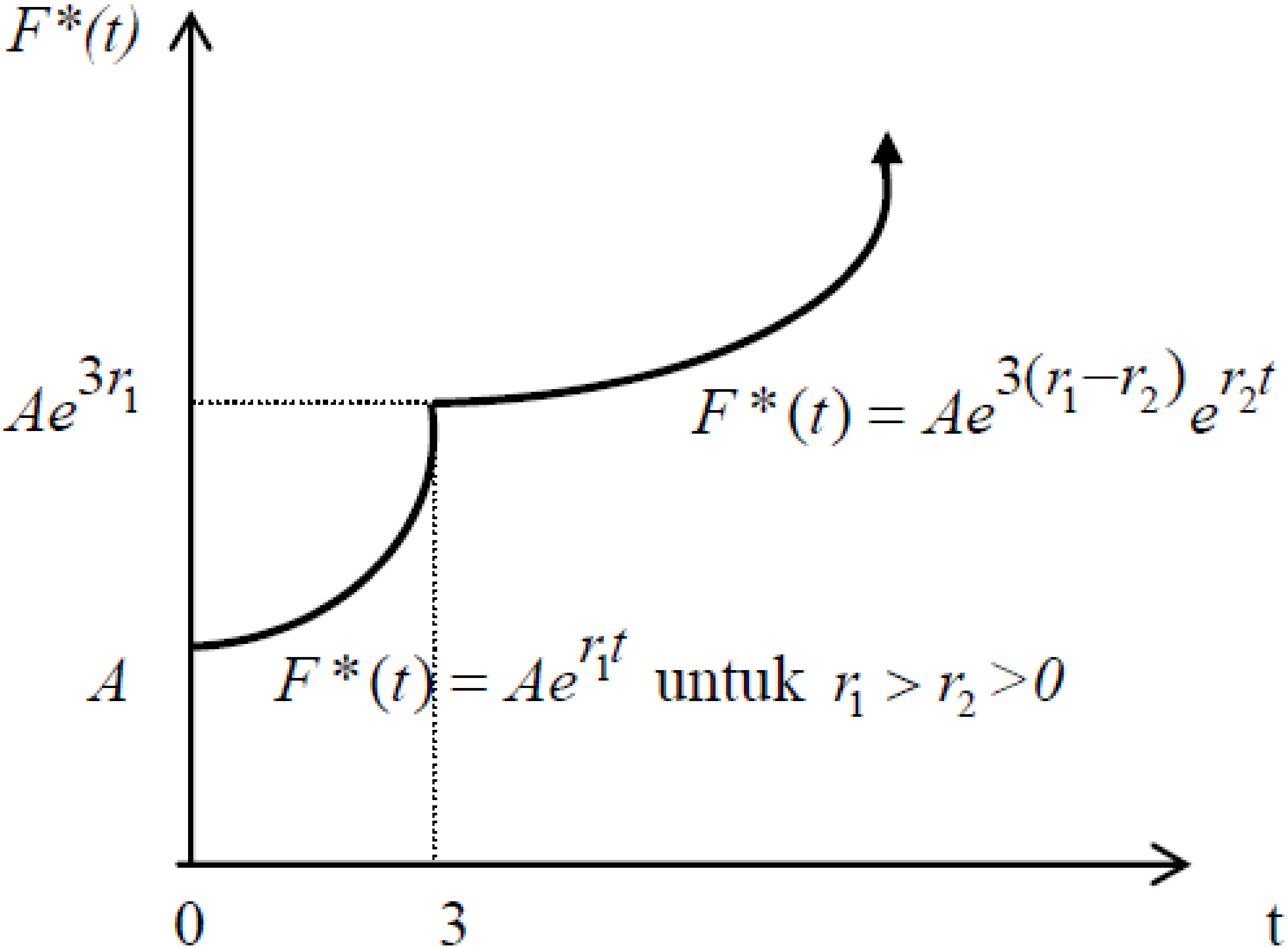
$$F^*(3) = e^{c} e^{3r_2} \Leftrightarrow Ae^{3r_1} = e^{c} e^{3r_2} \Leftrightarrow e^{c} = Ae^{3(r_1 - r_2)},$$

Next

maka untuk $t > 3$, $F^*(t) = Ae^{3(r_1 - r_2)}e^{r_2 t}$ sehingga

$$F^*(t) = \begin{cases} Ae^{r_1 t} & jika\ 0 \le t \le 3 \\ Ae^{3(r_1 - r_2)}e^{r_2 t} & jika\ 3 < t < \infty. \end{cases}$$

Next



Next

Hasil modifikasi ini dapat diilustrasikan misalnya, jika $r_1 = 10\%$ untuk tiga tahun pertama dan $r_2 = 6\%$ setelah tahun ke tiga, maka diperoleh:

$$F^*(t) = \begin{cases} 15.000.000e^{10\% t} & jika\ 0 \le t \le 3 \\ 15.000.000e^{3(10\% - 6\%)}e^{6\% t} & jika\ 3 < t < \infty. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 15.000.000e^{0,1t} & jika\ 0 \le t \le 3 \\ 15.000.000e^{0,12}e^{0,06t} & jika\ 3 < t < \infty. \end{cases}$$

Next

Karena $2,5 < 3$, dengan modifikasi ini diperoleh:

$$F^*(2,5) = 15.000.000(e^{0,25}) \approx 19.260.381,20 \text{ rupiah,}$$

dan karena $4,5 > 3$,

$$F^*(4,5) = 15.000.000e^{0,12}e^{(0,06)(4,5)}$$

$$= 15.000.000e^{0,12}e^{0,27}$$

$$= 15.000.000e^{0,39}$$

$$\approx 15.000.000(1,48) = 22.154.711,82 \text{ rupiah.}$$

Next

Soal-Soal:

1. Diketahui model bunga majemuk dengan variable t mengikuti himpunan semua bilangan real tak negatif $[0,\infty)$. Misalkan $[0,\infty)$ dipartisi menjadi interval-interval waktu

$$I_1 = [0, t_1], I_2 = (t_1, t_2], I_3 = (t_2, t_3], \ldots, I_n = (t_{n-1}, \infty)$$

dengan

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1}, \quad t_i \in [0,\infty)$$

Next

untuk suatu bilangan asli $n \geq 2$, dan bunga majemuk pada interval waktu I_i adalah konatanta r_i untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$, r_i tidak harus sama dengan r_j, untuk $i \neq j$.

(i). Formulasikan bunga majemuk $r(t)$ versus t pada $[0,\infty)$ dan gambarlah sketsa grafiknya.

(ii). **Jika** tabungan awal A rupiah, $F(t)$ menyatakan jumlah uang kita pada saat t, diasumsikan $F(t)$ diferensiabel pada $[0, \infty)$ kecuali di titik-titik $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$ dan $F(t)$ kontinyu di titik-titik $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$, **maka** formulasikan $F(t)$ versus t, dan gambarlah sketsa grafiknya.

Next

2. Menurut penelitian **E. Heinz**, konsentrasi ***drug*** dalam darah pada saat *t* yang disuntikkan ke dalam badan, yang dinotasikan dengan C(t) memenuhi rumus fungsi:

$$C(t) = \frac{k}{b-a}\,(e^{-at} - e^{-bt}),$$

dengan $t \geq 0$, a, b dan *k* konstanta-konstanta positif yang tergantung pada ***drug***, b>a. Carilah waktu kapan terjadi kontrasi terbesar. Jelaskan apakah yang terjadi untuk $t \to +\infty$?

Next

3. Pada tahun 1986 terjadi bencana ledakan reaktor nuklir *Chernobil* di *Uni Soviet*, sehingga radiasinya mengotori udara. Material radioaktif yang mengotori udara memenuhi persamaan diferensial $\frac{d}{dt}M(t) = r[\frac{k}{r} - M(t)]$, dengan syarat awal $M(0)=0$.

Next

Di sini $M(t)$ menyatakan massa material radioaktif pada saat t (dalam tahun) setelah ledakan, k konstanta radioaktif, dan r konstanta yang menyatakan menurunnya unsur radioaktif di udara setiap tahun.

a. Selesaikan persamaan diferensial tersebut
b. Jelaskan apakah yang terjadi dengan $M(t)$ untuk $t \rightarrow +\infty$?

Next

TERIMA KASIH

END