D e r e t

MATEMATIKA BISNIS

Materi yang diperlajari

Deret Hitung

- Suku ke-n dari DH
- Jumlah n suku

Deret Ukur

- Suku ke-n dari DU
- Jumlah n suku

Dan penerapannya dalam dunia ekonomi

Definisi

Deret : Rangkaian bilangan yang tersusun secara teratur dan memenuhi kaidah-kaidah tertentu.

Suku : Bilangan-bilangan yang merupakan unsur dan pembentuk deret.

Macam-macam deret :

- Deret Hitung
- Deret Ukur
- Deret Harmoni

Deret Hitung

Deret hitung : deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan penjumlahan terhadap sebuah bilangan tertentu.

Bilangan yang membedakan suku-suku dari deret hitung dinamakan pembeda, yang tak lain adalah selisih antara nilai dua suku yang berurutan.

Contoh :

5, 10, 15, 20, 25, 30 (pembeda 5)

90, 80, 70, 60, 50, 40 (pembeda -10)

Suku ke-n dari Deret Hitung

5, 10, 15, 20, 25, 30

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 5 = a \\
S_2 &= 10 = a + b = a + (2 - 1)b \\
S_3 &= 15 = a + 2b = a + (3 - 1)b \\
S_4 &= 20 = a + 3b = a + (4 - 1)b \\
S_5 &= 25 = a + 4b = a + (5 - 1)b \\
S_6 &= 30 = a + 5b = a + (6 - 1)b
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S_n = a + (n - 1)b}$$

a = suku pertama / s1

b = pembeda

n = indeks suku

Jumlah n Suku

Jumlah sebuah deret hitung sampai dengan suku tertentu tidak lain adalah jumlah nilai suku-sukunya.

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \dots\dots\dots\dots + S_n$$

$$J_4 = \sum_{i=1}^{4} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$J_5 = \sum_{i=1}^{5} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

$$J_6 = \sum_{i=1}^{6} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$$

Berdasarkan rumus suku ke-n →

$S_n = a + (n - 1)b$, maka dapat diuraikan

$J_4 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) = 4a + 6b$

$J_5 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b)$

$= 5a + 10b$

$J_6 = a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b)$

$= 6a + 15b$

Masing-masing J_i dapat ditulis

$$\left.\begin{aligned} J_4 &= 4a + 6b = 4a + \frac{4}{2}(4-1)b \\ J_5 &= 5a + 10b = 5a + \frac{5}{2}(5-1)b \\ J_6 &= 6a + 15b = 6a + \frac{6}{2}(6-1)b \end{aligned}\right\} J_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b$$

$$\text{atau } J_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$

$$= \frac{n}{2}\{a + \boxed{a + (n-1)b\}} \longrightarrow S_n$$

$$= \boxed{\frac{n}{2}(a + S_n)}$$

Deret Ukur

Deret ukur : deret yang perubahan suku-sukunya berdasarkan perkalian terhadap sebuah bilangan tertentu.

Bilangan yang membedakan suku-suku sebuah deret ukur dinamakan pengganda.

Contoh :

1) 5, 10, 20, 40, 80, 160 (pengganda 2)
2) 512, 256, 128, 64, 32, 16 (pengganda 0,5)

Suku ke-n dari Deret Ukur

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= 5 = a \\
S_2 &= 10 = ap &&= ap^{2-1} \\
S_3 &= 20 = app &= ap^2 &= ap^{3-1} \\
S_4 &= 40 = appp &= ap^3 &= ap^{4-1} \\
S_5 &= 80 = apppp &= ap^4 &= ap^{5-1} \\
S_6 &= 160 = appppp &= ap^5 &= ap^{6-1}
\end{aligned}\right\} S_n = ap^{n\text{-}1}$$

$a =$ suku pertama

$p =$ pengganda

$n =$ indeks suku

Jumlah n Suku

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 .... + S_n$$

berdasarkan rumus $S_n = ap^{n\text{-}1}$ maka :

$$J_n = a + ap + ap^2 + ap^3 + ... + ap^{n-2} + ap^{n-1} \qquad (1)$$

jika dikalikan dengan bilangan pengganda p, maka :

$$pJ_n = ap + ap^2 + ap^3 + ap^4 + ... + ap^{n-1} + ap^n \qquad (2)$$

selisih antara persamaan (1) dan persamaan (2) selisih antara persamaan (1) dan persamaan (2)

$$J_n - pJ_n = a - ap^n$$

$$J_n(1 - p) = a(1 - p^n)$$

$$J_n = \frac{a(1 - p^n)}{1 - p} \text{ atau } J_n = \frac{a(p^n - 1)}{p - 1}$$

$|p| < 1$ $|p| > 1$

Model Perkembangan Usaha

Jika perkembangan variabel-variabel tertentu dalam kegiatan usaha, misalnya : produksi, biaya, pendapatan, penggunaan tenaga kerja dll. Memiliki pola seperti deret hitung, maka prinsip-prinsip deret hitung dapat diterapkan dalam menganalisis perkembangan vaiabel tersebut.

- Pelajari Kasus 1 dan 2

Model Bunga Majemuk

- Modal pokok ***P*** dibungakan secara majemuk, suku bunga perahun i, maka jumlah akumulatif modal ***F*** setelah **n** tahun adalah:

$$\text{setelah 1 tahun}: F_1 = P + P.i = P(1+i)$$

$$\text{setelah 2 tahun}: F_2 = P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2$$

$$\text{setelah 3 tahun}: F_3 = P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^3$$

$$\text{setelah n tahun}: F_n = (.........) \ + \ (..........) = P(1+i)^n$$

- Jumlah di masa datang dari jumlah sekarang :

$$\boxed{F_n = P(1+i)^n} \Rightarrow \boxed{S_n = ap^{n\text{-}1}} \Rightarrow \boxed{\text{Bunga dibayar 1x setahun}}$$

Bila bunga dibayar lebih sekali dalam setahun, misal *m* kali, maka :

$$F_n = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

m = frekuensi pembayaran bunga dalam setahun

Suku (1+i) dan (1 + i/m) disebut **"faktor bunga majemuk"** (*compounding interest factor*), yaitu suatu bilangan yang lebih besar dari 1, yang dapat dipakai untuk menghitung jumlah dimasa mendatang dari suatu jumlah sekarang.

Dengan manipulasi matematis, bisa diketahui nilai sekarang (present value) :

$$P = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot F \quad \text{atau} \quad P = \frac{1}{(1+i/m)^{mn}} \cdot F$$

Suku $1/(1+i)^n$ dan $1/(1+i/m)^{mn}$ dinamakan **“faktor diskonto”** (discount factor), yaitu suatu bilangan lebih kecil dari 1 yang dapat dipakai untuk menghitung nilai sekarang dari suatu jumlah dimasa datang.

Model Pertumbuhan Penduduk

$$P_t = P_1 R^{t-1}$$

Dimana

$R = 1 + r$

P_1 = jumlah pada tahun pertama (basis)

P_t = jumlah pada tahun ke-t

r = persentase pertumbuhan per-tahun

t = indeks waktu (tahun)

TERIMAKASIH

Selamat Belajar