

Pengetahuan Dasar Teori Graph

Prof. Dr. Didi Suryadi, M.Ed.
Dr. Nanang Priatna, M.Pd.



PENDAHULUAN

Pada bagian ini Anda akan mempelajari sejarah singkat perkembangan teori graph serta beberapa pengertian dasar teori graph mencakup definisi teori graph; graph hingga dan graph tak hingga; insidensi dan ajasensi; titik (simpul) terisolasi, titik anting, serta derajat suatu titik. Setelah Anda mengenal beberapa pengertian teori graph, selanjutnya akan disajikan materi graph sebagai model matematika dan aplikasinya yang mencakup graph sebagai model matematika, graph berarah sebagai model matematika, jaringan kerja, silsilah keluarga, sistem komunikasi, jaringan transportasi, desain arsitektur, dan ikatan kimia.

Mengingat materi yang akan Anda pelajari ini merupakan landasan utama dalam mempelajari modul-modul berikutnya, maka pemahaman yang baik tentang materi yang disajikan merupakan langkah yang tepat dalam upaya memahami materi setiap modul secara keseluruhan.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan mengenal sejarah singkat munculnya teori graph, beberapa pengertian dasar teori graph, serta aplikasi teori graph.

Setelah mempelajari modul ini, secara khusus Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan sejarah perkembangan teori graph;
2. menjelaskan beberapa pengertian dasar teori graph;
3. menggambar graph sebagai model matematika.

Kegiatan Belajar 1

Sejarah Singkat dan Beberapa Pengertian Dasar Teori Graph

A. SEJARAH SINGKAT TEORI GRAPH

Teori graph lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan *Konigsberg* yang sangat terkenal di Eropa. Kurang lebih seratus tahun setelah lahirnya tulisan Euler tersebut tidak ada perkembangan yang berarti berkenaan dengan teori graph.

Tahun 1847, G.R. Kirchoff (1824 – 1887) berhasil mengembangkan teori pohon (*Theory of trees*) yang digunakan dalam persoalan jaringan listrik. Sepuluh tahun kemudian, A. Coyley (1821 – 1895) juga menggunakan konsep pohon untuk menjelaskan permasalahan kimia yaitu hidrokarbon.

Pada masa Kirchoff dan Coyley juga telah lahir dua hal penting dalam teori graph. Salah satunya berkenaan dengan konjektur *empat warna*, yang menyatakan bahwa untuk mewarnai sebuah atlas cukup dengan menggunakan empat macam warna sedemikian hingga tiap negara yang berbatasan akan memiliki warna yang berbeda.

Para ahli teori graph berkeyakinan bahwa orang yang pertama kali mengemukakan masalah empat warna adalah A.F. Mobius (1790 – 1868) dalam salah satu kuliahnya di Tahun 1840. Sepuluh tahun kemudian, A. De Morgan (1806 – 1871) kembali membahas masalah ini bersama ahli-ahli matematika lainnya di kota London. Dengan demikian tulisan De Morgan dianggap sebagai referensi pertama berkenaan dengan masalah empat warna. Masalah empat warna ini menjadi sangat terkenal setelah Coyley mempublikasikannya Tahun 1879 dalam *Proceedings of the Royal Geographic Society* volume pertama.

Hal lain yang penting untuk dibicarakan sehubungan dengan perkembangan teori graph adalah apa yang dikemukakan oleh Sir W.R. Hamilton (1805 – 1865). Pada Tahun 1859 dia berhasil menemukan suatu permainan yang kemudian dijualnya ke sebuah pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terbuat dari kayu berbentuk *dodecahedron beraturan* yakni berupa sebuah polihedron dengan 12 muka dan 20 pojok. Tiap muka berbentuk sebuah pentagon beraturan dan tiap pojoknya dibentuk oleh tiga

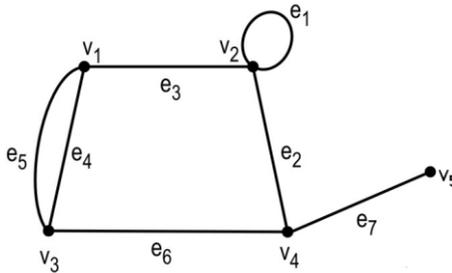
sisi berbeda. Tiap pojok dari *dodecahedron* tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dan lain-lain. Masalah dalam permainan ini adalah, kita diminta untuk mencari suatu rute melalui sisi-sisi dari *dodecahedron* sehingga tiap kota dari 20 kota yang ada dapat dilalui tepat satu kali. Walaupun saat ini masalah tersebut dapat dikategorikan mudah, akan tetapi pada saat itu tidak ada seorang pun yang bisa menemukan syarat perlu dan cukup dari eksistensi rute yang dicari.

Kurang lebih setengah abad setelah masa Hamilton, aktivitas dalam bidang teori graph dapat dikatakan relatif kecil. Pada Tahun 1920-an kegiatan tersebut muncul kembali yang dipelopori oleh D. Konig. Konig berupaya mengumpulkan hasil-hasil pemikiran para ahli matematika tentang teori graph termasuk hasil pemikirannya sendiri, kemudian dikemasnya dalam bentuk buku yang diterbitkan pada Tahun 1936. Buku tersebut dianggap sebagai buku pertama tentang teori graph.

Tiga puluh tahun terakhir ini merupakan periode yang sangat intensif dalam aktivitas pengembangan teori graph baik murni maupun terapan. Sejumlah besar penelitian telah dilakukan, ribuan artikel telah diterbitkan dan lusinan buku telah banyak ditulis. Di antara orang terkenal yang banyak berkecimpung dalam bidang ini adalah Claude Berge, Oysten Ore, Paul Erdos, William Tutte, dan Frank Harary.

B. PENGERTIAN DASAR TEORI GRAPH

Sebuah *graph linier* (atau secara sederhana disebut *graph*) $G = (V, E)$ terdiri atas sekumpulan objek $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik, dan sebuah himpunan lain $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang merupakan himpunan sisi sedemikian hingga tiap sisi e_k dikaitkan dengan suatu pasangan tak terurut (v_i, v_j) . Titik v_i, v_j yang berkaitan dengan e_k disebut titik-titik ujung sisi e_k . Cara merepresentasikan sebuah graph yang paling umum adalah berupa diagram. Dalam diagram tersebut, titik-titik dinyatakan sebagai noktah dan tiap sisi dinyatakan sebagai segmen garis yang menghubungkan tiap dua titik. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh graph pada Gambar 1.1 di bawah ini.



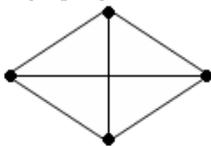
Gambar 1.1.
Graph dengan lima titik dan tujuh sisi

Dalam sebuah graph, seperti terlihat pada contoh di atas, dimungkinkan adanya suatu sisi yang dikaitkan dengan pasangan (v_1, v_2) . Sisi yang dua titik ujungnya sama disebut *loop*. Dalam graph pada Gambar 1.1, e_1 merupakan sebuah loop. Dari contoh di atas juga perlu dicatat bahwa dalam sebuah graph dimungkinkan adanya lebih dari satu sisi yang dikaitkan dengan sepasang titik. Sebagai contoh, e_4 dan e_5 pada graph di atas dikaitkan dengan pasangan titik (v_1, v_3) . Pasangan sisi semacam ini disebut sisi-sisi *paralel* atau *sejajar*.

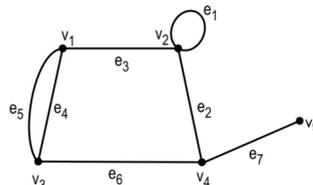
Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel disebut *graph sederhana*. Dalam beberapa literatur teori graph, pembahasan hanya dibatasi pada graph sederhana, akan tetapi dalam banyak aplikasi teknik, penggunaan loop dan sisi paralel sangat diperlukan. Untuk membedakan antara graph yang memuat loop dan sisi paralel dengan graph yang tidak memuat kedua hal tersebut, sebagian penulis menggunakan istilah *graph sederhana* untuk graph yang tidak memuat loop dan sisi paralel, serta *graph umum* untuk yang lainnya.

Dalam sebuah graph mungkin terdapat dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua titik yang berlainan. Kedua sisi tersebut dinamakan sisi rangkap atau sisi ganda. Graph yang mengandung loop atau sisi rangkap dinamakan *graph ganda*.

Contoh:



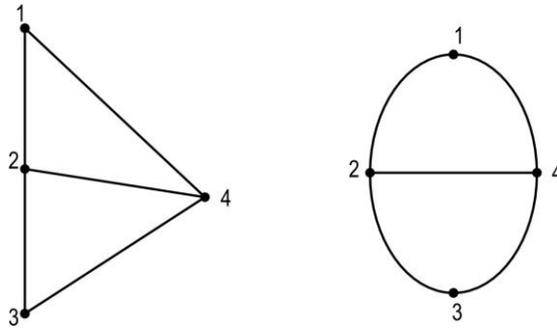
Graph Sederhana



Graph Tak Sederhana

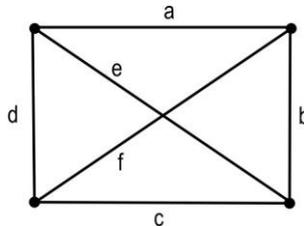
Gambar 1.2

Dalam menggambar sebuah graph, bentuk sisi dapat berupa garis lurus atau garis lengkung. Demikian pula ukurannya, dalam penggambaran sebuah graph tidaklah diperhatikan. Hal yang penting untuk diperhatikan dalam sebuah graph adalah insidensi antara titik-titik dengan sisi-sisinya. Sebagai contoh, dua graph yang disajikan pada Gambar 1.3 di bawah ini menggambarkan graph yang sama, karena insidensi antara sisi-sisi dan titik-titik pada graph tersebut adalah sama.



Gambar 1.3.
Graph yang sama

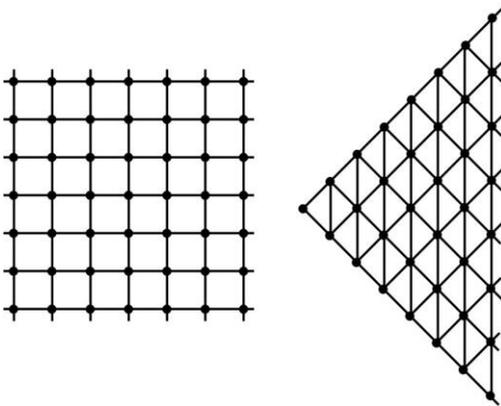
Sekarang perhatikan Gambar 1.4 di bawah ini. Pada gambar tersebut sisi e dan f nampaknya seperti berpotongan, akan tetapi perpotongannya tidak berupa titik. Kedua sisi seperti itu harus dipandang sebagai dua ruas garis yang terletak pada dua bidang berbeda, sehingga kedua sisi itu tidak berpotongan.



Gambar 1.4.
Sisi e dan f tidak berpotongan

C. GRAPH HINGGA DAN GRAPH TAK HINGGA

Walaupun dalam definisi graph tidak disebutkan secara eksplisit bahwa himpunan titik V dan himpunan sisi E tidak perlu merupakan sebuah himpunan hingga, akan tetapi dalam kebanyakan aplikasi teori graph kedua himpunnannya tersebut kebanyakan merupakan himpunan hingga. Sebuah graph $G = (V, E)$ dengan V dan E hingga disebut *graph hingga* atau *graph terhingga* dan jika sebaliknya yakni jika V dan E tak hingga, maka G disebut *graph tak hingga*. Contoh graph hingga dapat dilihat pada Gambar 1.1, Gambar 1.2, Gambar 1.3 dan Gambar 1.4. Sedangkan Gambar 1.5 di bawah ini merupakan contoh dari *bagian* graph tak hingga.



Gambar 1.5.
Bagian dari graph tak hingga

Untuk pembahasan selanjutnya, yang dimaksud dengan graph dalam modul ini adalah graph hingga.

D. INSIDENSI DAN AJASENSI

Jika sebuah titik v_1 merupakan titik ujung dari suatu sisi e_j , maka v_1 dan e_j disebut saling berinsidensi atau titik v_1 insiden dengan sisi e_j . Sebagai contoh, pada Gambar 1.1 di atas sisi e_2 , e_6 , dan e_7 adalah sisi-sisi yang insiden dengan titik v_4 . Dua sisi yang tidak paralel disebut ajasensi, bila kedua sisi tersebut insiden dengan titik yang sama. Sebagai contoh, e_2 dan e_7 dalam

Gambar 1.1 merupakan dua sisi yang ajasen. Selain itu, dua buah titik disebut ajasen jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama. Dalam Gambar 1.1, v_4 dan v_5 adalah dua titik yang saling ajasen, sedangkan titik v_1 dan v_4 merupakan dua titik yang tidak saling ajasen.

Jumlah atau banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik v_i (loop dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut, dinotasikan $d(v_i)$. Sebagai contoh, dalam Gambar 1.1, $d(v_1) = d(v_4) = 3$, $d(v_2) = 4$, dan $d(v_5) = 1$. Derajat suatu titik sering juga disebut *valensi* dari titik tersebut.

Selanjutnya pandang sebuah graph G dengan e sisi dan n titik v_1, v_2, \dots, v_n . Karena tiap sisi menyumbangkan dua derajat, maka jumlah derajat dari semua titik dalam G sama dengan dua kali jumlah sisi dalam G .

Dengan demikian,

$$\sum d(v_i) = 2e \tag{1}$$

Sebagai contoh, pada Gambar 1.1

$$\begin{aligned} d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) &= 3 + 4 + 3 + 3 + 1 = 14 \\ &= \text{dua kali jumlah sisi} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (1) kita peroleh teorema berikut.

Teorema 1

Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graph selalu genap.

Bukti

Jika titik-titik berderajat ganjil dan genap kita pandang secara terpisah, maka jumlah ruas kiri persamaan (1) dapat dinyatakan sebagai jumlah dari dua bilangan. Pertama diperoleh dari titik-titik berderajat ganjil, dan kedua dari titik-titik berderajat genap. Jadi,

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = \sum d(v_j) + \sum d(v_k) \tag{2}$$

dengan $\sum d(v_j)$ dari titik-titik genap dan $\sum d(v_k)$ dari titik-titik ganjil.

Karena ruas kiri persamaan (2) genap, dan suku pertama dari Ruas kanan adalah genap, maka suku kedua ruas kanan juga pasti genap.

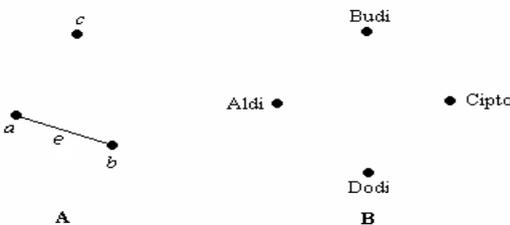
$$\sum d(v_k) = \text{sebuah bilangan genap.} \quad (3)$$

Karena dalam persamaan (3) tiap $d(v_k)$ adalah bilangan ganjil, maka jumlah keseluruhannya pastilah genap. (terbukti)

Sebuah graph dengan semua titiknya berderajat sama disebut *graph reguler*.

Selanjutnya akan dibahas bagaimana graph dapat digunakan untuk menunjukkan hubungan tertentu antara objek-objek sembarang. Untuk mempelajari keterhubungan objek-objek itu secara lebih mendalam, maka kita perlu mempelajari teori graph secara lebih mendetil. Kita memerlukan istilah tertentu untuk menunjukkan bagaimana kedudukan titik dan garis dalam graph itu. Istilah ini berlaku untuk semua graph.

Dua titik P dan Q yang dihubungkan dengan sebuah garis e dikatakan ajasen. Titik P dan Q yang terletak pada garis e atau titik P dan Q merupakan titik ujung garis e dikatakan insiden pada garis e atau garis e insiden pada titik P dan Q . Pada graph A berikut, titik a ajasen dengan titik b , tetapi titik a dan c tidak ajasen, demikian pula titik b dan c tidak ajasen. Titik a insiden pada sisi e , titik c tidak insiden pada sisi e . Pada graph B tidak ada pasangan titik yang ajasen.

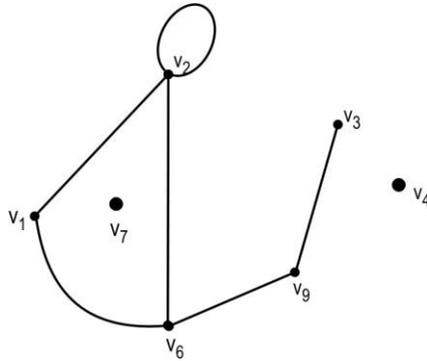


Gambar 1.6.

E. TITIK TERISOLASI DAN TITIK ANTING/UJUNG

Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden disebut *titik terisolasi*. Dengan kata lain, titik terisolasi adalah titik yang berderajat nol. Titik v_4 dan

v_7 dalam Gambar 1.7 di bawah ini adalah dua contoh titik terisolasi. Sebuah titik berderajat satu disebut *titik anting/ujung*. Titik v_3 dalam Gambar 1.7 merupakan contoh titik anting. Dua sisi yang saling berjasensi atau berbatasan disebut *seri* jika titik sekutunya berderajat satu. Dalam Gambar 1.7, dua sisi yang insiden dengan v_1 adalah seri.



Gambar 1.7.

Graph yang memuat titik terisolasi, sisi seri, dan titik anting



LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Teori graph lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang mengupas masalah
- 2) G.R. Kirchoff berhasil mengembangkan salah satu cabang/bagian teori graph yang disebut teori
- 3) Para ahli teori graph berkeyakinan bahwa yang pertama kali mengembangkan atau membahas masalah empat warna adalah
- 4) Pada Gambar 1.1, sebutkan sebuah sisi yang dua titik ujungnya sama!
- 5) Perhatikan kembali graph pada Gambar 1.1. Apakah graph tersebut memiliki sisi sejajar?
- 6) Apa yang dimaksud dengan graph sederhana!

- 7) Perhatikan kembali graph pada Gambar 1.1. Sebutkan sisi-sisi yang insiden dengan titik v_3 !
- 8) Jika dua buah sisi yang tidak paralel insiden di sebuah titik yang sama, maka kedua sisi itu disebut
- 9) Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graph selalu
- 10) Dalam sebuah graph $G = (V, E)$, himpunan mana yang dimungkinkan merupakan sebuah himpunan kosong?

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) Jembatan Konigsberg
- 2) Teori pohon
- 3) Mobius
- 4) Sisi e_1
- 5) Ya, yaitu e_4 dan e_5
- 6) Graph sederhana adalah graph yang tidak memuat loop dan sisi paralel
- 7) Sisi-sisi yang insiden dengan v_3 adalah $e_4, e_5,$ dan e_6
- 8) Ajasen
- 9) Genap
- 10) Himpunan sisi E



RANGKUMAN

Berikut adalah beberapa hal penting menyangkut sejarah teori graph dan beberapa pengertian dasar teori graph.

1. Teori graph lahir pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler tentang masalah jembatan Konigsberg.
2. Tahun 1647 G.R. Kirchoff pertama kali mengembangkan teori pohon.
3. A.F. Mobius diyakini sebagai orang pertama yang mengkaji masalah empat warna dalam pewarnaan sebuah peta.
4. Tahun 1859, Hamilton berhasil menciptakan sebuah permainan teori graph dengan menggunakan kayu berbentuk *dodecahedron*.
5. Buku pertama tentang teori graph ditulis Tahun 1936 oleh D. Konig.
6. Loop adalah sebuah sisi yang dua titik ujungnya sama.

7. Dua buah sisi yang insiden dengan dua titik yang sama disebut sisi paralel.
8. Graph sederhana adalah sebuah graph yang tidak memuat loop dan sisi paralel.
9. Sebuah graph $G = (V, E)$ dengan V dan E berupa himpunan hingga disebut graph hingga, dan jika sebaliknya disebut graph tak hingga.
10. Dua sisi yang tidak paralel disebut ajasen, jika kedua sisi tersebut insiden dengan titik yang sama.
11. Dua buah titik disebut ajasen, jika kedua titik tersebut merupakan titik-titik ujung dari sisi yang sama.
12. Banyaknya titik berderajat ganjil dalam sebuah graph selalu genap.
13. Titik terisolasi adalah titik yang tidak memiliki sisi insiden.
14. Titik anting atau titik ujung adalah sebuah titik berderajat satu.



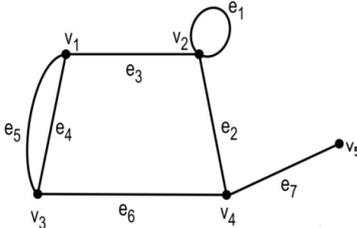
TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Jembatan Konigsberg di daratan Eropa telah menjadi inspirasi kelahiran teori graph. Orang yang pertama kali membahas masalah jembatan tersebut dengan menggunakan teori graph adalah
 - A. Hamilton
 - B. Konigsberg
 - C. Euler
 - D. Konig
- 2) Teori pohon merupakan bagian teori graph yang sangat penting. Orang yang pertama kali mengemukakan teori ini adalah
 - A. Kirchoff
 - B. Konig
 - C. Hamilton
 - D. Euler
- 3) Dua buah sisi yang insiden pada dua titik yang sama disebut sisi
 - A. seri
 - B. sejajar
 - C. insiden
 - D. ajasen

- 4) Sebuah graph yang tidak memuat loop dan sisi paralel disebut graph
- no1
 - tree
 - sederhana
 - terhubung
- 5) Graph $G = (V, E)$ disebut graph hingga jika
- V dan E merupakan himpunan hingga
 - V merupakan himpunan hingga
 - E merupakan himpunan hingga
 - V atau E merupakan himpunan hingga
- 6) Graph $G = (V, E)$ disebut graph tak hingga jika
- V dan E merupakan himpunan hingga
 - V atau E merupakan himpunan tak hingga
 - V dan E merupakan himpunan tak hingga
 - V merupakan himpunan kosong

7)



Derajat titik v_2 dari graph di atas adalah

- 1
 - 2
 - 3
 - 4
- 8) Misalkan e_1 dan e_2 adalah dua sisi dari suatu graph G yang tidak paralel dan v_1 dalam G . Jika e_1 dan e_2 insiden di v_1 , maka kedua sisi itu disebut
- ajasen
 - insiden
 - sejajar
 - seri

- 9) Misalkan dua titik v_1 dan v_2 dalam sebuah graph G merupakan titik-titik ujung dari sebuah sisi e . Maka kedua titik tersebut merupakan titik-titik yang saling
- A. seri
 - B. paralel
 - C. ajasen
 - D. insiden
- 10) Sebuah titik dalam graph G yang tidak memiliki satu pun sisi insiden disebut
- A. titik pendan
 - B. titik terisolasi
 - C. titik insidensi
 - D. titik ajasensi

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Graph sebagai Model Matematika dan Aplikasinya

A. GRAPH SEBAGAI MODEL MATEMATIKA

Konstruksi model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara dengan permasalahan matematika yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graph. Pada bagian ini akan disajikan contoh permasalahan yang dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk graph.

Contoh 1

Seorang guru bermaksud membuat suatu diagram tentang hubungan antar siswa dari kelas yang diajarnya. Diagram tersebut harus berisikan informasi apakah antara satu siswa dengan siswa lainnya berteman atau tidak berteman. Hal semacam itu dapat dinyatakan dalam bentuk diagram yang disebut graph. Dalam graph tersebut, seorang siswa dinyatakan sebagai sebuah titik dan hubungan berteman antara dua siswa, dinyatakan dengan sebuah sisi yang menghubungkan titik-titik yang mewakili dua siswa tersebut.

Contoh 2

Dalam suatu persiapan untuk menghadapi perang, beberapa peleton tentara ditempatkan di beberapa lokasi yang berbeda. Komunikasi antara peleton dilakukan dengan menggunakan radio telepon yang kemampuannya terbatas pada jarak tertentu.

Jika jarak antara dua peleton masih terjangkau, maka komunikasi dapat dilakukan. Keadaan seperti ini dapat dinyatakan dalam suatu model matematika berbentuk graph. Dalam graph tersebut, titik menyatakan peleton dan sisi antara dua titik menyatakan komunikasi antara dua peleton yang diwakili oleh dua titik tersebut.

Contoh 3

Misalkan kita ingin menempuh perjalanan dari Jakarta menuju Surabaya. Mungkin kita ingin mengetahui rute terpendek yang dapat dipilih. Dalam

permasalahan ini kota direpresentasikan sebagai titik, sedangkan rute atau jalan direpresentasikan sebagai segmen garis atau kurva.

Contoh 4

Misalnya terdapat satuan tugas dalam kepolisian yang bertugas mengungkap jaringan pengedar obat terlarang. Hal tersebut dapat kita gambarkan ke dalam sebuah graph. Dalam graph tersebut, tiap-tiap anggota komisi dinyatakan dengan sebuah titik, dan hubungan di antara anggota dinyatakan dengan sisi atau kurva. Dalam permasalahan ini kita mungkin ingin tahu seberapa rapuhkah jaringan komunikasi ini, dan seberapa mudahkah kita bisa menghancurkan jaringan tersebut. Dengan menggunakan teori graph desain jaringan komunikasi yang handal dapat diciptakan.

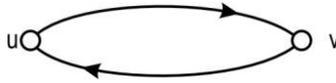
Contoh 5

Teori graph juga biasanya digunakan dalam bidang elektronika, misalnya untuk mendesain sirkuit cetakan. Biasanya sirkuit cetakan pada lembaran silikon harus didesain secara khusus. Berbeda dengan desain sirkuit yang menggunakan kabel-kabel, sirkuit cetakan tidak boleh mengandung bagian-bagian konduktor yang saling bersinggungan atau saling memotong, karena hal tersebut bisa membuat munculnya hubungan pendek. Teori graph memberi penjelasan apakah suatu pola sirkuit cetakan yang kita miliki mempunyai pola lain yang sejenis? Apakah sebuah pola sirkuit yang memiliki hubungan konduktor yang saling berpotongan dapat didesain ulang demikian sehingga susunannya masih tetap tapi tidak lagi mengandung bagian-bagian yang saling bersinggungan atau berpotongan? Melalui konsep graph isomorfik kita dapat mengetahui apakah sebuah sirkuit cetakan memiliki desain lain yang lebih baik tanpa mengubah susunannya.

B. GRAPH BERARAH SEBAGAI MODEL MATEMATIKA

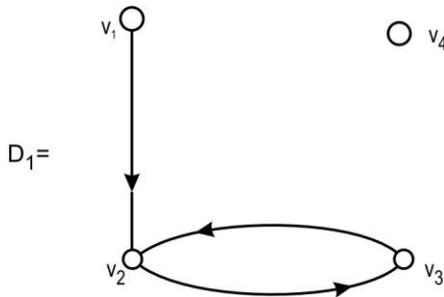
Sebuah graph berarah D adalah suatu himpunan yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V . R adalah relasi yang tidak refleksif. Seperti halnya dalam graph yang sudah dibicarakan di atas, elemen dari V disebut titik. Tiap pasangan terurut dalam R disebut *sisi berarah* atau *arah*.

Karena relasi dari sebuah graph berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah D , (v, u) belum tentu merupakan arah dari D . Hal semacam ini dapat kita ilustrasikan pada diagram dengan gambar segmen garis atau kurva antara titik u dan v yang memakai tanda panah sebagai tanda arah dari u ke v atau dari v ke u . Bila dari u ke v masing-masing mempunyai arah, maka diagramnya dapat kita buat seperti di bawah ini (Gambar 1.8).



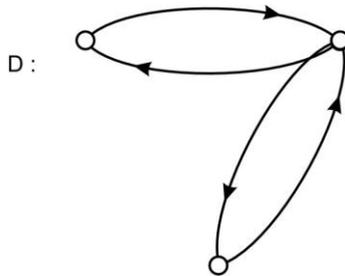
Gambar 1.8.

Misalkan D_1 adalah sebuah graph berarah dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2)\}$. Graph berarah D_1 , dapat dibuat seperti gambar di bawah ini (Gambar 1.9)



Gambar 1.9.

Mungkin juga terjadi bahwa relasi yang mendefinisikan sebuah graph berarah D merupakan sebuah relasi simetris. Graph semacam ini disebut *Graph berarah simetris*. Gambar di bawah ini adalah contoh sebuah graph simetris.



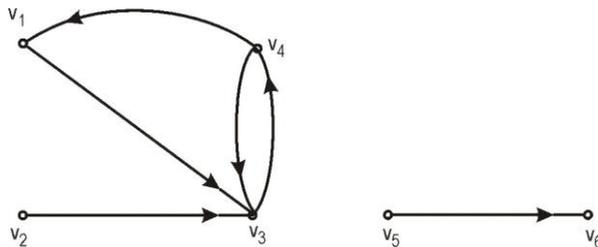
Gambar 1.10.

Contoh 6

Diketahui sebuah graph berarah D dengan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan arah $E = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6)\}$. Gambarlah diagram dari graph D .

Penyelesaian

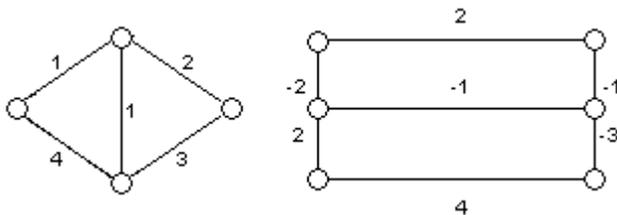
Gambar di bawah ini merupakan diagram dari graph D .



Gambar 1.11.

C. JARINGAN KERJA SEBAGAI MODEL MATEMATIKA

Sebuah jaringan kerja adalah sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real. Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph disebut *jaringan kerja tidak berarah* sedangkan jaringan kerja yang merupakan graph berarah disebut *jaringan kerja berarah*. Gambar di bawah ini merupakan contoh diagram dari dua jenis jaringan kerja tersebut.



Gambar 1.12.

Graph bertanda S adalah suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya $+1$ atau -1 . Karena tanda positif atau negatif dipasang pada tiap

sisi dari S , maka dapat dipahami bila tiap sisi dari S disebut sisi positif atau sisi negatif. Sebagai contoh, jika

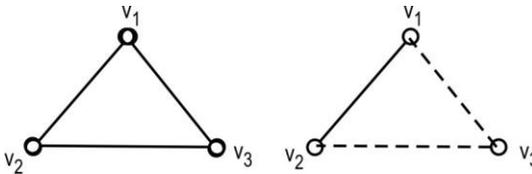
$$V = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

$$E = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 \}$$

dan

$$f = \{ (v_1v_2, +1), (v_1v_3, -1), (v_2v_3, -1) \}$$

maka graph bertanda seperti ini dapat dinyatakan dalam dua cara yaitu seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 1.13.

Contoh 7

Hubungan bertetangga dapat dinyatakan dalam bentuk graph bertanda. Dua keluarga yang saling berhubungan dengan baik dapat diwakili oleh sisi positif, dua keluarga yang berhubungan kurang baik dapat dinyatakan dengan sisi negatif dan dua keluarga yang tidak saling berhubungan atau tidak saling kenal dapat dinyatakan dengan tidak ada sisi antar dua titik yang mewakili dua tetangga tersebut.

Jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya bulat positif sering kali digunakan sebagai model matematika. Ada dua cara yang sering digunakan untuk menyatakan jaringan kerja tidak berarah seperti ini. Sebagai contoh, jika

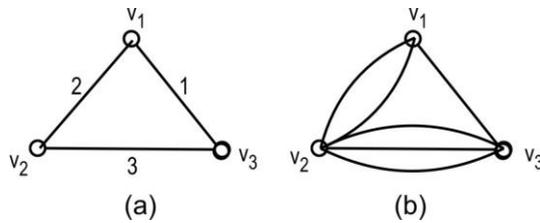
$$V = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

$$E = \{ v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3 \}$$

dan

$$f = \{ (v_1v_2, 2), (v_1v_3, 1), (v_2v_3, 3) \}$$

maka jaringan kerjanya dapat dibuat seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 1.14.

Jaringan kerja tak berarah yang dinyatakan seperti Gambar 1.14 disebut *multigraph*. Misalnya M adalah sebuah multigraph dengan himpunan sisi E dan fungsi f . Jika $uv \in E$ dan $f(uv) = n$ (n adalah bilangan bulat positif), maka u dan v dihubungkan oleh n sisi. Sisi-sisi seperti ini disebut *sisi multipel*.

Contoh 8

Misalkan v_1, v_2 , dan v_3 adalah tiga buah kota. Tiap dua kota dihubungkan oleh satu jalan yang jaraknya tidak sama. Jika antara salah satu kota dengan kota lain ditempuh dengan jalan kaki, maka lama perjalanannya adalah sebagai berikut:

- antara v_1 dan v_2 , dua hari;
- antara v_1 dan v_3 , satu hari;
- antara v_2 dan v_3 , tiga hari.

Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk graph seperti pada Gambar 1.14 (a).

Contoh 9

Misalkan v_1, v_2 , dan v_3 adalah tiga buah kota. Antara v_1 dan v_2 terdapat dua jalan, antara v_1 dan v_3 terdapat satu jalan, sedangkan antara v_2 dan v_3 terdapat tiga jalan. Situasi ini dapat dinyatakan dengan graph seperti Gambar 1.14 (b).

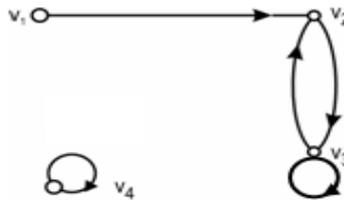
Bila relasi yang mendefinisikan suatu graph memuat (v, v) dengan $v \in V$, maka nama graph tersebut berubah menjadi *graph dengan loop*, *graph berarah dengan loop*, *jaringan kerja dengan loop*, atau *multigraph dengan loop*.

Misalkan

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \text{ dan}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_3), (v_4, v_4)\}.$$

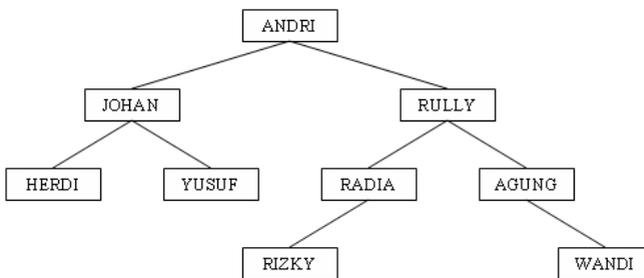
Karena relasi E memuat (v_3, v_3) dan (v_4, v_4) , maka graph berarah dengan loop ini dapat digambar seperti di bawah ini.



Gambar 1.15.

D. SILSILAH KELUARGA

Silsilah keluarga merupakan contoh masalah sederhana yang bisa dinyatakan dalam bentuk graph. Graph yang terbentuk dari silsilah keluarga biasanya berupa *pohon* atau *tree*. Gambar 1.16 di bawah ini adalah contoh silsilah keluarga Andri yang dapat diubah menjadi sebuah pohon.

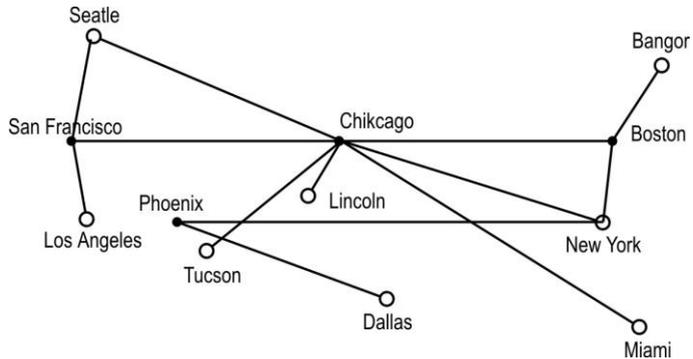


Gambar 1.16.

E. SISTEM KOMUNIKASI

Perhatikan Gambar 1.17 di bawah ini. Gambar tersebut merupakan suatu jaringan komunikasi dengan menggunakan komputer. Pada gambar tersebut,

bulatan kecil menyatakan komputer mikro dan bulatan berwarna hitam kecil menyatakan komputer mini.



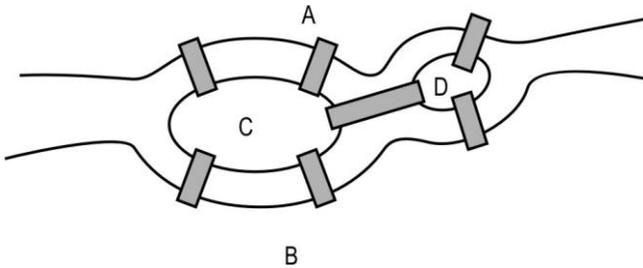
Gambar 1.17.

Komputer mini digunakan untuk mengubah signal dari suatu sirkuit ke sirkuit lainnya serta untuk memproses data. Sedangkan lambang *diamond* menyatakan komputer *mainframe* yang merupakan pusat dari seluruh jaringan. Seseorang yang bermaksud mengakses jaringan tersebut harus melalui salah satu dari komputer mini yang ada dengan menggunakan komputer mikro miliknya. Sistem tersebut dapat digunakan untuk mengirim pesan antarkomputer mikro, atau untuk melakukan proses pengolahan data dengan menggunakan salah satu komputer yang lebih besar. Melalui diagram atau graph di atas dapat diajukan berbagai pertanyaan antara lain sebagai berikut:

1. Dapatkah komputer mikro di Seattle mengirimkan pesan melalui komputer mikro di Miami?
2. Berapa banyak perubahan signal diperlukan untuk memperoleh pesan yang dikirim dari Boston ke Los Angeles?
3. Jika komputer mini di Chicago rusak, apakah pesan dari Boston ke Los Angeles masih dapat dikirimkan?
4. Jika sirkuit antara Boston dan New York ada kerusakan, apakah pengiriman pesan dari Bangor ke Phoenix masih bisa dilakukan?

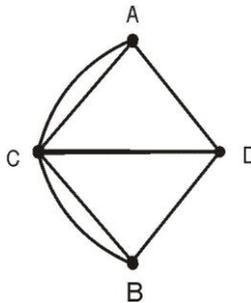
F. JARINGAN TRANSPORTASI

Masalah transportasi sebenarnya merupakan hal yang sangat klasik dalam teori graph, karena kelahiran teori graph itu diawali oleh masalah transportasi yang terkenal yaitu Jembatan Konigsberg. Ilustrasi jembatan tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.18 di bawah ini.



Gambar 1.18.

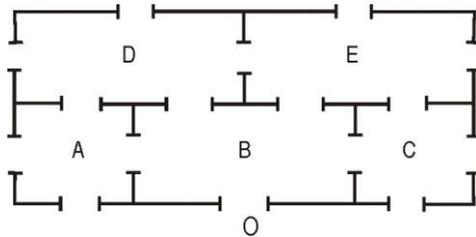
Pada gambar tersebut A, B, C, dan D adalah daerah-daerah yang dihubungkan oleh tujuh buah jembatan. Situasi seperti ini dapat dinyatakan dalam bentuk yang sederhana berupa graph seperti diperlihatkan pada Gambar 1.19 di bawah ini.



Gambar 1.19.

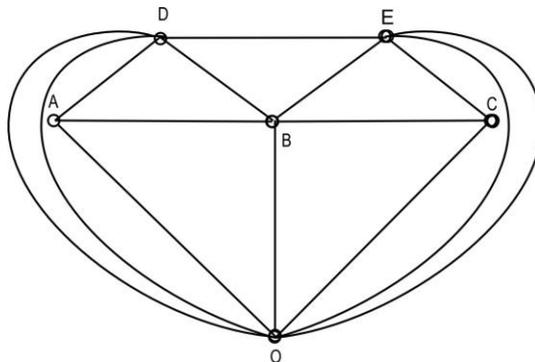
G. DESAIN ARSITEKTUR

Perhatikan desain sebuah bangunan pada Gambar 1.20 di bawah ini. Pada gambar tersebut A, B, C, D, dan E menyatakan ruangan yang ada dalam bangunan tersebut, sedangkan O menyatakan bagian luar bangunan.



Gambar 1.20.

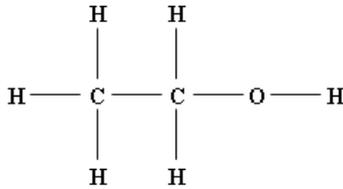
Jika A, B, C, D, E, dan O dinyatakan sebagai titik-titik dan pintu yang menghubungkan antar ruangan atau antara ruangan dengan bagian luar dinyatakan sebagai sisi, maka situasi pada gambar di atas dapat dinyatakan sebagai graph seperti pada Gambar 1.21 di bawah ini.



Gambar 1.21

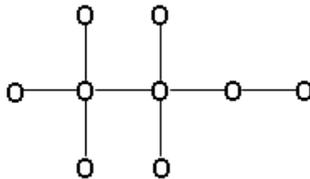
H. IKATAN KIMIA

Dalam bidang kimia pun teori graph mempunyai kegunaan yang amat penting. Kita mengenal ikatan-ikatan kimia seperti H_2SO_4 , H_2O , CO_2 , dan CH_4 . Tiap molekul kimia mengandung sejumlah atom yang dikaitkan dengan ikatan kimia. Sebagai contoh, karbon dioksida mempunyai sebuah atom karbon yang dikaitkan terhadap 2 atom oksigen. Demikian pula dalam C_2H_5OH (ethanol), sebuah atom karbon dikaitkan pada 3 atom hidrogen, sedangkan atom karbon lainnya dikaitkan dengan atom karbon pertama, 2 atom hidrogen dan sebuah atom oksigen. Atom oksigennya dikaitkan dengan sebuah atom hidrogen, selain dengan sebuah atom karbon. Perhatikan Gambar 1.22.



Gambar 1.22

Konstruksi C_2H_5OH seperti pada gambar di atas termasuk ikatan kimia yang cukup rumit. Dalam teori graph ikatan kimia ini dapat dinyatakan dengan graph pada Gambar 1.23. Dalam graph tersebut banyaknya sisi yang menghubungkan sebuah titik menyatakan valensi dari tiap-tiap atom yang berkorespondensi.



Gambar 1.23

Diagram pada Gambar 1.23 pertama kali digunakan tahun 1864 untuk menggambarkan bagaimana susunan atom-atom dalam sebuah molekul. Ide pertama diketengahkan oleh Alexander Crum Brown (1838-1922), yang pertama kali memperkenalkan fenomena isomerisme, yakni eksistensi

isomer-isomer. Isomer menyatakan molekul-molekul yang mempunyai rumus kimia yang sama tapi mempunyai sifat kimiawi yang berlainan.

Diagram ini menunjukkan bagaimana sebuah atom dihubungkan dengan atom lainnya. Informasi ini sangat diperlukan dalam mempelajari perilaku kimiawi sebuah molekul. Masalah dokumentasi kimia berhubungan dengan isomorfisme dan masalah pengkodean. Ini menunjukkan bahwa penyelesaian bagi masalah isomorfisme graph bagian memberikan penyelesaian bagi masalah penelitian struktur kimia.



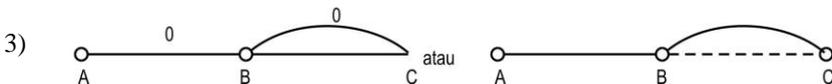
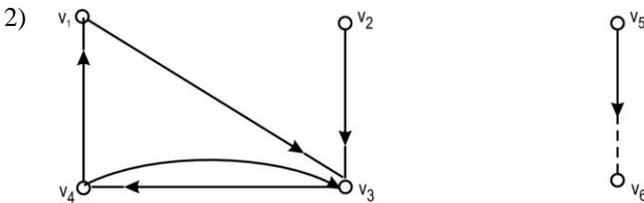
LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

- 1) Suatu sekolah bermaksud membentuk sepuluh macam kepanitiaan yang anggota-anggotanya diambil dari 15 orang siswa terpilih. Banyaknya anggota dari kepanitiaan yang dibentuk tidak ditentukan, artinya, bisa beranggotakan sedikit atau bisa juga banyak. Kemudian setiap siswa dari 15 orang itu dimungkinkan untuk tidak menjadi anggota kepanitiaan atau mungkin pula merangkap sebagai anggota beberapa kepanitiaan. Berikan dua contoh graph yang menggambarkan situasi tersebut!
- 2) Gambarlah graph berarah dengan himpunan titik $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$ dan himpunan sisi $E = \{ (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_6) \}$.
- 3) Kota A dan kota B dihubungkan oleh sebuah jalan umum biasa, sedangkan kota B dan kota C dihubungkan oleh dua jalan: satu jalan umum biasa dan satu lagi jalan bebas hambatan yang dikenakan biaya bagi siapa saja yang melaluinya. Buatlah dua graph yang menggambarkan situasi seperti ini!
- 4) Silsilah keluarga dapat dibuat atau dinyatakan dalam bentuk sederhana berupa graph. Graph tersebut biasanya berbentuk
- 5) Selain silsilah keluarga, sebutkan beberapa contoh masalah lainnya yang dapat dinyatakan dalam bentuk graph!

Petunjuk Jawaban Latihan

- 1) Untuk graph G_1 , misalkan $V(G_1)$ menyatakan siswa terpilih yang jumlahnya 15 orang. Dua titik dari G_1 dihubungkan dengan sebuah sisi, jika dan hanya jika dua siswa yang diwakili oleh titik-titik tersebut menjadi anggota kepanitiaan yang sama. Untuk graph G_2 , misalkan $V(G_2)$ menyatakan 10 kepanitiaan yang dibentuk. Dua titik dari G_2 dihubungkan jika dan hanya jika dua kepanitiaan yang diwakili oleh titik-titik tersebut memuat anggota yang sama.



- 4) Tree atau pohon.
5) Sistem komunikasi, jaringan transportasi, dan desain arsitektur.



RANGKUMAN

1. Di antara beberapa model matematika yang sudah dikenal, graph merupakan salah satu contoh model matematika yang banyak kegunaannya.
2. Terdapat beberapa jenis graph yaitu graph tak berarah, graph berarah, dan jaringan kerja.
3. Sebuah graph G adalah suatu himpunan hingga V yang tidak kosong yang memenuhi sifat tidak refleksif dan simetris dari suatu relasi R pada V .

4. Sebuah graph berarah D adalah suatu himpunan V yang tidak kosong dengan sebuah relasi R pada V yang tidak refleksif.
5. Jaringan kerja adalah sebuah graph atau graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.
6. Graph dapat diterapkan dalam beberapa permasalahan antara lain masalah silsilah keluarga, sistem komunikasi, jaringan transportasi, dan desain arsitektur.



TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

- 1) Berikut adalah contoh permasalahan yang bisa dinyatakan dalam bentuk graph, *kecuali*
 - A. masalah hubungan keluarga
 - B. masalah hubungan bertetangga
 - C. masalah hubungan pertemanan
 - D. masalah pengobatan penyakit menular
- 2) Sebuah graph berarah G adalah suatu himpunan hingga titik yang tidak kosong dan sebuah relasi R yang bersifat
 - A. refleksif
 - B. tidak refleksif
 - C. antisimetri
 - D. transitif
- 3) Karena relasi dari sebuah graph berarah D tidak perlu simetris, maka apabila (u, v) merupakan arah dari D , (v, u) adalah
 - A. pasti merupakan arah dari D
 - B. berlawanan arah dengan (u, v)
 - C. searah dengan (u, v)
 - D. tidak perlu merupakan arah dari D
- 4) Jika sebuah graph D , (u, v) dan (v, u) keduanya merupakan arah dari D , maka graph tersebut disebut graph
 - A. berarah
 - B. berarah simetris
 - C. tidak berarah
 - D. tidak berarah simetris

- 5) Jaringan kerja yang merupakan graph berarah disebut
- jaringan kerja biasa
 - jaringan tidak berarah
 - jaringan kerja berarah
 - jaringan kerja semu
- 6) Misalkan M adalah sebuah multigraph. Jika $uv \in E$ dan $f(uv) = n$, maka u dan v dihubungkan oleh sisi sebanyak
- n
 - $n-1$
 - $n+1$
 - $n(n-1)$
- 7) Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah multigraph. Jika G memuat (v, v) dengan v anggota V , maka G disebut
- loop
 - multi graph dengan loop
 - multi graph
 - graph berarah
- 8) Perhatikan Gambar 1.20. Banyaknya pintu yang terdapat dalam suatu ruangan sama dengan ... dari graph yang merepresentasikannya.
- banyak sisi
 - banyaknya sisi berarah
 - derajat titik
 - banyaknya loop
- 9) Masalah transportasi yang terkenal yaitu *Jembatan Königsberg*. Masalah tersebut dapat digambar dalam bentuk graph yang terdiri dari:
- 4 titik dan 7 sisi
 - 4 sisi dan 7 titik
 - 4 titik dan 4 sisi
 - 7 titik dan 7 sisi
- 10). Orang pertama yang memperkenalkan fenomena isomerisme untuk menggambarkan bagaimana susunan atom-atom dalam sebuah molekul adalah
- Leonhard Euler
 - Alexander Crum Brown
 - Königsberg
 - Hamilton

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

- 1) C. Baca sejarah perkembangan teori graph.
- 2) A. Lihat sejarah perkembangan teori graph.
- 3) B. Lihat definisi sisi sejajar.
- 4) C. Lihat definisi graph sederhana.
- 5) A. Lihat definisi graph hingga.
- 6) C. Lihat definisi graph tak hingga.
- 7) D. Lihat definisi derajat titik.
- 8) A. Lihat pengertian ajasensi sisi.
- 9) C. Lihat pengertian ajasensi titik.
- 10) B. Lihat definisi titik terisolasi.

Tes Formatif 2

- 1) D. Graph harus memuat relasi.
- 2) B. Lihat definisi graph berarah.
- 3) D. Lihat pengertian graph berarah.

- 4) B. Lihat pengertian graph berarah.
- 5) C. Lihat uraian tentang jaringan kerja berarah.
- 6) A. Jelas.
- 7) B. Lihat pengertian multi graph.
- 8) C. Ubah dulu ke dalam graph.
- 9) A. Lihat gambar graph tentang Jembatan Konigsberg
- 10) B. Lihat sejarah aplikasi graph pada ikatan kimia

Daftar Pustaka

- Bradley, J. (1988). *Introduction to Discrete Mathematics*. New York: Addison Wesley.
- Buckley, F. & Lewinter, M. (2003). *A Friendly Introduction to Graph Theory*. New York: Pearson Education, Inc.
- Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications.
- Deo, N. (1989). *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. New Delhi: Prentice-Hall.
- Suryadi, D. (1996). *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Sutarno, H., Priatna, N., & Nurjanah (2005). *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press.
- Witala, S.A. (1987). *Mathematics*. New York: McGraw-Hill.

Glosarium

Ajasensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang dihubungkan dengan sebuah sisi e .

Derajat Titik

Banyaknya sisi yang insiden dengan suatu titik.

Graph

Sekumpulan objek ($V = \{v_1, v_2, \dots\}$ yang disebut himpunan titik), dan sebuah himpunan lain ($E = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang merupakan himpunan sisi) sedemikian hingga tiap sisi e_k dikaitkan dengan suatu pasangan titik tak terurut (v_i, v_j) .

Graph Berarah

Suatu graph yang sisi-sisinya mempunyai arah.

Graph Berarah Simetris

Suatu graph berarah yang merupakan sebuah relasi simetris.

Graph Bertanda S

Suatu jaringan kerja tidak berarah yang nilai fungsinya $+1$ atau -1 .

Graph Hingga

Sebuah graph $G(V, E)$ dengan V dan E hingga.

Graph Nol

Sebuah graph $G = (V, E)$ dengan $E = 0$.

Graph Sederhana

Sebuah graph yang tidak memiliki loop dan sisi paralel.

Graph Tak Hingga

Sebuah graph $G(V, E)$ dengan V dan E tak hingga.

Insidensi

Kedudukan dua titik (misal P dan Q) yang terletak pada sisi e atau titik P dan Q merupakan titik ujung sisi e .

Jaringan Kerja

Sebuah graph berarah dengan suatu fungsi yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan real.

Jaringan Kerja Berarah

Jaringan kerja yang merupakan graph berarah.

Jaringan Kerja Tidak Berarah

Jaringan kerja yang merupakan sebuah graph.

Loop

Sisi yang dua titik ujungnya sama.

Seri

Dua sisi yang saling berajasensi atau berbatasan jika titik sekutunya berderajat satu.

Sisi Paralel

Dua titik yang berlainan dihubungkan oleh dua sisi atau lebih.

Titik Anting/Ujung

Sebuah titik yang berderajat satu.

Titik Terisolasi

Sebuah titik yang tidak memiliki sisi insiden atau titik yang berderajat nol.

Valensi

Derajat suatu titik.