



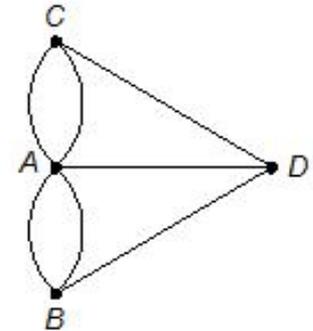
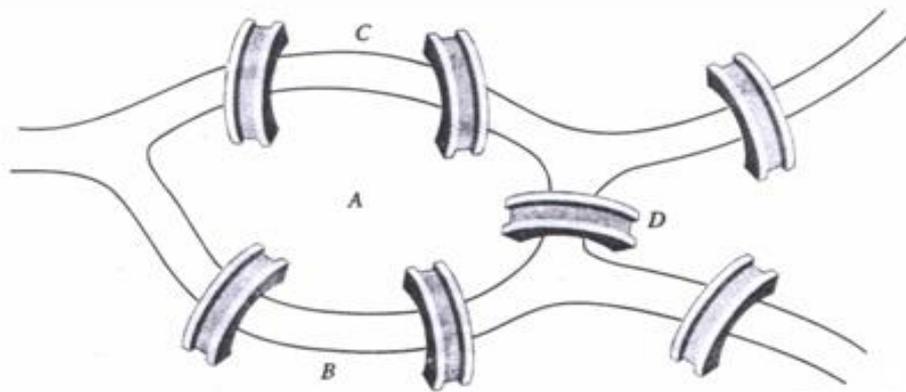
# Dasar-Dasar Teori Graf

Sistem Informasi  
Universitas Gunadarma  
2012/2013

# Teori Graf

- Teori Graf mulai dikenal saat matematikawan kebangsaan Swiss bernama **Leonhard Euler**, yang berhasil mengungkapkan *Misteri Jembatan Koningsberg* tahun 1736.
- Di kota Koningsberg mengalir sungai Pregel, di sungai mengalir 2 pulau dan diantaranya terdapat jembatan yang menghubungkan, jumlah jembatan tersebut sebanyak 7 buah.

# Teori Graf



- Graf yang merepresentasikan jembatan Königsberg adalah :
  1. **Simpul (vertex)**, menyatakan daratan.
  2. **Sisi (edge)**, menyatakan jembatan.

# Teori Graf

- **Graf** adalah bagan yang memuat informasi yang diinterpretasikan secara tepat.
- **Graf** digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut.
- Tujuan graf adalah untuk visualisasi objek agar mudah dimengerti.
- Jenis graf yaitu graf berarah dan graf tidak berarah.
- Graf terdiri dari 2 himpunan berhingga yaitu  $v(G)$  dan  $e(G)$ .

# Teori Graf

- Titik dikatakan **terhubung (Adjacent)** jika ada garis yang menghubungkan keduanya.
- **Graf Kosong** : Graf yang tidak mempunyai titik.
- **Graf Berarah (Digraph)** : Graf yang semua garisnya berarah.
- **Graf Tidak Berarah** : Graf yang semua garisnya tidak berarah.

# Teori Graf

- **Titik Ujung** : Garis yang berhubungan dengan satu atau dua titik.
- **Loop** : Garis yang berhubungan dengan satu titik ujung.
- **Garis Paralel** : Dua garis berbeda menghubungkan titik yang sama.
- **Titik Terasing** : Titik yang tidak mempunyai garis yang berhubungan dengannya.

# Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf.

## 1. **Graf sederhana** (*simple graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.

## 2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple graph*).

# Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf.

## 1. **Graf berhingga** (*limited graph*)

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya  $n$  berhingga.

## 2. **Graf tak-berhingga** (*unlimited graph*)

Graf yang jumlah simpulnya  $n$  tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

# Jenis-Jenis Graf

- Berdasarkan orientasi arah pada sisi.
  1. **Graf tak-berarah** (*undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.
  2. **Graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

# Subgraf

- Graf H dikatakan subgraf dari G jika semua titik dan garis graf H merupakan titik dan garis dalam graf G.
- Misalkan G adalah suatu graf. Graf H dikatakan subgraf dari G bila dan hanya bila :
  1.  $V(H) \subseteq V(G)$
  2.  $E(H) \subseteq E(G)$
  3. Setiap garis dalam H memiliki titik ujung yang sama dengan garis tersebut dalam G.
  4. Di dalam subgraf posisi titik dan garis tidak berpengaruh.

# Derajat Graf

- Derajat graf adalah jumlah dari derajat simpul-simpulnya. Derajat simpul adalah banyaknya ruas yang incidence (terhubung) ke simpul tersebut.
- Berdasarkan derajat simpul, sebuah simpul dapat disebut :
  1. Simpul Ganjil ; bila derajat simpulnya merupakan bilangan ganjil.
  2. Simpul Genap ; bila derajat simpulnya merupakan bilangan genap.
  3. Simpul Bergantung/Akhir ; bila derajat simpulnya adalah 1.
  4. Simpul Terpencil ; bila derajat simpulnya adalah 0.

# Derajat Graf

- Misal titik  $v$  adalah suatu titik dalam graf  $G$ .  
**Derajat titik  $v$**  (simbol  $d(v)$ ) adalah *jumlah garis yang berhubungan dengan titik  $v$* .  
Derajat titik yang berhubungan dengan sebuah loop adalah **2** (garis suatu loop di hitung 2 kali).
- Derajat simpul  $v$  atau  $d(v)$  adalah banyaknya ruas yang menghubungi  $v$ . Karena setiap ruas dihitung dua kali ketika menentukan derajat suatu graf, maka :  
**“ Jumlah derajat semua simpul suatu graf (derajat) = dua kali banyaknya ruas graf (size)”**

# Derajat Graf

- **Derajat total** suatu graf  $G$  adalah **jumlah derajat semua titik dalam  $G$ .**  
**Derajat total** suatu graf selalu **genap**.
- Dalam sembarang graf **jumlah titik yang berderajat ganjil selalu genap**.
- Jumlah derajat semua simpul sama dengan genap disebut dengan **Euler Graf**.
- Suatu simpul disebut genap/ganjil tergantung apakah derajat simpul tersebut genap/ganjil.

# Keterhubungan Graf

- **Walk atau perjalanan** dalam graf  $G$  adalah barisan simpul dan ruas berganti-ganti :  $V_1, e_1, V_2, e_2, \dots, e_{n-1}, V_n$
- Ruas  $e_i$  menghubungkan simpul  $V_i$  dan  $V_{i+1}$ .
- Banyaknya ruas disebut **panjang walk**. Walk ditulis dengan deretan ruas :  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  atau deretan simpul :  $V_1, V_2, \dots, V_n$
- Walk disebut tertutup bila  $V_1 = V_n$   
Dimana,  $V_1 =$  simpul awal  
 $V_n =$  simpul akhir

# Keterhubungan Graf

- **Graf Terhubung dan Graf Tidak Terhubung**
- Misalkan  $G$  adalah suatu graf, titik  $v$  dan  $w$  dalam graf  $G$  terhubung bila dan hanya bila ada walk dari  $v$  ke  $w$ .
- Graf  $G$  dikatakan terhubung jika 2 titik di dalam  $G$  saling terhubung dan dikatakan tidak terhubung jika 2 titik di dalam  $G$  tidak saling terhubung.

# Keterhubungan Graf

- Dalam keterhubungan sebuah graf, dikenal istilah seperti berikut :
  1. **Walk** ; barisan simpul dan ruas.
  2. **Trail** ; walk dengan semua ruas dalam barisan adalah berbeda.
  3. **Path/Jalur** ; walk yang semua simpul dalam barisan adalah berbeda. Jadi suatu **Path** pasti sebuah **Trail**.
  4. **Cycle/Sirkuit** ; trail tertutup dengan derajat setiap simpul = 2.

# Operasi pada Graf

- Operasi-operasi di dalam graf. Bila diketahui 2 buah graf :  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  maka :
  1. Gabungan  $G_1 \cup G_2$  adalah graf dengan himpunan  $V$  nya  $= V_1 \cup V_2$  dan himpunan  $E$  nya  $= E_1 \cup E_2$
  2. Irisan  $G_1 \cap G_2$  adalah graf dengan himpunan  $V$  nya  $= V_1 \cap V_2$  dan himpunan  $E$  nya  $= E_1 \cap E_2$
  3. Selisih  $G_1 - G_2$  adalah graf dengan himpunan  $V$  nya  $= V_1$  dan himpunan  $E$  nya  $= E_1 - E_2$ , Selisih  $G_2 - G_1$  adalah graf dengan himpunan  $V$  nya  $= V_2$  dan himpunan  $E$  nya  $= E_2 - E_1$
  4. Penjumlahan Ring  $G_1 G_2$  adalah graf yang dihasilkan dari  $(G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2)$  atau  $(G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)$

# Matriks dan Graf

- Graf dapat disajikan dalam bentuk matriks. Matriks-matriks yang dapat menyajikan model graf tersebut antara lain :
  1. Matriks Ruas
  2. Matriks Adjacency (Matriks Ketetanggaan)
  3. Matriks Incidence (Matriks Bersisian)

# Matriks Ruas

- Setiap simpul dan ruas yang terhubung menjadi baris atau kolom matriks.
- Hubungan setiap simpul dan ruas hanya bernilai 1 tidak bisa bolak balik.
- Setiap hubungan simpul dan ruas yang sudah menjadi matriks tidak dapat didefinisikan lagi.

# Matriks Adjacency

- Baris dan kolom menunjukkan urutan simpul-simpul.
- Elemen matriks = 1 jika terdapat ruas antara simpul baris dan simpul kolom.
- Elemen matriks = 0 jika tidak terdapat ruas antara simpul baris dan simpul kolom.

# Matriks Adjacency

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ bertetangga} \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ dan } j \text{ tidak bertetangga} \end{cases}$$

Derajat tiap simpul  $i$

(a) Untuk graf tak-berarah,

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

(b) Untuk graf berarah,

$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

# Matriks Incidence

- Baris menunjukkan simpul.
- Kolom menunjukkan ruas.
- Elemennya = 1 jika terdapat ruas yang incident ke suatu simpul.
- Elemennya = 0 dalam hal lain.

$$A = [a_{ij}],$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ bersisian dengan sisi } j \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak bersisian dengan sisi } j \end{cases}$$



**TERIMA KASIH**