

DIKTAT KULIAH

METODE ELEMEN HINGGA

CE603 – 2 SKS

Dosen Penanggung-jawab:
Dr. Yosafat Aji Pranata, ST., MT.



Program Studi Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Kristen Maranatha
2019

PRAKATA

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, atas berkat dan rahmat-Nya penyusun dapat menyelesaikan diktat kuliah Metode Elemen Hingga (edisi Revisi 2019). Diktat ini disusun sebagai salah satu media pendukung kegiatan perkuliahan Metode Elemen Hingga di Program Studi S-1 Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Kristen Maranatha, Bandung.

Sebagian besar materi dalam diktat ini berasal dari beberapa literatur. Untuk menunjang kelancaran mahasiswa didalam mempelajari materi, maka setiap bab disertai latihan soal dan pembahasannya. Diktat ini berisi materi pendahuluan dan pengantar metode elemen hingga, elemen batang (*bar*), elemen balok (*beam*), elemen segitiga linier tiga titik nodal (CST), dan elemen segiempat bilinear empat titik nodal (Q4).

Penyusun menyadari bahwa diktat ini masih jauh dari sempurna, sehingga masukan dari pembaca sangat diharapkan untuk menunjang perbaikan-perbaikan untuk edisi selanjutnya. Penyusun menerima masukan melalui e-mail yosafat.ap@gmail.com. Semoga Tuhan berkenan.

Bandung, Januari 2019

Dr. Yosafat Aji Pranata, ST., MT.

DAFTAR ISI

| | |
|---|-----|
| Halaman Judul | i |
| Prakata | ii |
| Daftar Isi | iii |
| Bab 1 Pendahuluan | 1 |
| 1.1 Metode Elemen Hingga | 1 |
| 1.2 Aplikasi Metode Elemen Hingga | 4 |
| 1.3 Perkembangan Metode Elemen Hingga | 9 |
| 1.4 Dasar-dasar Mekanika Komputasi | 10 |
| 1.5 Teori Elastisitas | 12 |
| 1.6 Hubungan Regangan dengan Peralihan | 15 |
| 1.7 Hubungan Tegangan dengan Regangan | 16 |
| 1.8 Referensi | 17 |
| Bab 2 Pengantar Metode Elemen Hingga | 19 |
| 2.1 Terminologi | 19 |
| 2.2 Idealisasi | 19 |
| 2.3 Diskretisasi | 21 |
| 2.4 Metode Elemen Hingga | 24 |
| 2.5 Klasifikasi Elemen Mekanis | 24 |
| 2.6 Kondisi Batas | 26 |
| 2.7 Referensi | 26 |
| Bab 3 Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi | 28 |
| 3.1 Pendahuluan | 28 |
| 3.2 Elemen Batang | 28 |
| 3.3 Elemen Balok | 30 |
| 3.4 Elemen Batang dan Balok pada Orientasi Sembarang | 32 |
| 3.4.1 Elemen Batang | 33 |
| 3.4.2 Elemen Balok | 34 |
| 3.5 Perakitan Elemen | 35 |
| 3.6 Beban Mekanis dan Tegangan-Tegangan | 38 |
| 3.7 Struktur Simetri | 39 |
| 3.8 Soal | 40 |
| 3.9 Referensi | 53 |
| Bab 4 Elemen-Elemen Dasar | 54 |
| 4.1 <i>Preliminary</i> | 54 |
| 4.1.1 Hubungan Tegangan dengan Regangan | 54 |
| 4.1.2 Hubungan Regangan dengan Peralihan | 55 |
| 4.1.3 Kompatibilitas | 57 |
| 4.1.4 Persamaan Keseimbangan | 57 |

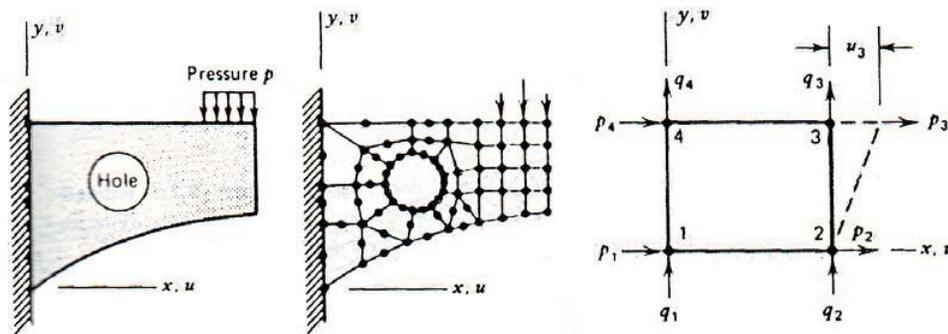
| | | |
|--------------|--|-----|
| 4.1.5 | Kondisi Batas | 58 |
| 4.1.6 | Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak | 58 |
| 4.2 | Interpolasi dan Bentuk Fungsi | 59 |
| 4.2.1 | Derajat Kontinuitas | 59 |
| 4.2.2 | Interpolasi C^0 | 60 |
| 4.2.3 | Interpolasi C^1 | 61 |
| 4.3 | Persamaan untuk Matriks Elemen | 62 |
| 4.3.1 | Elemen Batang | 63 |
| 4.3.2 | Elemen Balok | 64 |
| 4.4 | Referensi | 65 |
| Bab 5 | Elemen CST dan Q4 | 67 |
| 5.1 | Elemen Segitiga Linier (CST) | 67 |
| 5.1.1 | Pengantar Mengenai Tegangan Bidang dan Regangan Bidang | 67 |
| 5.1.2 | Persamaan Umum Elemen Segitiga Linier (CST) | 68 |
| 5.1.3 | Hubungan Regangan-Peralihan dan Tegangan-Regangan | 72 |
| 5.1.4 | Matrik Kekakuan Elemen dan Persamaan Elemen | 74 |
| 5.2 | Elemen Segiempat Bilinier (Q4) | 77 |
| 5.2.1 | Persamaan Umum Elemen Segiempat Q4 | 79 |
| 5.2.2 | Matriks Kekakuan Elemen | 83 |
| 5.3 | Referensi | 84 |
| Bab 6 | Latihan Soal dan Pembahasan | 85 |
| 6.1 | Elemen Batang | 85 |
| 6.2 | Elemen Balok | 89 |
| 6.3 | Elemen Segitiga Linier (CST) | 94 |
| 6.4 | Elemen Segiempat Bilinier (Q4) | 101 |
| 6.5 | Referensi | 107 |
| | Daftar Pustaka | 109 |
| | Lampiran | 110 |

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga adalah prosedur numerik yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah mekanika kontinum dengan tingkat ketelitian yang dapat diterima. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 1.1, yaitu suatu struktur (bidang) dengan lubang, beban yang bekerja adalah tekanan (*pressure*). Untuk menyelesaikan masalah ini diperlukan solusi numerik. Gambar 1.1b memperlihatkan model elemen hingga. Elemen-elemen berbentuk segitiga (*triangle*) dan kuadrilateral (*quadrilateral*) baik linier maupun kuadratik merupakan beberapa contoh tipe elemen hingga. Titik-titik hitam disebut titik nodal (*node*). Suatu jaring (*mesh*) adalah susunan yang terdiri dari titik nodal dan elemen [1].



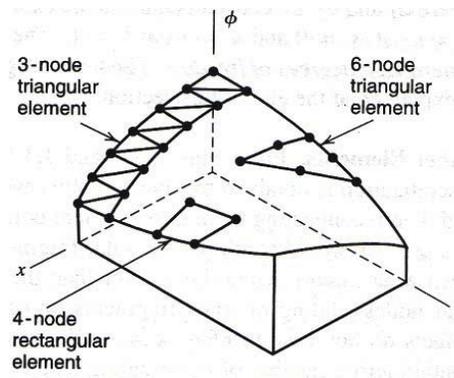
(a). Struktur aktual (b). Model elemen hingga. (c). Elemen segiempat bidang.

Gambar 1.1 Struktur aktual dan model elemen hingga [1].

Pada dasarnya, elemen hingga merupakan bagian-bagian kecil dari struktur aktual (sebenarnya). Elemen hingga harus dapat berdeformasi dengan cara yang terbatas. Sebagai contoh apabila ujung-ujung elemen dikendalikan untuk tetap lurus, maka elemen yang bersebelahan dengannya tidak akan tumpang tindih maupun terpisahkan (Gambar 1.1c).

Untuk memformulasikan suatu elemen, harus dicari dan dihitung terlebih dahulu gaya-gaya titik nodal (*nodal forces*) yang menghasilkan berbagai ragam deformasi elemen. Teori yang digunakan, sebagai contoh yaitu balok (*beam*) atau batang (*bar*). Untuk elemen-elemen yang didefinisikan pada Gambar 1.1b dan Gambar 1.1c, akan dipelajari pada buku ini.

Metode elemen hingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan bagaimana permukaan suatu benda yang tidak datar, sebagai contoh permukaan Φ yang berubah secara halus (Gambar 1.2), ternyata dapat didekati dengan permukaan dengan permukaan yang datar. Elemen dengan jumlah empat titik nodal dan delapan titik nodal, yang masing-masing diperlihatkan dengan permukaan terpilin dan lengkung, merupakan teknik pendekatan tersebut. Pendekatan akan semakin baik apabila elemen yang digunakan semakin banyak.



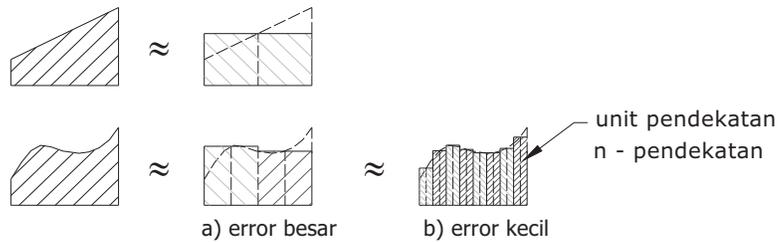
Gambar 1.2 Fungsi kombinasi $\Phi = \Phi(x,y)$ dan elemen tipikal pendekatan [1].

Didalam suatu elemen segiempat (Gambar 1.2), Φ adalah fungsi linier dari x dan y . elevasi dan inklinasi elemen dapat didefinisikan dengan tiga nilai titik nodal dari Φ . Dua elemen tidak harus mempunyai elevasi dan kemiringan yang sama. Ilustrasi ini memperlihatkan esensi dari metode elemen hingga, yaitu pendekatan bagian demi bagian untuk fungsi Φ dengan menggunakan polynomial, yang mana masing-masing terdefinisi pada elemen yang kecil dan dinyatakan dalam nilai-nilai titik nodal dari fungsi tersebut [1].

Untuk permasalahan struktur dengan bentuk geometri dan pembebanan yang kompleks, hal ini tidak dapat diselesaikan dengan persamaan diferensial parsial, namun dapat diselesaikan dengan metode numerik pendekatan metode elemen hingga. Daerah yang dianalisis dapat mempunyai bentuk, beban, dan

kondisi batas sembarang. Elemen-elemen kecilnya dapat terdiri atas elemen yang berbeda jenis, bentuk dan besaran fisiknya. Kemudahan penggunaan berbagai hal tersebut bisa saja tergabung pada satu program komputer, yaitu dengan menyiapkan data jenis, geometri, kondisi batas, elemen, dan sebagainya.

Keunggulan lain adalah adanya arti fisik yang cukup dekat antara elemen-elemen kecil (jaring elemen) dengan struktur aktualnya. Metode elemen hingga mempunyai kelemahan yaitu hasilnya berupa hasil numerik, tidak ada persamaan bentuk tertutup yang dapat dipakai untuk kasus serupa yang hanya berbeda parameternya.



Gambar 1.3 Pendekatan menghitung suatu luas bidang.

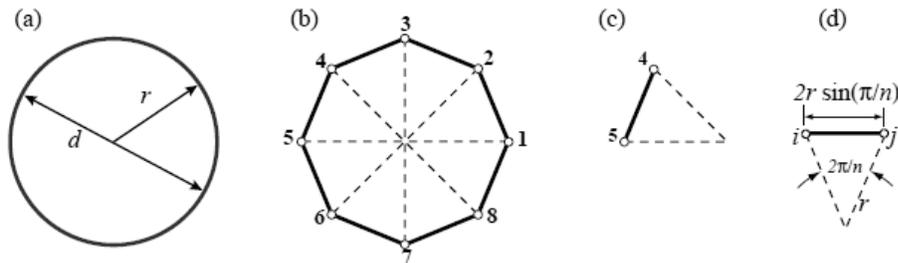
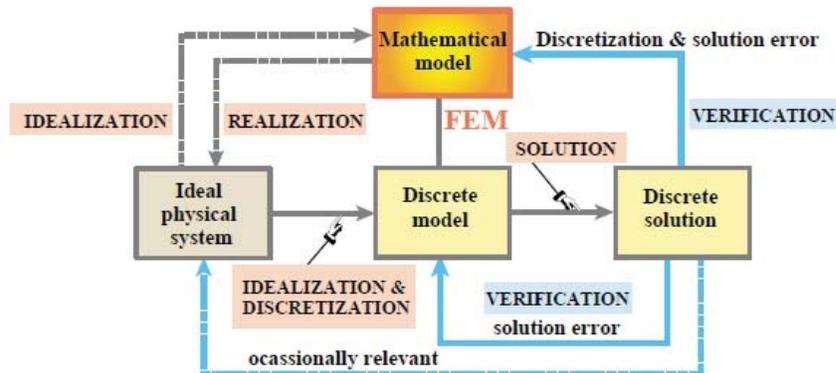


FIGURE 1.1. The “find π ” problem treated with FEM concepts: (a) continuum object, (b) a discrete approximation by inscribed regular polygons, (c) disconnected element, (d) generic element.

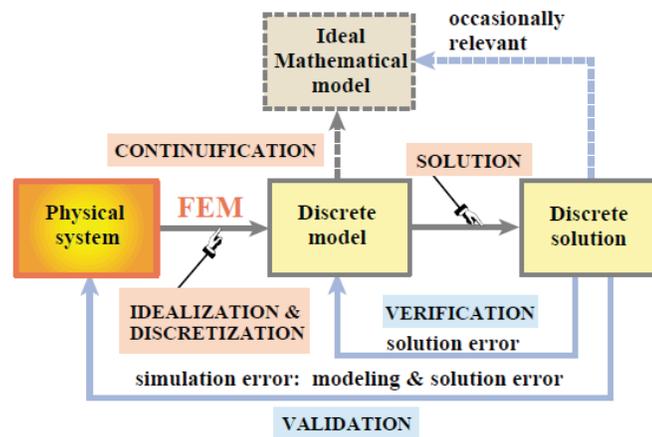
| n | $\pi_n = n \sin(\pi/n)$ | Extrapolated by Wynn- ϵ | Exact π to 16 places |
|-----|-------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| 1 | 0.0000000000000000 | | |
| 2 | 2.0000000000000000 | | |
| 4 | 2.828427124746190 | 3.414213562373096 | |
| 8 | 3.061467458920718 | | |
| 16 | 3.121445152258052 | 3.141418327933211 | |
| 32 | 3.136548490545939 | | |
| 64 | 3.140331156954753 | 3.141592658918053 | |
| 128 | 3.141277250932773 | | |
| 256 | 3.141513801144301 | 3.141592653589786 | 3.141592653589793 |

Gambar 1.4 Ilustrasi pendekatan diskret nilai π [2].

Metode elemen hingga merupakan salah satu metode diskretisasi ruang atau *spatial discretization method* [2]. Metode elemen hingga (dalam aplikasi praktis disebut pula analisis elemen hingga) adalah teknik numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan (*approximate*) dari suatu persamaan diferensial parsial dan persamaan integral. Menurut Felippa [2], proses simulasi metode elemen hingga dapat diklasifikasikan menjadi dua model, yang pertama adalah model matematika (skematik prosesnya dijelaskan pada Gambar 1.5a) dan yang kedua adalah model fisik (skematik prosesnya dijelaskan pada Gambar 1.5b).



(a). Ilustrasi proses simulasi "mathematical model" metode elemen hingga.



(b). Ilustrasi proses simulasi "physical model" metode elemen hingga.

Gambar 1.5 Simulasi metode elemen hingga [2].

1.2 Aplikasi Metode Elemen Hingga

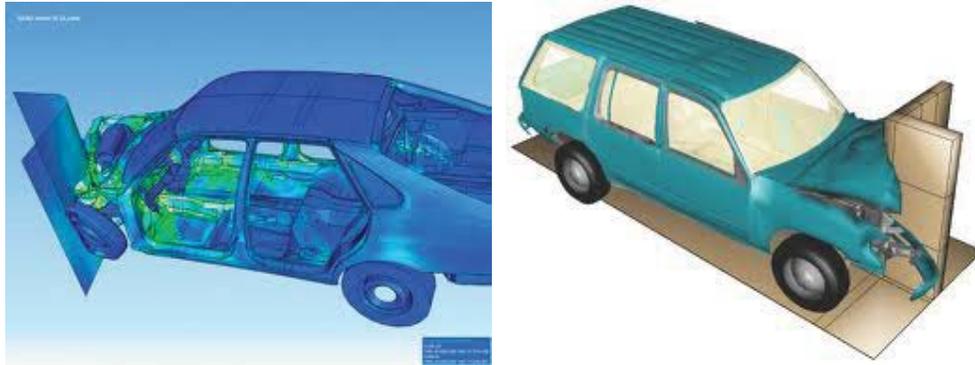
Metode elemen hingga (*finite element method* atau FEM) dalam konteks dan aplikasi praktis sering pula disebut *finite element analysis* atau FEA. Metode

elemen hingga merupakan teknik numerik untuk mendapatkan solusi pendekatan dari suatu persamaan diferensial parsial (*partial differential equations* atau PDE) seperti halnya persamaan integral. Pendekatan solusi berbasis mengeliminasi persamaan diferensial kompleks (permasalahan *steady state*), atau memberikan PDE menjadi sistem pendekatan persamaan diferensial biasa, yang mana selanjutnya dapat diintegrasikan secara numerik menggunakan teknik standar, sebagai contoh metode Euler, Runge-Kutta, dan lain-lain [7].

Pada suatu penyelesaian persamaan diferensial parsial, tantangan utama adalah menciptakan persamaan pendekatan yang berhubungan dengan persamaan yang sedang dipelajari, yang mana stabil secara numerik, dalam arti kesalahan (*error*) yang dihasilkan atau yang mungkin terjadi tidak memberikan pengaruh secara signifikan. Metode elemen hingga merupakan pilihan yang tepat untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial dalam domain yang kompleks, ketika domain berubah, ketika presisi yang diinginkan bervariasi dari seluruh domain, atau ketika menghadapi kondisi kurang-halusnya suatu solusi pendekatan [7].

Sebagai contoh, simulasi tabrakan frontal suatu mobil dalam kaitannya dengan uji keselamatan pengguna kendaraan dan kekuatan kendaraan, sangat memungkinkan menerapkan ilmu metode elemen hingga, dalam hal ini berupa simulasi numerik untuk mendapatkan prediksi yang akurat berkaitan dengan faktor-faktor penting yang sedang dipelajari. Dengan adanya simulasi numerik menggunakan komputer, maka biaya pengujian simulasi secara empiris (pengujian di laboratorium dengan benda uji mobil yang sebenarnya) dapat dikurangi. Dapat dibayangkan apabila setiap pengujian harus menggunakan benda uji yang sebenarnya, maka berbagai percobaan berkaitan dengan keselamatan pengguna kendaraan dan kekuatan suatu kendaraan akan membutuhkan biaya yang sangat luar biasa tinggi.

Peran simulasi numerik dalam hal ini dapat “mewakili” pengujian empiris tersebut, sehingga dapat diperoleh hasil-hasil penting berkaitan dengan permasalahan yang sedang ditinjau. Selanjutnya untuk membuktikan secara data dan fakta empiris, baru dilakukan pengujian yang sebenarnya di laboratorium, untuk mem-validasi hasil simulasi numerik tersebut.



Gambar 1.6 Simulasi tabrakan kendaraan untuk mempelajari faktor-faktor kekuatan dan keamanan [8,9].

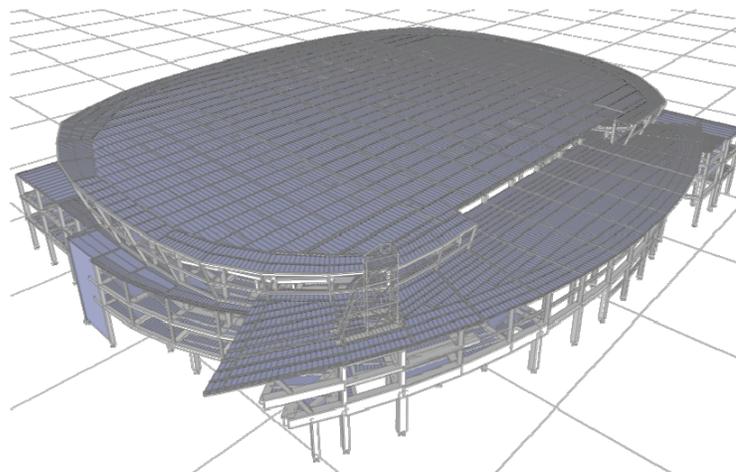
Metode Elemen Hingga dewasa ini telah menjadi bagian tak terpisahkan dari solusi numerik di dunia teknik/rekayasa. FEM diaplikasikan secara luas mulai dari analisis *stress* (tegangan) dan *deformasi* (perubahan bentuk) pada bidang struktur bangunan, jembatan, penerbangan, dan otomotif, sampai pada analisis aliran fluida, perpindahan panas, medan magnet, dan masalah non-struktur lainnya [10]. Kemajuan yang sangat pesat di bidang komputer baik perangkat lunak maupun perangkat keras telah menyebabkan FEM diterapkan secara masif pada level yang belum pernah dibayangkan sebelumnya. Dengan kecanggihan komputer sekarang, masalah rekayasa yang rumit dapat dimodelkan dengan relatif mudah. Waktu yang diperlukan untuk memecahkan problem pun semakin singkat. Penggunaan CAE (*Computer Aided Engineering*) semakin mendapatkan tempat di dunia manufaktur karena memberikan banyak keuntungan dan kemudahan, antara lain sebagai berikut:

1. Mengurangi frekuensi uji coba produk. Pengurangan jumlah uji coba berakibat langsung pada pengurangan biaya untuk pengembangan produk baru dan pengurangan waktu penelitian dan pengembangan produk. Untuk uji coba diperlukan prototipe produk. Harga sebuah prototipe produk yang belum diproduksi masih sangat tinggi, sebagai contoh, salah satu standar uji kelayakan mobil penumpang adalah performa pada saat tabrakan. Apabila uji coba tabrakan mobil dilakukan berkali-kali, tentu saja biaya yang dibutuhkan sangat besar. Selain itu, untuk membuat satu prototipe diperlukan waktu yang tidak singkat, semakin banyak prototipe yang harus dibuat, maka akan

semakin lama waktu yang harus disediakan untuk penelitian dan pengembangan produk tersebut.

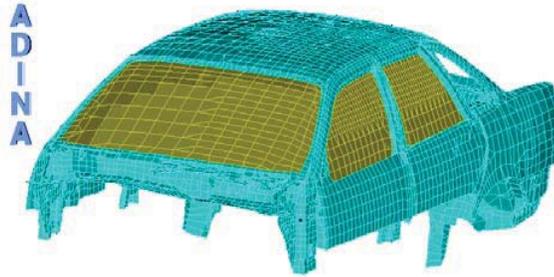
2. Meningkatkan kualitas produk dengan memanfaatkan CAE suatu produk yang diuji secara virtual. Pada uji virtual banyak kondisi yang bisa dikaji, termasuk kondisi-kondisi yang sulit dilaksanakan pada uji coba riil. Misalnya bagaimana bila sebuah kotak hitam pesawat terjatuh ke dalam laut dalam, yaitu apakah konstruksi kotak hitam tersebut dapat menahan tekanan yang sangat besar. Uji coba langsung seperti ini hanya bisa dilaksanakan di laboratorium-laboratorium khusus, namun uji coba virtualnya bisa dilakukan dengan mudah. Proses uji coba virtual seperti ini bila dilakukan dengan benar dan menggunakan model yang tepat, hasilnya akan mendekati kebenaran riil. Tentu saja, pada tahap akhir tetap harus dilakukan uji coba (untuk benda uji tertentu) yang sebenarnya untuk memastikan performa suatu produk.

Beberapa perangkat lunak metode elemen hingga komersial yang berkembang pada saat ini yaitu antara lain SAP2000, ADINA, ANSYS, dan ABAQUS [3,4,5,6]. Perangkat lunak SAP2000 dapat digunakan untuk simulasi numerik model struktur dengan kondisi material dan geometri linier, sedangkan perangkat lunak ADINA, ANSYS, dan ABAQUS dapat digunakan untuk simulasi numerik model struktur dengan kondisi material linier/nonlinier dan geometri linier/nonlinier.

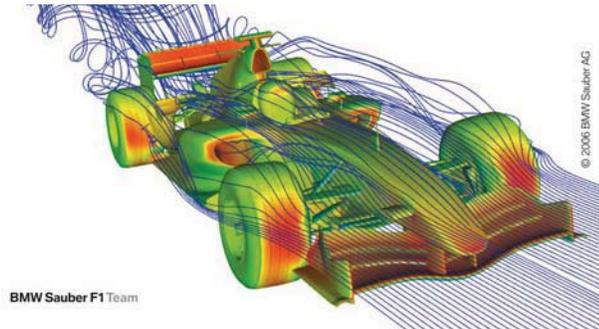


Gambar 1.7 Simulasi numerik untuk mengetahui perilaku kekuatan dan kekakuan struktur stadion dengan SAP2000 [6].

Gambar 1.7 memperlihatkan simulasi numerik untuk mengetahui kekuatan dan kekakuan struktur stadion dengan SAP2000 [6]. Dengan menggunakan simulasi numerik, maka dapat diketahui tingkat kekuatan dan kekakuan struktur didalam memikul beban-beban yang bekerja. Gambar 1.8 memperlihatkan simulasi numerik dengan kondisi geometri nonlinier dan material nonlinier suatu kendaraan dengan menggunakan perangkat lunak ADINA [4].



Gambar 1.8 Simulasi numerik untuk mempelajari perilaku ketahanan bodi dan kaca mobil dengan ADINA [4].



Gambar 1.9 Simulasi numerik ketahanan terhadap beban angin pada mobil balap F1 dengan ANSYS [5].

Gambar 1.9 memperlihatkan simulasi numerik berkaitan dengan *reliability* suatu mobil balap F1 terhadap beban angin dengan perangkat lunak ANSYS [5]. Sedangkan Gambar 1.10 memperlihatkan secara skematik simulasi numerik sistem struktur rangka suatu jembatan akibat adanya beban-beban yang bekerja, dengan menggunakan perangkat lunak ABAQUS [3]. Hal ini sangat penting untuk mengetahui perilaku struktur yang sebenarnya, manakala hendak maupun sudah dibangun.



Gambar 1.10 Simulasi numerik untuk mengetahui perilaku tegangan pada struktur jembatan rangka dengan ABAQUS [3].

1.3 Perkembangan Metode Elemen Hingga

Pada tahun 1906 dan tahun-tahun berikutnya, para ahli riset mengusulkan metode analogi *lattice* untuk memecahkan masalah kontinum. Disini suatu kontinum didekati dengan jaring yang teratur yang terbentuk oleh batang-batang elastis. Selanjutnya metode ini berkembang menjadi metode untuk menganalisis struktur rangka. Pada tahun 1941, seorang ahli matematik Courant (dalam publikasi yang ditulis tahun 1943) mengusulkan interpolasi polinomial bagian-demi-bagian pada daerah segitiga, sebagai cara untuk mendapatkan solusi numerik pendekatan. Courant memperkenalkan metodenya sebagai solusi Rayleigh-Ritz untuk masalah variasional. Pada mulanya metode ini dilupakan orang, sampai suatu saat kemudian para rekayasawan berhasil mengembangkannya. Pada waktu itu pendapat para ahli masih dianggap tidak praktis karena belum ada komputer yang dapat dipakai untuk melakukan perhitungan [1].

Setelah tahun 1953, para rekayasawan menuliskan persamaan kekakuan dalam notasi matriks dan dapat memecahkan persamaan tersebut dengan menggunakan bantuan komputer digital. Makalah klasik yang ditulis oleh Turner, Clough, Martin, dan Topp diterbitkan pada tahun 1956. Sejak itu terjadi kemajuan pesat dalam pengembangan metode elemen hingga dalam bidang rekayasa. Nama elemen hingga disebutkan pertama kali pada tahun 1960. Pada tahun 1961 telah

diterbitkan sepuluh makalah mengenai elemen hingga, pada tahun 1966 terbit 134 makalah, dan pada tahun 1971 terbit 844 makalah. Pada tahun 1979 jumlah publikasi elemen hingga mencapai lebih dari 7000 makalah.

1.4 Dasar-Dasar Mekanika Komputasi [2]

Lingkup dari mekanika dapat dibagi menjadi tiga ruang lingkup utama, yaitu teoritis (*theoretical*), aplikasi (*applied*), dan komputasi (*computational*). Mekanika teoritis berhubungan dengan hukum-hukum fundamental dan prinsip dasar mekanika yang dipelajari berkaitan dengan nilai-nilai ilmiah intrinsik. Mekanika aplikasi mentransfer pengetahuan teoritis menjadi aplikasi teknik dan ilmiah, secara khusus berhubungan dengan fenomena fisik dan model matematika suatu konstruksi (sebagai contoh bangunan dan jembatan). Mekanika komputasi menyelesaikan permasalahan-permasalahan spesifik dengan model simulasi numerical menggunakan komputer.

Beberapa subbagian dari mekanika komputasi (jika ditinjau dari segi skala fisik) yaitu antara lain mekanika nano dan mekanika mikro (*nanomechanics and micromechanics*), mekanika continuum (*continuum mechanics: solids and structures, fluids, multiphysics*), dan sistem (*system*).

Mekanika nano berkaitan dengan fenomena dengan tinjauan tingkat/level molekular dan atom, sebagai contoh berhubungan dengan partikel kimia dan fisika. Mekanika mikro berkaitan dengan tingkat/level kristalografik dan granular, berkaitan dengan aplikasi terhadap desain dan fabrikasi suatu material dan *microdevice*.

Mekanika continuum mempelajari suatu bodi pada level makroskopik, menggunakan model kontinum yaitu struktur mikro diasumsikan homogen (secara *phenomenological averages*). Dua tradisi lingkup dari aplikasi mekanika adalah mekanika *solid* dan mekanika *fluid*. Teknik komputasi pada mekanika *solid* menggunakan pendekatan ilmu pengetahuan aplikasi dalam analisis dan desain suatu struktur. Sedangkan teknik komputasi pada mekanika fluida (*fluid*) berhubungan dengan persamaan keseimbangan dan gerak dari *liquid* dan gas. Termasuk dalam lingkup mekanika fluida adalah antara lain hidrodinamika, aerodinamika, akustik, fisik atmosfer, kejut (*shock*). Multifisika merupakan suatu

ilmu pengetahuan yang relatif masih baru, yaitu sistem mekanika yang mempelajari interaksi antara struktur dan fluida.

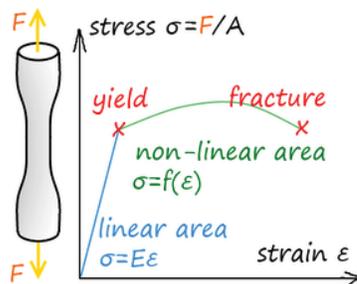
Yang terakhir adalah sistem, merupakan identifikasi dari objek mekanika, baik itu buatan maupun natural, sebagai contoh pesawat, bangunan, jembatan, mesin, mobil, teleskop, robot (buatan); dan amuba, pohon, ekologi, astronomi, kosmologi (natural).

1.4.1 Statik dan Dinamik [2]

Permasalahan berkaitan dengan mekanika kontinum dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu statik (statika) dan dinamik (dinamika). Statik artinya tidak bergantung terhadap waktu (sebagai contoh pembebanan pada suatu struktur). Dinamik artinya secara aktual tergantung terhadap waktu, sebagai contoh gaya-gaya dalam dan deformasi yang terjadi pada struktur akan berbeda/berubah sesuai waktu pembebanan.

1.4.2 Linier dan Nonlinier [2]

Problem yang berkaitan dengan masalah statika dibagi menjadi dua bagian, yaitu linier dan nonlinier. Analisis statika linier berhubungan dengan permasalahan dan respon linier, sebagai contoh apabila suatu struktur dibebani oleh suatu beban yang digandakan (dua kali lipat beban semula), maka deformasi dan gaya-gaya dalam yang terjadi pun akan menjadi dua kali lipat semula. Sedangkan pada permasalahan statika nonlinier, persamaan-persamaan yang dibahas merupakan pangkat lebih dari satu.

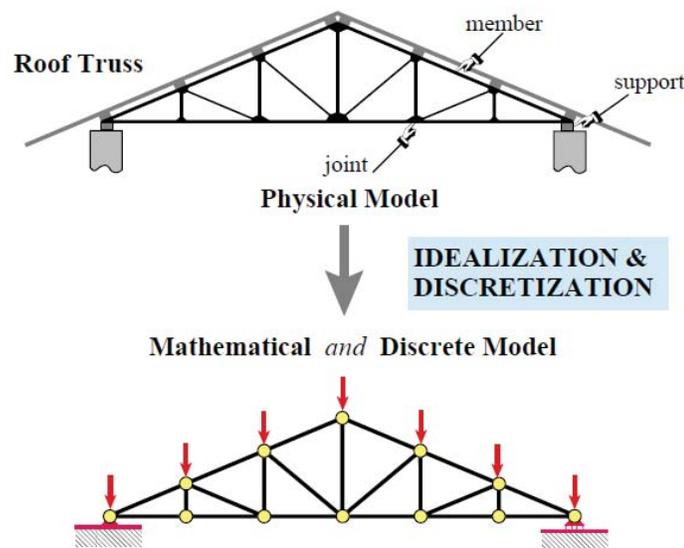


Gambar 1.11 Linier dan Nonlinier [11].

1.4.3 Metode Diskretisasi [2]

Metode diskretisasi model matematika kontinum, sebagai contoh adalah dengan mengkonversi suatu model diskret dengan jumlah hingga (*finite number*) suatu derajat kebebasan (*degree of freedom*). Metode diskretisasi spasial terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu antara lain:

1. Elemen hingga (FEM).
2. Elemen batas (*boundary element method* atau BEM).
3. *Finite Difference Method* (FDM).
4. *Finite Volume Method* (FVM).



Gambar 1.12 Model diskret suatu struktur rangka atap [2].

1.4.4 Variasi Metode Elemen Hingga [2]

Teknik metode elemen hingga secara umum diklasifikasikan menjadi dua bagian, yaitu formulasi FEM dan solusi FEM. Formulasi FEM yaitu berhubungan dengan deformasi, keseimbangan, gabungan, dan hibrida. Sedangkan Solusi FEM yaitu kekakuan, fleksibilitas, maupun gabungan keduanya.

1.5 Teori Elastisitas

Teori elastisitas dapat digunakan untuk memahami pengertian metode elemen hingga. Gambar 1.13 memperlihatkan elemen yang sangat kecil (*differential element*), bukan elemen hingga. Gaya-gaya benda F_x dan F_y

mempunyai dimensi gaya per satuan volume dan dapat berasal dari gravitasi, percepatan, medan magnetic, dan sebagainya. Gaya-gaya tersebut bernilai positif apabila bekerja dalam arah koordinat positif. Pada setiap satuan volume atau disebut ($dV = 1 dx dy$), F_x dan F_y menyebabkan gaya-gaya total $F_x dV$ dan $F_y dV$. Pada umumnya tegangan merupakan fungsi dari koordinat. Dengan demikian, sebagai contoh, $\sigma_{x,x}$ adalah laju perubahan σ_x terhadap x , dan $\sigma_{x,x} dx$ merupakan perubahan σ_x pada jarak dx . Keseimbangan gaya-gaya dalam arah x harus terpenuhi, yaitu sebagai berikut,

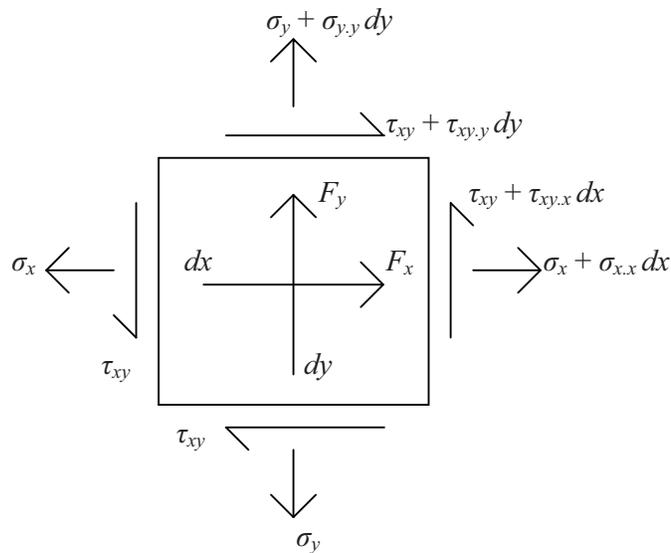
$$\begin{aligned} \sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx)t dy \\ + (\tau_{xy} + \tau_{xy,y} dy)t dx + F_x t dx dy = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dalam arah y pun harus terpenuhi persamaan keseimbangan gayanya. Keduanya diperlihatkan dalam bentuk yang lebih sederhana pada Gambar 1.14.

Persamaan diferensial keseimbangannya adalah sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x = 0 \quad (1.2a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \quad (1.2b)$$



Gambar 1.13 Tegangan dan gaya benda per satuan volume yang bekerja pada suatu elemen bidang yang sangat kecil.

Dalam konteks 3 (tiga) dimensi, vektor gaya badan adalah sebagai berikut,

$$\{F\} = \{F_x \quad F_y \quad F_z\} \quad (1.3)$$

Persamaan diferensial keseimbangannya adalah sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0 \quad (1.4a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + F_y = 0 \quad (1.4b)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z = 0 \quad (1.4c)$$

Apabila benda elastis mengalami deformasi, maka diasumsikan tidak terjadi retak, tidak terjadi tumpang-tindih (*overlap*) pada bagian-bagiannya, atau disebut kondisi keserasian (*compatibility conditions*) harus terpenuhi, dimana medan peralihan menerus (*continuous*) dan berharga tunggal (*single valued*).

Kondisi batas (*boundary condition*) harus diberlakukan terhadap tegangan dan peralihan. Kondisi ini merupakan bagian dari definisi masalah. Sebagai contoh penerapan kondisi batas, adalah diilustrasikan pada Gambar 1.1, yaitu tepi bagian kiri (tumpuan) tidak bergerak (yaitu pada $x = 0$, maka $u = v = 0$) walaupun tekanan (*pressure*) bekerja. Contoh lain dari penerapan kondisi batas, apabila peralihan diketahui, maka tegangan merupakan bilangan yang belum diketahui (*unknown*), demikian pula sebaliknya.

Apabila medan peralihan atau tegangan memenuhi keseimbangan, keserasian, dan kondisi batas, maka solusinya dapat diperoleh. Apabila perilaku beban terhadap responsnya berupa fungsi linier, maka solusinya adalah tunggal.

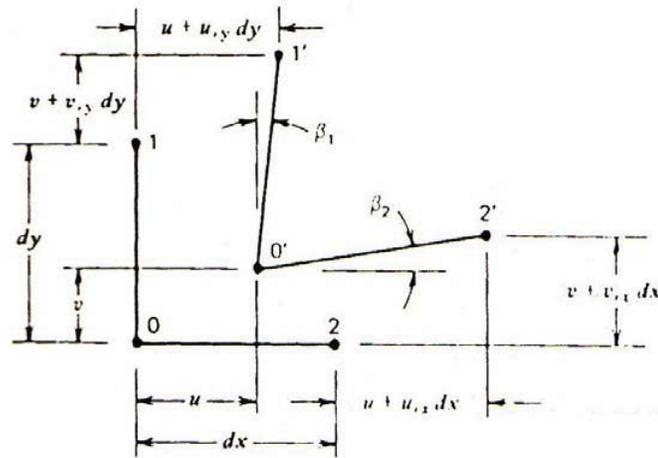
Dalam konteks metode elemen hingga, apabila elemen diadakan berdasarkan medan peralihan, yang berarti peralihan titik kumpul merupakan *unknown* utama, maka kondisi keserasian akan terpenuhi di dalam elemen. Jika medan yang dipilih sesuai, akan berarti juga ada keserasian antara elemen, juga memenuhi kondisi batas peralihan.

Persamaan keseimbangan dan kondisi batas mengenai tegangan yang diperoleh hanya merupakan pendekatan. Pendekatan ini akan semakin baik apabila derajat kebebasan (*degree of freedom*) yang digunakan semakin banyak, yang mana berarti bahwa akan semakin banyak proses penghitungannya.

Pemahaman lebih lanjut mengenai teori elastisitas dapat dipelajari secara mandiri dari sumber-sumber pustaka berupa buku-buku elastisitas.

1.6 Hubungan Regangan dengan Peralihan

Regangan adalah perubahan panjang terhadap panjang mula-mula. Hubungan antara regangan dengan peralihan merupakan yang penting dalam proses pembentukan suatu elemen.



Gambar 1.14 Peralihan dan distorsi panjang dx dan dy .

Gambar 1.14 memperlihatkan bahwa medan regangan yang umum menyebabkan perubahan konfigurasi 012 menjadi $0'1'2'$. Seperti halnya tegangan-regangan pada Gambar 1.14, peralihan u dan v merupakan fungsi dari koordinat. Diasumsikan bahwa inkremen seperti $u_{,x}$ sangat kecil dibandingkan u dan v .

$$\varepsilon_x = \frac{L_{0'2'} - L_{02}}{L_{02}} = \frac{\{dx + (u + u_{,x} dx) - u\} - dx}{dx} = u_{,x} \quad (1.5)$$

Analisis yang serupa akan menghasilkan regangan normal pada arah y .

$$\varepsilon_y = v_{,y} \quad (1.6)$$

Regangan geser adalah besarnya perubahan sudut. Karena inkremen peralihan sangat kecil, maka $\beta_1 = \tan \beta_1$, dan $\beta_2 = \tan \beta_2$, sehingga persamaan regangan geser adalah sebagai berikut,

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2 = \frac{(u + u_{,y} dy) - u}{dy} + \frac{(v + v_{,x} dx) - v}{dx} = u_{,y} + v_{,x} \quad (1.7)$$

Hubungan regangan-peralihan dapat dinyatakan dalam bentuk matriks baik dalam konteks 2 (dua) dimensi maupun 3 (tiga) dimensi sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (1.8a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.8b)$$

1.7 Hubungan Tegangan dengan Regangan

Hubungan tegangan-regangan dapat ditulis secara umum dalam persamaan sebagai berikut,

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (1.9a)$$

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (1.9b)$$

$$[E] = [C]^{-1} \quad (1.9c)$$

yang mana $[C]$ adalah matriks besaran-besaran material, $[E]$ adalah matriks kekakuan material.

Tipe material yang dikenal secara luas, antara lain isotropik dan ortotropik. Material isotropik adalah material dengan besaran properti sama pada ketiga arah utamanya yang saling tegaklurus. Sebagai contoh material beton dan baja.

Sedangkan material ortotropik adalah material dengan besaran properti berbeda-beda pada masing-masing arah utamanya yang saling tegaklurus. Sebagai contoh adalah material kayu. Kayu mempunyai properti mekanis berbeda pada masing-masing sumbu utamanya.

Secara detail, Persamaan 1.9a (untuk material ortotropik) dapat dituliskan kedalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{-\nu_{RL}}{E_y} & \frac{-\nu_{TL}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{-\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{xz}}{E_x} & \frac{-\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

Dimana terdapat hubungan yaitu,

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (1.11a)$$

$$\frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \quad (1.11b)$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (1.11c)$$

Untuk material isotropik, karena besaran properti pada semua arah utamanya adalah sama, maka $E_x = E_y = E_z = E$, demikian pula berlaku untuk masing-masing nilai untuk G dan ν , serta untuk material isotropik berlaku persamaan,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.12)$$

1.8 Referensi

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
2. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

3. url: http://www.abacom.de/products/abaqus_fea.html, diakses tanggal 26 November 2011.
4. url: <http://www.adina.com/index.shtml>, diakses tanggal 26 November 2011.
5. url: <http://www.ansys.com>, diakses tanggal 26 November 2011.
6. url: <http://www.csiberkeley.com/sap2000>, diakses tanggal 26 November 2011.
7. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, diakses tanggal 26 November 2011.
8. url: <http://preview.filesonic.com/img/c4/6d/ce/3475071.jpg>, diakses tanggal 26 November 2011.
9. url: http://web.srasgroup.com/wp-content/uploads/2010/11/car_impact.jpg, diakses tanggal 26 November 2011.
10. url: <http://www.infometrik.com/2009/08/pengantar-finite-element-method>, diakses tanggal 26 November 2011.
11. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Strength_of_materials diakses tanggal 29 November 2011.

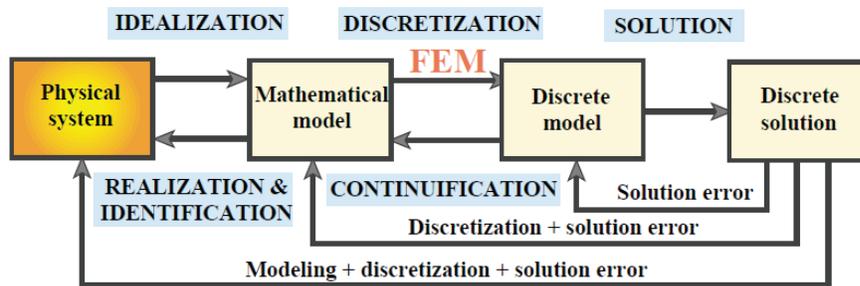
BAB 2

PENGANTAR

METODE ELEMEN HINGGA

2.1 Terminologi

Langkah dasar dalam mempelajari metode elemen hingga dengan cara pendekatan fisik selengkapnya diilustrasikan pada Gambar 2.1 [2]. Tiga tahapan utama adalah idealisasi, diskretisasi, dan solusi. Setiap tahapan berpotensi menghasilkan kesalahan (*error*).



Gambar 2.1 Skematik penyederhanaan proses fisik sebagai ilustrasi suatu terminologi pemodelan [2].

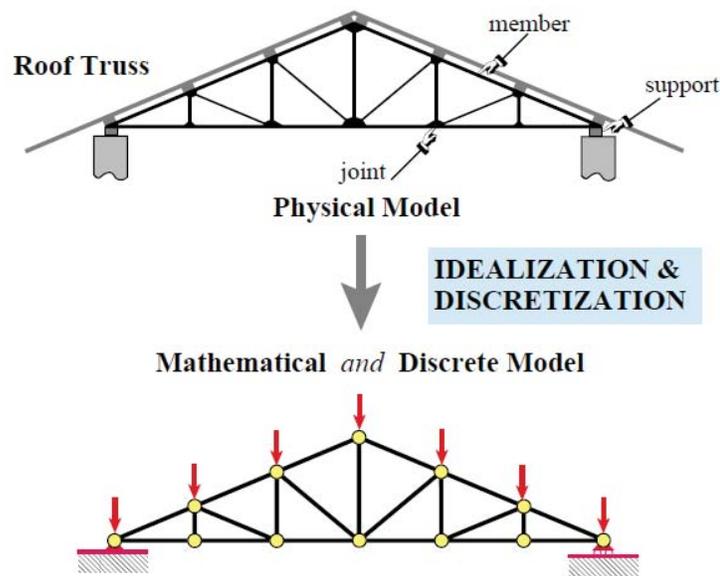
2.2 Idealisasi

Idealisasi (pemodelan matematika) merupakan bentuk fisik dari suatu model struktur yang sebenarnya untuk dianalisis dalam bentuk model matematika [2]. Tahapan ini adalah tahapan yang paling penting, karena benar atau tidak, serta tepat dan tidaknya suatu perhitungan suatu struktur bangunan, tergantung dari idealisasi model struktur dari bentuk yang sebenarnya bangunan tersebut dibangun, menjadi suatu model matematika untuk dianalisis (perhitungan struktur tersebut).

Sebagai contoh, Gambar 2.2 memperlihatkan perencanaan suatu struktur rangka atap. Sesuai terminologi Gambar 2.1, maka dari bentuk struktur yang

sebenarnya selanjutnya dimodelkan (idealisasi struktur) untuk keperluan perhitungan secara matematika, dalam hal ini adalah mengenai perilaku kekuatan dan kekakuan struktur. Apabila idealisasi yang dilakukan sesuai kondisi yang sebenarnya (sebagai contoh besarnya beban, ukuran batang-batang penyusun rangka atap, properti mekanis material yang digunakan, dan tumpuan), maka hasil perhitungan yang diperoleh akan dapat dianggap mewakili kondisi yang sebenarnya.

Artinya apabila struktur tersebut dibangun, apabila terjadi pembebanan seperti yang direncanakan, perilaku kekuatan dan kekakuan struktur tersebut dalam kondisi kenyataan tidak akan berbeda jauh dengan hasil perhitungan (prediksi).



Gambar 2.2 Model diskret suatu struktur rangka atap [2].

Kata model dapat diartikan salinan dari suatu bentuk aslinya dalam skala tertentu. Model dibuat untuk sarana simulasi perilaku suatu bentuk asli tersebut. Sebagai contoh, suatu model jembatan dibuat untuk keperluan simulasi struktur jembatan apabila terdapat beban-beban yang bekerja, sehingga dapat dipelajari perilaku kekuatan dan kekakuan struktur jembatan tersebut. Apabila hasil simulasi model jembatan tersebut telah memperlihatkan bahwa bangunan aman, maka

barulah layak untuk dibangun/direalisasikan menjadi struktur jembatan yang sebenarnya.

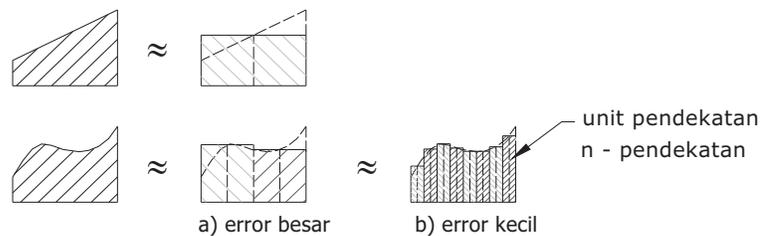
Pemodelan matematika (idealisasi) memerlukan dasar teori yang tepat dan benar. Sebagai contoh untuk pemodelan struktur *flat-plate* akibat beban transversal, terdapat 4 (empat) dasar teori [2], yaitu sebagai berikut:

1. Model *very thin plate*, didasarkan pada teori Von Karman's coupled membrane-bending.
2. Model *thin plate*, didasarkan pada teori Kirchhoff's plate.
3. Model *moderately thick plate*, didasarkan pada teori Mindlin-Reissner plate.
4. Model *very thick plate*, didasarkan pada teori three-dimensional elasticity.

2.3 Diskretisasi

Pada tahapan diskretisasi, ada dua solusi utama yang dapat dipilih, yaitu solusi analitikal dan solusi secara numerikal. Solusi secara analitis (analitikal) adalah pendekatan yang lebih intelektual, sedangkan solusi numerikal keakuratan hasilnya bergantung dari model yang dibuat. Gambar 2.3 memperlihatkan ilustrasi perhitungan luas area suatu bidang.

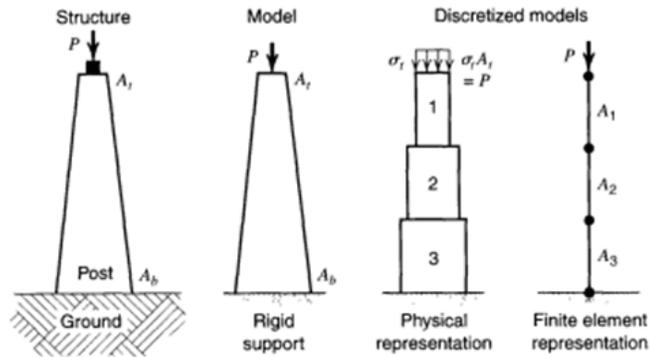
Dalam penyelesaian dengan solusi numerikal, hasil akan akurat apabila jumlah n (pendekatan) semakin banyak sehingga hasil akan semakin teliti. Hal ini secara skematik dapat dibuktikan melalui Gambar 2.3, dimana pada model elemen hingga Gambar 2.3b menggunakan pendekatan jumlah n yang lebih banyak dibandingkan dengan model pertama Gambar 2.3a, sehingga hasil yang diperoleh akan lebih akurat, dalam arti *error* yang terjadi lebih kecil.



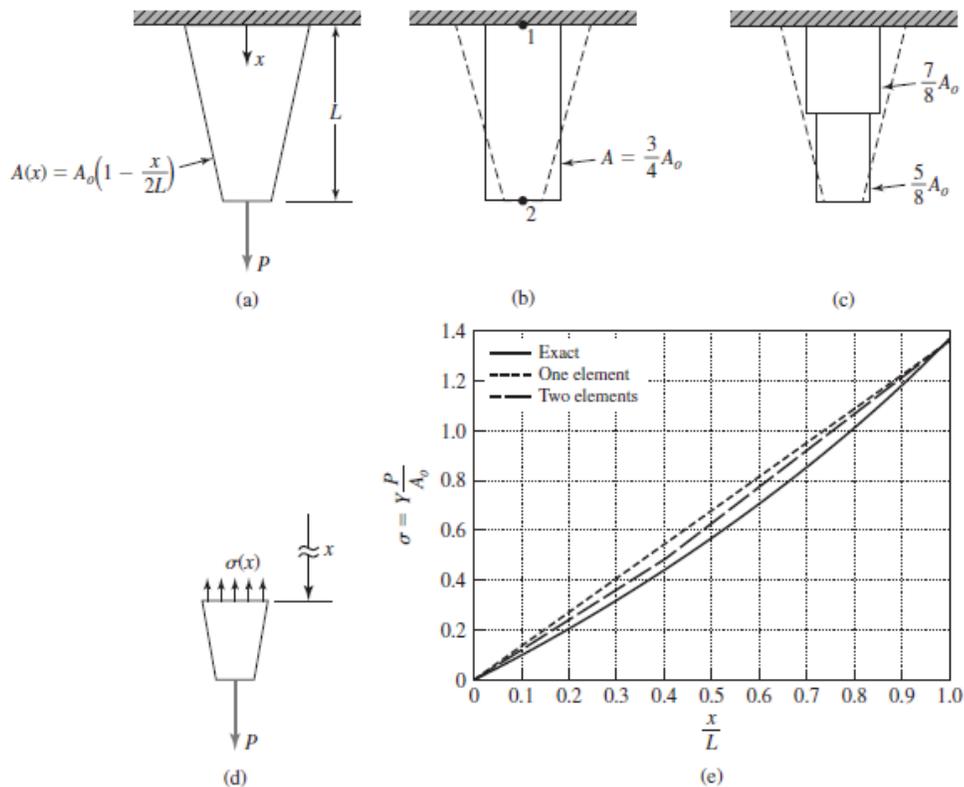
Gambar 2.3 Pendekatan menghitung suatu luas bidang.

Gambar 2.4 memperlihatkan contoh studi kasus struktur menara yang dibebani terpusat P . Struktur mempunyai dimensi dan ukuran penampang yang

tidak *uniform* dari tumpuan bawah sampai dengan puncak (atas). Dalam penyelesaiannya, dengan menggunakan pendekatan metode elemen hingga, maka dibuat representasi elemen hingga dengan membagi menjadi tiga elemen (model diskretisasi).

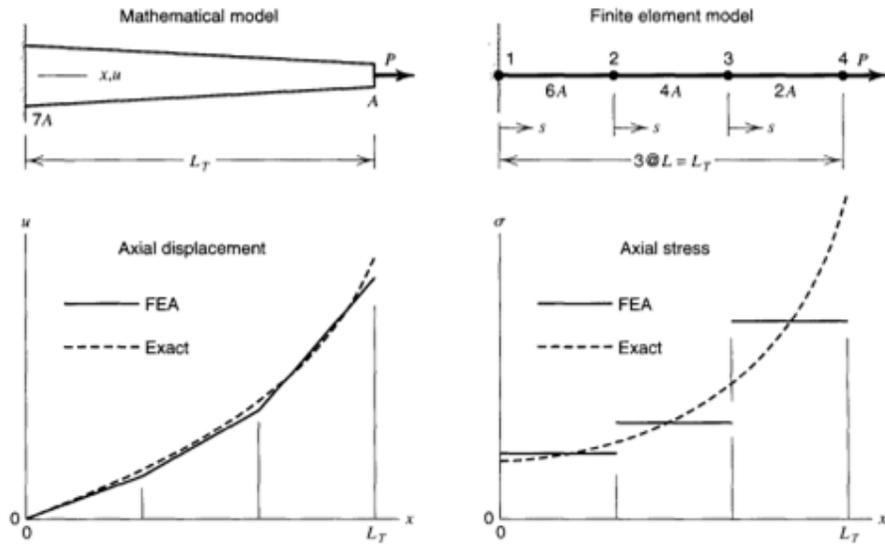


Gambar 2.4 Diskretisasi model struktur sebenarnya menjadi elemen hingga [1].

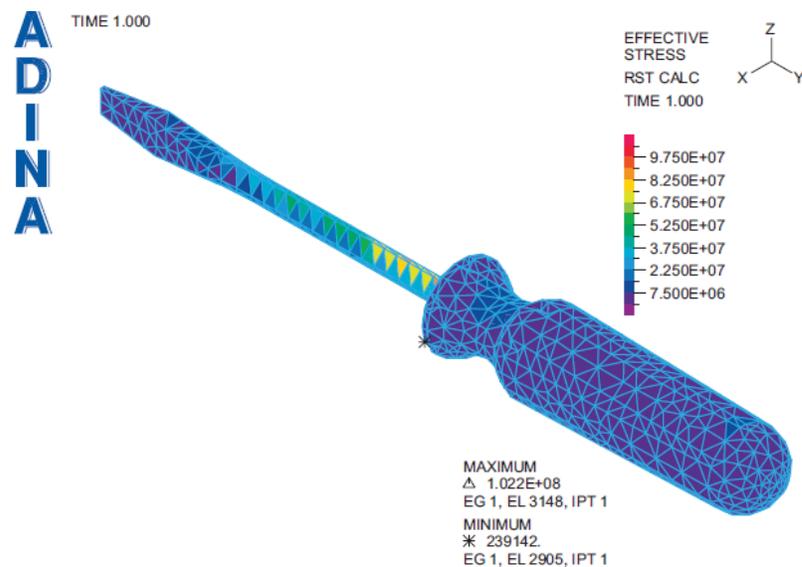


Gambar 2.5 Diskretisasi model struktur menjadi satu elemen dan dua elemen [4].

Selanjutnya Gambar 2.5 memperlihatkan contoh yang serupa dengan studi kasus sebelumnya (Gambar 2.4). Gambar 2.5 memperlihatkan sebuah struktur kantilever dengan bentuk dan ukuran penampang nonprismatis (tidak *uniform*). Hasil perhitungan secara skematik dijelaskan melalui gambar, yang mana menunjukkan bahwa tingkat ketelitian (pembagian jumlah elemen) mempengaruhi hasil yang diperoleh (berkaitan dengan besar/kecilnya *error* yang terjadi).



Gambar 2.5 Diskretisasi struktur kantilever dengan elemen hingga [1].

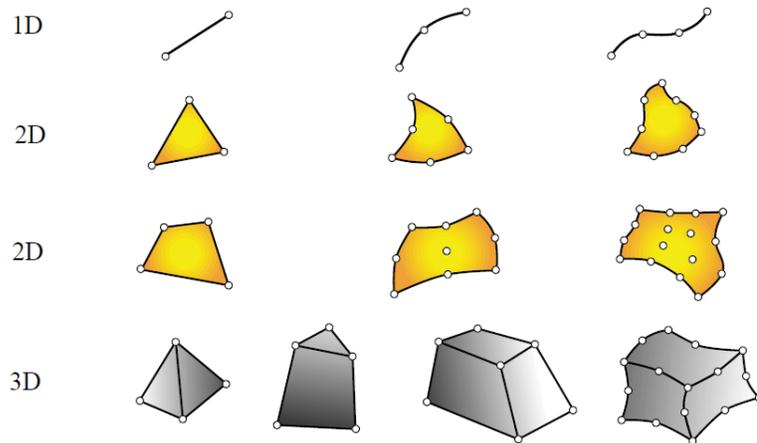


Gambar 2.6 Diskretisasi model *screwdriver* dengan metode elemen hingga secara 3 dimensi [3].

Gambar 2.6 memperlihatkan skematik model *screwdriver* dalam simulasi numerik menggunakan perangkat lunak ADINA [3]. Pembuatan model tersebut dimaksudkan sebagai sarana simulasi secara “virtual”, seolah-olah diketahui kemampuan *screwdriver* apabila digunakan/diterapkan dalam kondisi riil. Diharapkan dari simulasi tersebut diperoleh informasi tegangan yang mengakibatkan *screwdriver* mengalami kelelahan, sehingga apabila produk tersebut diedarkan, dapat dilengkapi dengan informasi berapa kemampuan maksimal yang mampu digunakan. Untuk menunjang keakuratan hasil simulasi numerik, maka diperlukan validasi empiris dengan membuat benda uji yang sebenarnya, untuk selanjutnya di-tes di laboratorium.

2.4 Metode Elemen Hingga

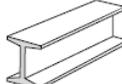
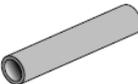
Metode elemen hingga (selanjutnya disebut MEH atau FEM) merupakan suatu teknik diskretisasi yang sangat dominan dalam mekanika struktur. Konsep dasar MEH adalah membagi suatu model matematika menjadi komponen-komponen (tidak terjadi overlap) geometri yang sederhana, yaitu disebut elemen hingga (*finite element*) atau elemen (*element*).



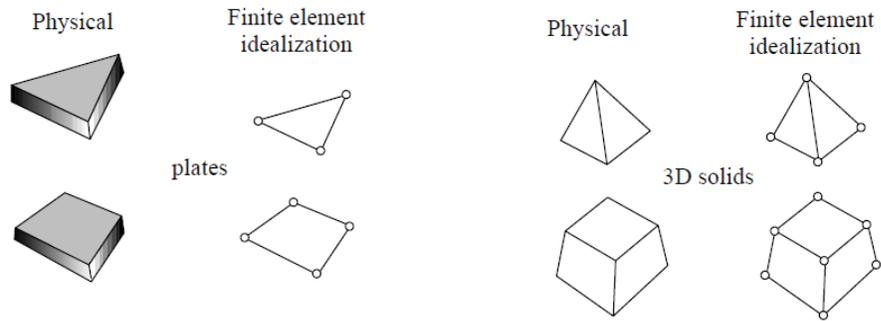
Gambar 2.7 Geometri elemen hingga dalam konteks 1D, 2D, dan 3D [2].

2.5 Klasifikasi Elemen Mekanis

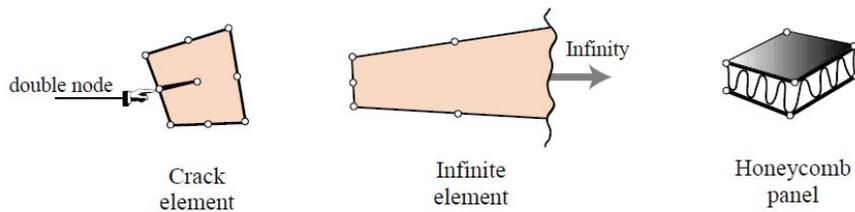
Klasifikasi elemen hingga pada suatu mekanika struktur berhubungan dengan kondisi fisik struktur yang sebenarnya. Beberapa klasifikasi yaitu elemen primitif, elemen kontinum, elemen spesial, elemen makro, dan substruktur.

| Physical Structural Component | Mathematical Model Name | Finite Element Idealization |
|---|--------------------------------------|--|
|  | bar |  |
|  | beam |  |
|  | tube, pipe |  |
|  | spar (web) |  |
|  | shear panel (2D version of above) |  |

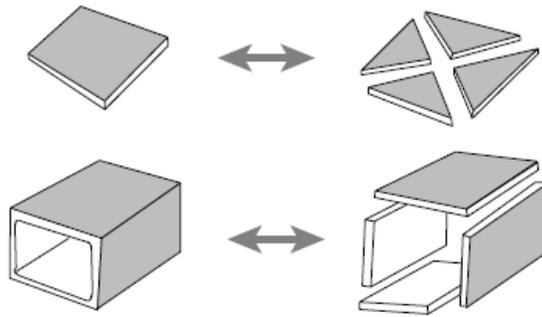
Gambar 2.8 Beberapa contoh elemen struktur primitif [2].



Gambar 2.9 Beberapa contoh elemen kontinu [2].



Gambar 2.10 Contoh elemen struktur spesial [2].

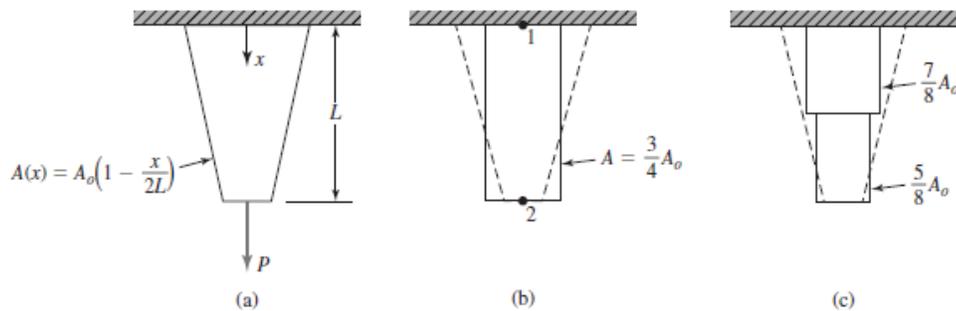


Gambar 2.11 Contoh elemen makro [2].

2.6 Kondisi Batas

Kondisi batas telah dipelajari sebelumnya pada matakuliah Statika dan Mekanika Bahan, Analisis Struktur, dan Analisis Struktur Metode Matriks. Kekuatan kunci dari metode elemen hingga adalah bagaimana mengelola kondisi-kondisi batas dan kondisi-kondisi *interface*. Penjelasan lebih detail mengenai hal ini akan dipelajari pada bab-bab selanjutnya.

Sebagai ilustrasi sederhana, dapat dilihat pada Gambar 2.12. Pada Gambar 2.12b, struktur kantilever dengan tumpuan pada titik nodal 1 (ujung bagian atas), apabila kondisi batas diterapkan maka titik nodal 1 tidak mengalami translasi, sehingga dapat diketahui bahwa $u_1 = 0$.



Gambar 2.12 Contoh penerapan syarat atau kondisi batas [4].

2.7 Referensi

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.

2. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
3. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
4. Hutton, D.V. (2004). "Fundamentals of Finite Element Analysis", The MacGraw-Hill Companies.

BAB 3

ELEMEN SATU DIMENSI

DAN PROSEDUR

KOMPUTASI

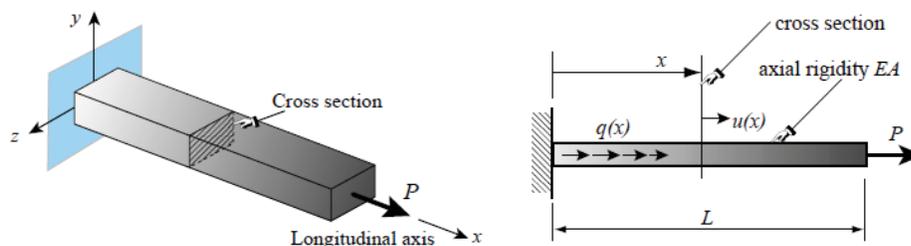
3.1 Pendahuluan

Elemen satu dimensi, sebagai contoh antara lain batang yang diberi beban aksial dan balok sederhana (tumpuan sendi-rol) dengan beban terpusat ditengah bentang. Definisi elemen batang (*bar*) adalah elemen yang hanya dapat menahan dan menyalurkan gaya aksial saja, sedangkan elemen balok (*beam*) adalah elemen yang dapat menahan gaya-gaya aksial, geser, dan momen lentur [3].

Dalam analisis struktur, dimana pengaruh waktu tidak diperhitungkan, artinya beban yang bekerja tidak bergantung terhadap waktu, suatu struktur rangka batang (*truss*) dengan jumlah batang n , dapat dimodelkan dengan menggunakan sejumlah n elemen batang. Demikian pula pada suatu struktur *frame* yang disusun oleh sejumlah n balok (dan kolom), dapat dimodelkan dengan menggunakan sejumlah n elemen balok.

3.2 Elemen Batang

Dalam subbab ini dipelajari mengenai elemen batang (*bar*) dengan kondisi material elastik dan bentuk penampang batangnya prismatic-*uniform*, seperti terlihat pada contoh Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Struktur kantilever dengan model elemen batang [4].

Persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut,

$$\frac{AE}{L}(u_1 - u_2) = F_1 \quad (3.1a)$$

$$\frac{AE}{L}(u_2 - u_1) = F_2 \quad (3.1b)$$

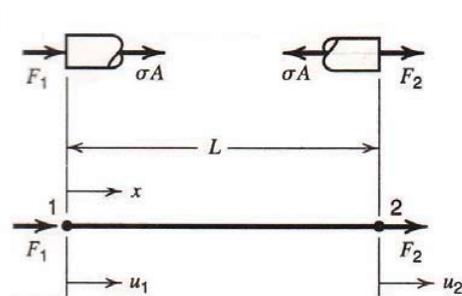
Jika ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } k = \frac{AE}{L} \quad (3.2)$$

Persamaan keseimbangan, maka $F_1 = -F_2$, maka Persamaan 3.2 dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} = -\{\mathbf{r}\} \quad (3.3)$$

dimana $[\mathbf{k}]$ dinamakan matriks kekakuan elemen.



Gambar 3.2 Elemen batang dengan dua titik nodal [3].

Untuk contoh studi kasus elemen batang dengan dua titik nodal, dimana hanya terjadi peralihan (*displacement*) aksial pada titik nodal, maka matriks $[\mathbf{k}]$ adalah matriks berukuran 2×2 sesuai Persamaan 3.2. Vektor $\{\mathbf{r}\}$ bertanda negatif, karena asumsi yang digunakan dalam pembahasan ini adalah vector $\{\mathbf{r}\}$ diartikan sebagai beban yang berhubungan dengan deformasi elemen, yang diaplikasikan oleh elemen terhadap titik nodal struktur pada elemen yang akan disambungkan. Maka,

$$-\{\mathbf{r}\} = [F_1 \ F_2]^T \quad (3.4)$$

dimana k adalah kekakuan dari model pegas linier atau AE/L .

Sebagai contoh, dimisalkan $u_1 = 0$ dan $u_2 = 1$, maka Persamaan 3.2 menjadi sebagai berikut,

$$-\{\mathbf{r}\} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

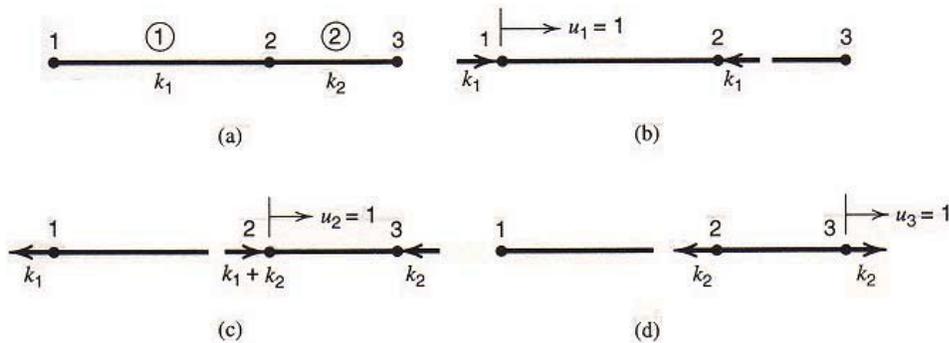
maka regangan dalam hal ini adalah $\varepsilon = u_2/L$.

Untuk struktur yang disusun oleh dua elemen batang (penampang *uniform* dan material elastik), maka persamaan kekakuan strukturnya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (3.6a)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & k_2 \\ 0 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.6b)$$

dimana $[\mathbf{K}]$ adalah matriks kekakuan struktur atau disebut pula matriks kekakuan global.

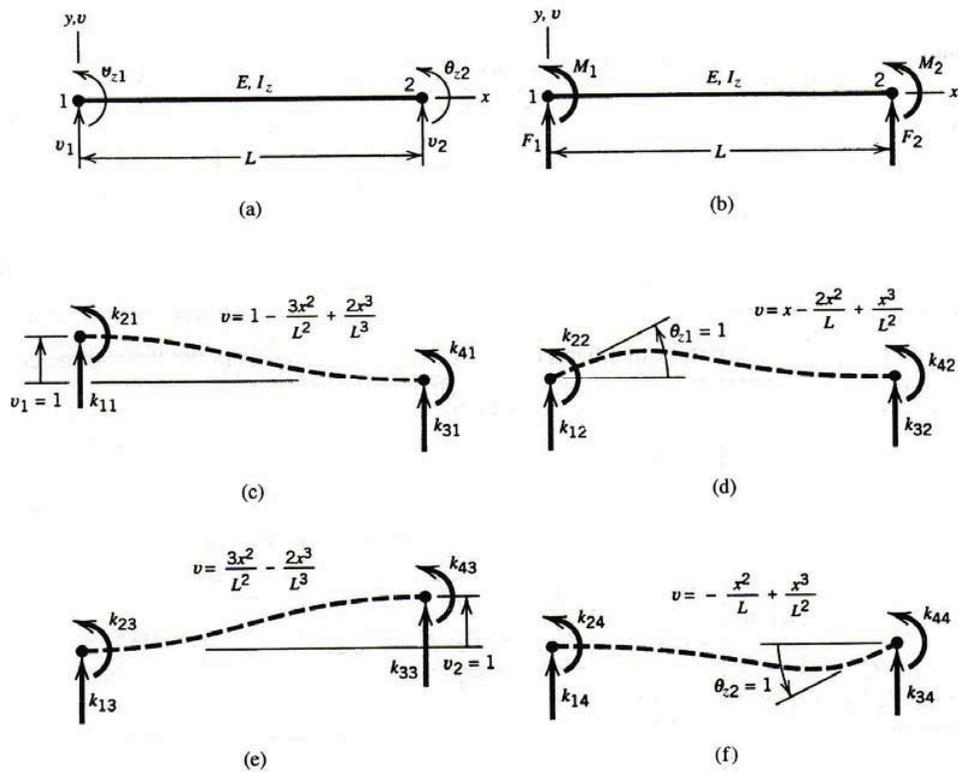


Gambar 3.3 Struktur yang tersusun dari dua buah elemen batang [3].

3.3 Elemen Balok

Dalam subbab ini, dibahas mengenai elemen balok (*beam element*) dengan batasan ruang lingkup yang ditinjau adalah bentuk penampang pristik, materialnya elastik. Elemen balok mempunyai dua titik nodal pada masing-masing ujungnya. Setiap titik nodal mempunyai dua derajat kebebasan (*degree of freedom* atau dof), yaitu translasi dan rotasi.

Dalam pembahasan ini, digunakan batasan asumsi bahwa deformasi geser diabaikan, sehingga teori yang digunakan adalah *Euler-Bernoulli beam theory*. Apabila deformasi geser diperhitungkan maka dikenal adanya teori *Timoshenko beam theory*.



Gambar 3.4 Elemen balok [3].

Matriks kekakuan elemen balok dua dimensi dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{matrix} \quad (3.7)$$

dimana,

$$[v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}]^T \quad (3.8)$$

Secara umum, persamaan matriks kekakuan elemen balok (dua dimensi) untuk tinjauan deformasi geser diperhitungkan serta diperhitungkan pula adanya translasi aksial pada titik nodal adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & Y_2 & 0 & -Y_1 & Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_3 & 0 & -Y_2 & Y_4 \\ -X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1 & -Y_2 & 0 & Y_1 & -Y_2 \\ 0 & Y_2 & Y_4 & 0 & -Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \quad (3.9a)$$

dimana:

$$X = \frac{AE}{L} \quad (3.9b)$$

$$Y_1 = \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)L^3} \quad (3.9c)$$

$$Y_2 = \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)L^2} \quad (3.9d)$$

$$Y_3 = \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \quad (3.9e)$$

$$Y_4 = \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)L} \quad (3.9f)$$

$$\phi_y = \frac{12EI_z k_y}{AGL^2} \quad (3.9g)$$

dimana A/k_y adalah luas geser efektif untuk deformasi geser transversal pada arah y . Sebagai contoh, nilai k_y untuk penampang persegi adalah sebesar 1,2, sedangkan untuk penampang lingkaran berlubang dengan dinding tipis adalah sebesar 2,0 [3].

Elemen balok tiga dimensi (*3D beam element*) tidak dibahas dalam buku ini, namun apabila hendak dipelajari secara mandiri, dasar teori yang digunakan, sebagai contoh dapat dilihat pada tinjauan literatur referensi buku *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* halaman 27-29 [3].

3.4 Elemen Batang dan Balok pada Orientasi Sembarang

Untuk elemen dengan orientasi arah sumbu-sumbunya sembarang, maka dipelajari elemen struktur dengan istilah koordinat lokal $x'y'z'$. Selanjutnya untuk

menghitung matrik kekakuan elemen $[k]$, maka diperlukan transformasi koordinat rotasional untuk matriks $[k']$.

3.4.1 Elemen Batang

Persamaan matriks $\{d'\}$ dapat dihitung dengan menggunakan matriks transformasi $[T]$ sebagai berikut,

$$\{d'\} = [T]\{d\} \quad (3.10)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dimana c adalah $\cos \beta$ dan s adalah $\sin \beta$.

$$\{r\} = [T]^T \{r'\} \quad (3.12)$$

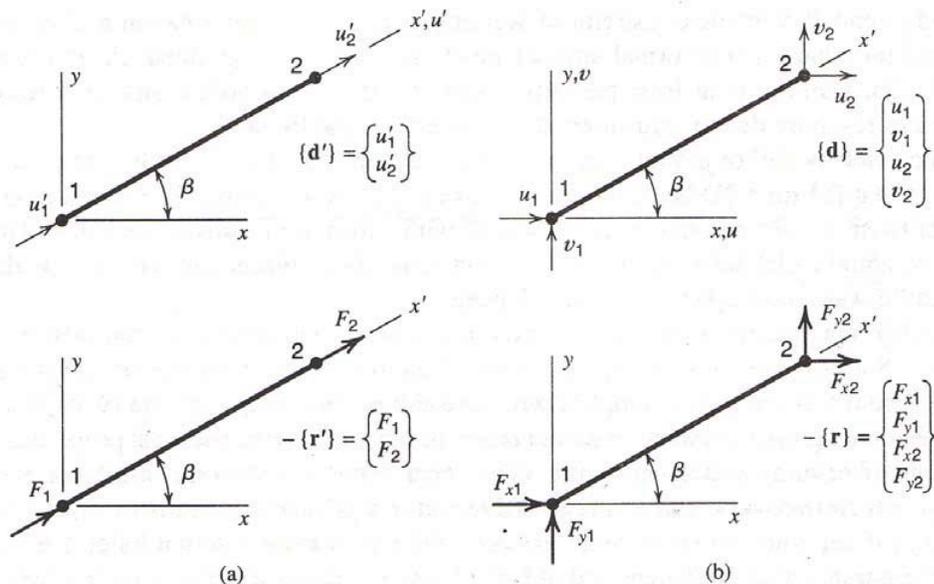
maka hubungan kekakuan elemen dalam tinjauan koordinat lokal dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$-\{r'\} = [k']\{d'\} \quad (3.13)$$

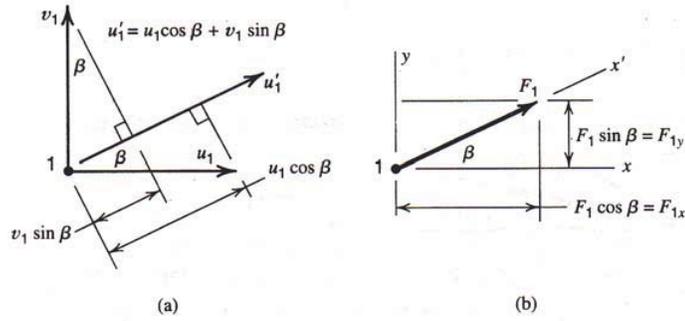
Selanjutnya, dalam tinjauan koordinat global, persamaan sebagai berikut,

$$-\{r\} = [k]\{d\} \quad (3.14)$$

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (3.15)$$



Gambar 3.5 D.o.f titik nodal lokal dan global untuk elemen batang [3].



Gambar 3.6 Kontribusi dari u_1 dan v_1 kepada u_1' [3].

Selanjutnya, untuk elemen dalam koordinat global x dan y , perhitungan dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = k \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dimana untuk sistem bidang xy , maka $l_1 = \cos \beta$, $m_1 = \sin \beta$, dan $n_1 = 0$.

3.4.2 Elemen Balok

Untuk elemen balok, persamaan-persamaan yang digunakan adalah sebagai berikut,

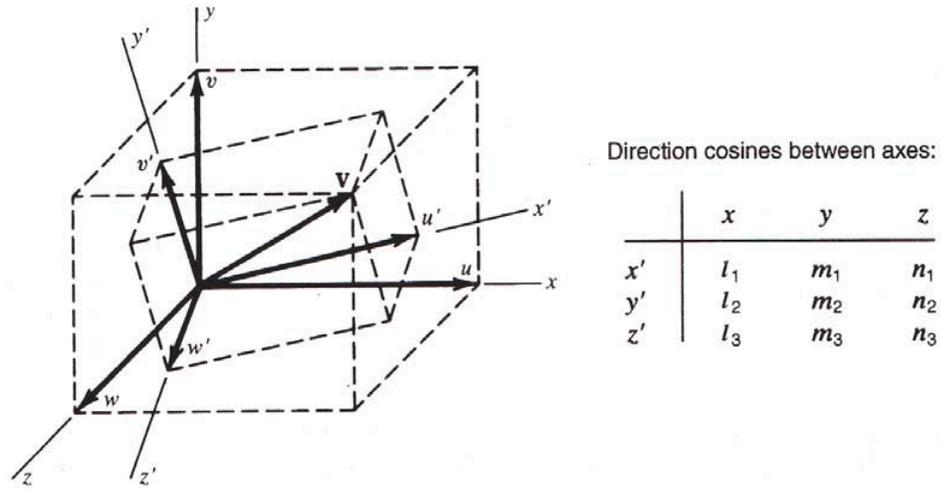
$$u_1' = l_1 u_1 + m_1 v_1 + n_1 w_1 \quad (3.18a)$$

$$\theta_{x1}' = l_1 \theta_{x1} + m_1 \theta_{y1} + n_1 \theta_{z1} \quad (3.18b)$$

Matriks transformasi dari koordinat lokal menjadi global adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (3.19a)$$

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.19b)$$



Gambar 3.8 Vektor \mathbf{V} yang dalam tinjauan komponen uvw (sistem koordinat global) dan $u'v'w'$ (koordinat lokal) [3].

3.5 Perakitan Elemen

Persamaan matriks untuk struktur yang tersusun oleh sejumlah elemen (N_{els}), yang mana menempatkan titik-titik nodal struktur dalam kondisi keseimbangan adalah sebagai berikut,

$$\sum_{i=1}^{N_{els}} \{r\}_i + \sum_{i=1}^{N_{els}} \{r_e\}_i + \{P\} = \{0\} \quad (3.20)$$

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{N_{els}} [\mathbf{k}]_i \quad (3.22a)$$

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{P}\} + \sum_{i=1}^{N_{els}} \{r_e\}_i \quad (3.22b)$$

Perakitan dan penomoran titik nodal struktur, selengkapnya dapat dihitung dengan persamaan-persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}]_1 \{\mathbf{d}\}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \text{untuk elemen pertama} \quad (3.23a)$$

$$[\mathbf{k}]_2 \{\mathbf{d}\}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \text{untuk elemen kedua} \quad (3.23b)$$

Dimana a dan b adalah penamaan simbolik untuk elemen-elemen matriks $[\mathbf{k}]$. selanjutnya penomoran titik nodal elemen untuk elemen pertama sebagai berikut,

$$-r_1 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \quad (3.24a)$$

$$-r_2 = a_4 d_1 + a_5 d_2 + a_6 d_3 \quad (3.24b)$$

$$-r_3 = a_7 d_1 + a_8 d_2 + a_9 d_3 \quad (3.24c)$$

dan penomoran titik nodal struktur untuk elemen pertama sebagai berikut,

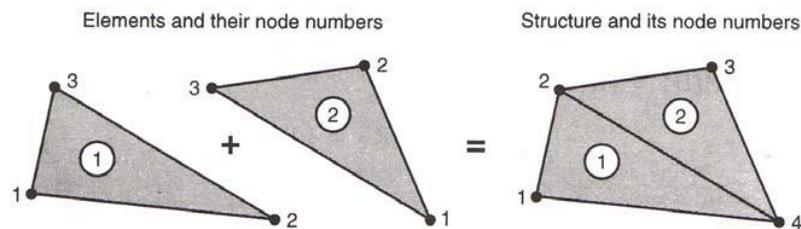
$$-r_1^s = a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 \quad (3.25a)$$

$$-r_4^s = a_4 D_1 + a_5 D_2 + a_6 D_3 \quad (3.25b)$$

$$-r_2^s = a_7 D_1 + a_8 D_2 + a_9 D_3 \quad (3.25c)$$

Untuk elemen pertama, maka persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} -r_1^s \\ -r_2^s \\ -r_3^s \\ -r_4^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & a_2 \\ a_7 & a_9 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_6 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

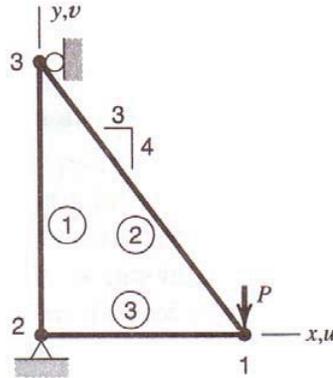


Gambar 3.9. Perakitan dua elemen segitiga [3].

Sedangkan untuk elemen kedua, caranya sama. Maka matriks kekakuan elemen total adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{k}]_1 + [\mathbf{k}]_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & a_2 \\ a_7 & a_9 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_6 & 0 & a_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_9 & b_8 & b_7 \\ 0 & b_6 & b_5 & b_4 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Contoh soal sebagai berikut, struktur rangka batang yang tersusun oleh tiga buah elemen batang, dengan beban berupa beban terpusat P pada titik nodal 1 (satu), arah beban vertikal kebawah, selengkapnya ditampilkan pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Struktur rangka batang.

Hasil perhitungan contoh soal diatas adalah sebagai berikut (belum menerapkan kondisi batas pada tumpuan titik nodal 2 dan titik nodal 3),

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0,36k_2 & -0,48k_2 & -k_3 & 0 & -0,36k_2 & 0,48k_2 \\ -0,48k_2 & 0,64k_2 & 0 & 0 & 0,48k_2 & -0,64k_2 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -0,36k_2 & 0,48k_2 & 0 & 0 & 0,36k_2 & -0,48k_2 \\ 0,48k_2 & -0,64k_2 & 0 & -k_1 & -0,48k_2 & k_1 + 0,64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ p_2 \\ q_2 \\ p_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Penerapan kondisi batas, yaitu titik nodal 2 dimodelkan sendi dan titik nodal 3 adalah rol, maka $u_2 = v_2 = u_3 = 0$, maka Persamaan 3.28 menjadi sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} k_3 + 0,36k_2 & -0,48k_2 & 0 & 0 & 0 & 0,48k_2 \\ -0,48k_2 & 0,64k_2 & 0 & 0 & 0 & -0,64k_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,48k_2 & -0,64k_2 & 0 & 0 & 0 & k_1 + 0,64k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

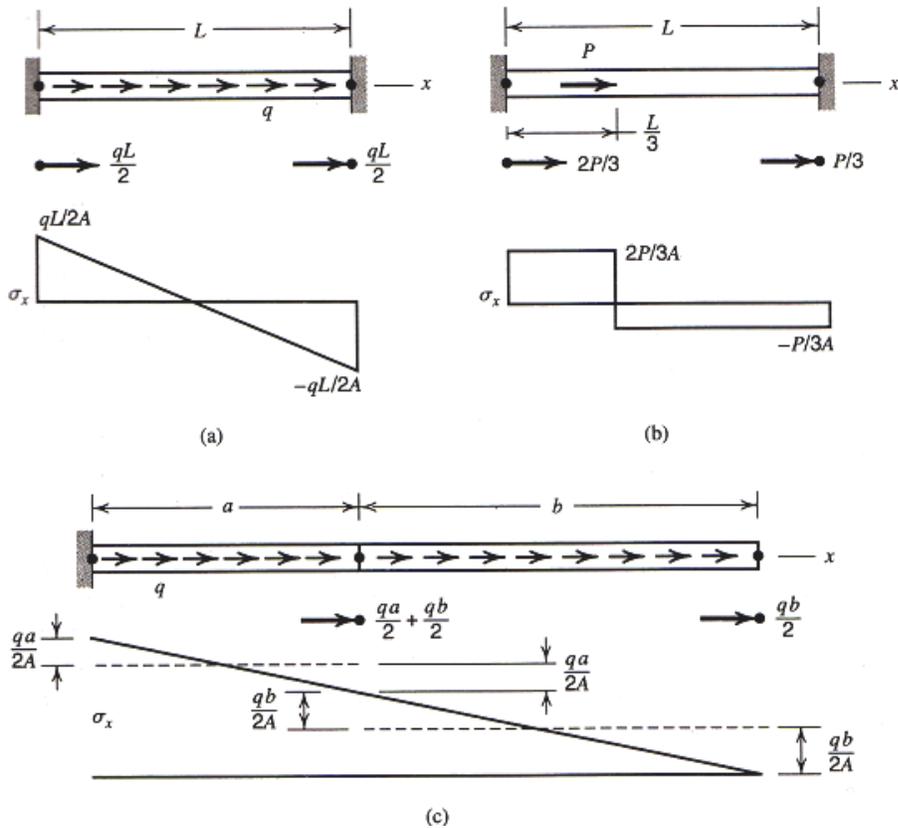
3.6 Beban Mekanis dan Tegangan-Tegangan

Pada elemen batang, tegangan aksial akibat peralihan titik nodal dapat dihitung dengan terlebih dahulu menghitung elongasi e , regangan aksial $\epsilon = e/L$, dan tegangan aksial $\sigma = E.\epsilon$. Secara spesifik untuk elemen batang dengan orientasi koordinat xyz , persamaan tegangan sebagai berikut,

$$\sigma = \frac{E}{L} [(u_2 - u_1)l + (v_2 - v_1)m + (w_2 - w_1)n] \tag{3.30}$$

dimana l , m , dan n adalah nilai kosinus terhadap sumbu batang. Nilai numerikal untuk semua dof titik nodal pada struktur ditampilkan pada matriks $\{D\}$ setelah persamaan global diperoleh.

Gambar 3.11a adalah elemen batang (struktur satu elemen) dengan beban merata aksial (q). Sedangkan Gambar 3.11b adalah elemen batang dengan beban aksial terpusat (P). Gambar 3.11c adalah struktur elemen batang kantilever dengan beban merata aksial (q) bekerja sepanjang bentang.

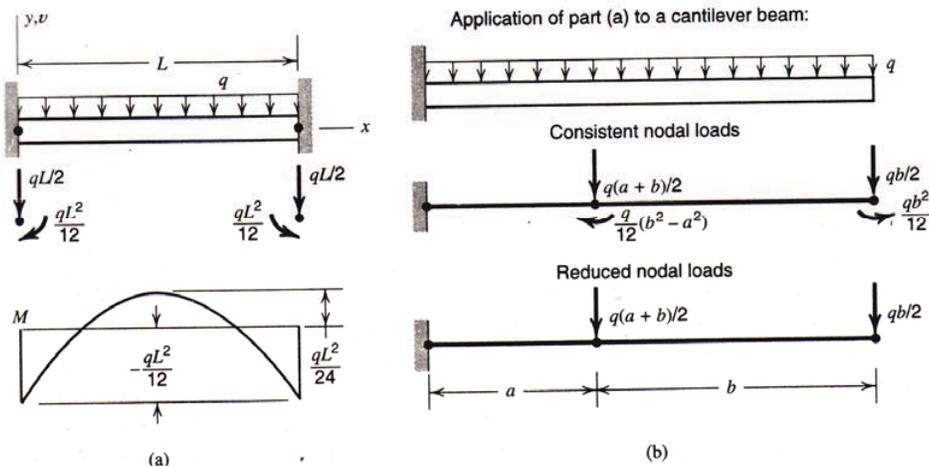


Gambar 3.11 Gaya-gaya titik nodal dan tegangan yang terjadi dari elemen-elemen batang yang dibebani aksial [3].

Gambar 3.12a memperlihatkan struktur balok dengan beban merata, tumpuan masing-masing ujung adalah jepit. Gambar 3.12b adalah struktur balok kantilever dengan beban merata.

Hasil perhitungan untuk balok Gambar 3.12a adalah sebagai berikut,

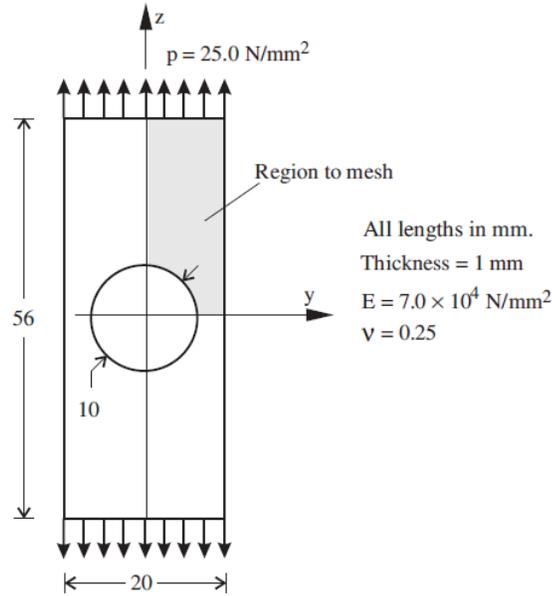
$$\{\mathbf{r}_e\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$



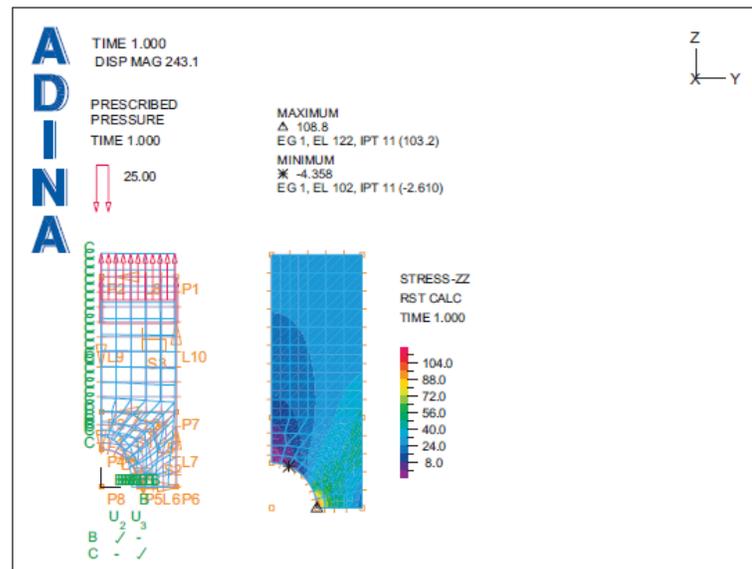
Gambar 3.12 Elemen balok dengan beban merata [3].

3.7 Struktur Simetri

Konsep struktur simetri (*structural symmetry*) telah dipelajari sebelumnya pada matakuliah Analisis Struktur Metode Matriks (ASMM). Ilustrasi penggunaan konsep ini sebagai contoh ditampilkan pada Gambar 3.13. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, maka dibuatlah tinjauan model berupa seperempat bagian saja, yaitu daerah yang diarsir. Hasil perhitungan dengan perangkat lunak ADINA [3] selengkapnya ditampilkan pada Gambar 3.14.



Gambar 3.13 Struktur pelat berlubang [1].



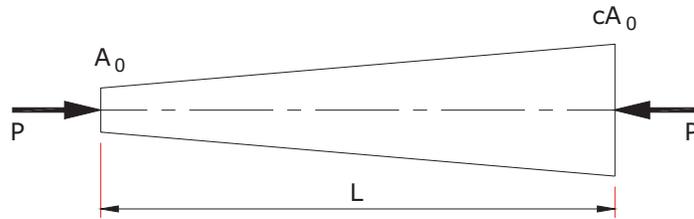
Gambar 3.14 Penyelesaian struktur pelat berlubang [3].

3.8 Soal

1. Soal latihan pertama

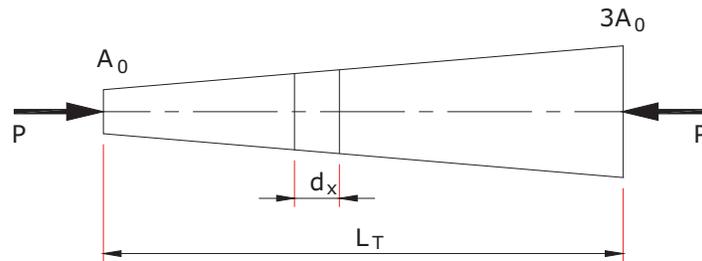
Diketahui struktur elemen batang dua titik nodal (Gambar 3.15), dengan luas penampang batang bervariasi secara linier dengan nilai luas penampang sebesar

A_0 di titik $x = 0$ dan sebesar $c \cdot A_0$ di titik $x = L$. Sedangkan c adalah konstanta, yaitu $c = 3$. Hitunglah elongasi yang terjadi dengan menggunakan cara eksak.



Gambar 3.15 Soal latihan pertama.

Penyelesaian:



$$d\delta = \frac{P \cdot dx}{EA_{(x)}}$$

$$A_{(x)} = A_0 + \frac{x}{L_T} 2A_0$$

Maka elongasi:

$$\Delta = \int_0^{L_T} \frac{P \cdot dx}{E \left(A_0 + \frac{x}{L_T} 2A_0 \right)} = \frac{P}{EA_0} \int_0^{L_T} \frac{dx}{1 + \frac{2}{L_T} x}$$

$$\Delta = \frac{PL_T}{2EA_0} \int_0^{L_T} \ln \left(1 + \frac{2}{L_T} x \right) = \frac{PL_T}{2EA_0} [\ln(3) - \ln(1)] = \frac{PL_T}{2EA_0} \ln(3)$$

$$\Delta = 0.5493 \frac{PL_T}{EA_0}$$

2. Soal latihan kedua

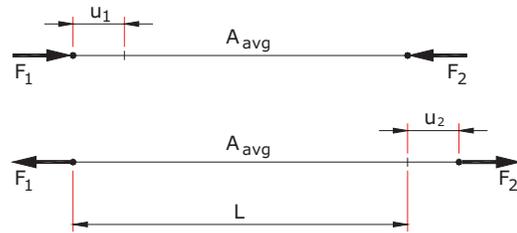
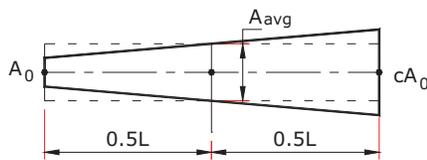
Batang seperti terlihat pada Gambar 3.15 (soal pertama), mempunyai panjang L dan luas penampang bervariasi dari A_0 sampai dengan $3A_0$. Beban yang bekerja

adalah gaya aksial P pada masing-masing ujung. Hitunglah matriks kekakuan elemen, apabila batang dibagi menjadi:

- Satu elemen dengan panjang L .
- Dua elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,5L$.
- Tiga elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,3333L$.
- Empat elemen sama panjang masing-masing yaitu $0,25L$.

Penyelesaian:

Matrik kekakuan dengan pemodelan rata-rata luasan yang diambil pada tengah-tengah elemen.

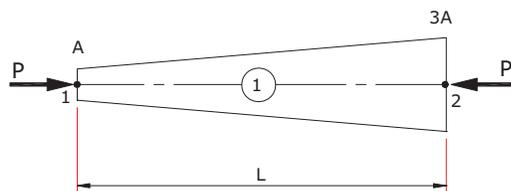


$$A_{avg} = A_0 \frac{(1+c)}{2}$$

Dengan mengambil nilai rata-rata luas penampang maka matrik kekakuannya dapat diambil sama dengan matrik kekakuan batang aksial penampang non-prismatik biasa yaitu:

$$\frac{EA_{avg}}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \text{ atau } \frac{EA_0(1+c)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

a. Penyelesaian dengan satu elemen :



$$A_0 = A ; \quad c = 3$$

$$\frac{EA(1+3)}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ -P \end{Bmatrix}$$

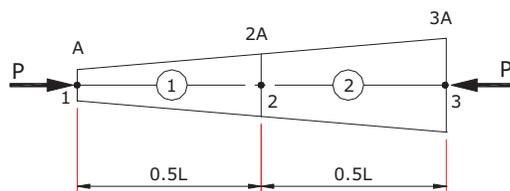
BC pada titik 2 sehingga $u_2 = 0$, oleh sebab itu $u_1 = \Delta$

$$\frac{2EA}{L} \Delta = P$$

$$\Delta = 0.5 \frac{PL}{EA}$$

Hasil tersebut sebesar 91.02% dari nilai eksak, maka *Error* 8.98%.

b. Penyelesaian dengan dua elemen :



Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 2 \quad ; \quad L' = 0.5 L$$

$$\frac{EA}{0.5L} \frac{(1+2)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 2A \quad ; \quad c = 1.5 \quad ; \quad L' = 0.5 L$$

$$\frac{2EA}{0.5L} \frac{(1+1.5)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 3 sehingga $u_3 = 0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

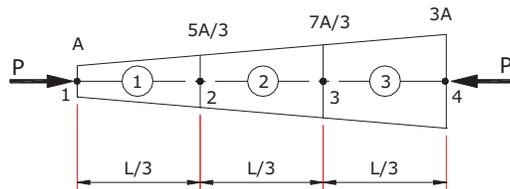
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{EA} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{8}{15} \\ \frac{1}{5} \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1 - u_3$ sedangkan $u_3 = 0$ maka $\Delta = u_1$

$$\Delta = \frac{8}{15} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.53333 \frac{PL}{AE} \quad (97.09\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 2.91%

c. Penyelesaian dengan tiga elemen :



Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 5/3 ; \quad L' = L/3$$

$$\frac{EA}{L/3} \frac{(1 + \frac{5}{3})}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 5A/3 ; \quad c = 7/5 ; \quad L' = L/3$$

$$\frac{\frac{5}{3}EA}{L/3} \frac{(1 + \frac{7}{5})}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #3:

$$A_0 = 7A/3 ; \quad c = 9/7 ; \quad L' = L/3$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

$$\frac{\frac{7}{3}EA(1+\frac{9}{7})}{L/3 \cdot 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 4 sehingga $u_4 = 0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

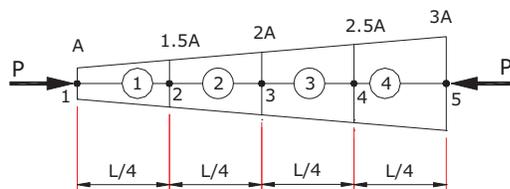
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{AE} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{13}{24} \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1 - u_4$ sedangkan $u_4 = 0$ maka $\Delta = u_1$

$$\Delta = \frac{13}{24} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.54167 \frac{PL}{AE} \quad (98.61\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 1.39%

d. Penyelesaian dengan empat elemen :



Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

Elemen #1:

$$A_0 = A ; \quad c = 1.5 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{EA}{L/4} \frac{(1+1.5)}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #2:

$$A_0 = 1.5A ; \quad c = 4/3 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{1.5EA}{L/4} \frac{(1+4/3)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #3:

$$A_0 = 2A ; \quad c = 1.25 ; \quad L' = L/4$$

$$\frac{2EA}{L/4} \frac{(1+1.25)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elemen #4:

$$A_0 = 2.5A ; \quad c = 1.2 ; \quad L' = L/4$$

Bab 3 - Elemen Satu Dimensi dan Prosedur Komputasi

$$\frac{2.5EA}{L/4} \frac{(1+1.2)}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

Struktur keseluruhan:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 20 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{Bmatrix}$$

BC pada titik 5 sehingga $u_5=0$, sehingga

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

maka,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 12 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{AE} \begin{Bmatrix} 1888/3465 \\ 239/693 \\ 20/99 \\ 1/11 \end{Bmatrix}$$

Karena $\Delta = u_1 - u_5$ sedangkan $u_5 = 0$ maka $\Delta = u_1$

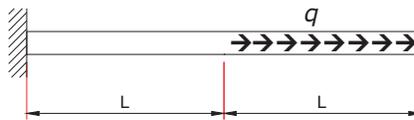
$$\Delta = \frac{1888}{3465} \frac{PL}{AE} \rightarrow \Delta = 0.544877 \frac{PL}{AE} \quad (99.19\% \text{ dari nilai eksak})$$

Error 0.81%

3. Soal latihan ketiga

Diketahui batang dengan bentuk penampang *uniform*, dengan beban aksial merata q seperti terlihat pada Gambar 3.16. Anggap bahwa properti elemen adalah AE . Hitunglah distribusi tegangan aksial yang terjadi pada batang, yaitu dengan cara:

- Menggunakan satu elemen dengan panjang $2L$.
- Menggunakan dua elemen dengan panjang masing-masing L .



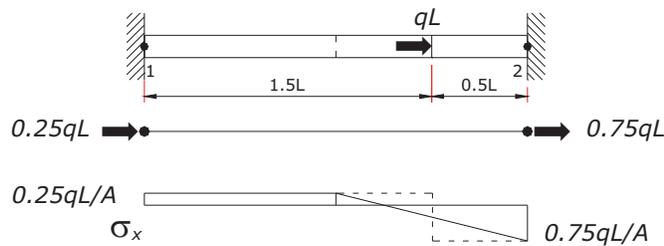
Gambar 3.16 Batang dengan beban merata q .

Penyelesaian:

- Memakai 1 elemen panjangnya $2L$



(a) Pemodelan Elemen



(b) Beban nodal dan stress fields

Matrik kekakuan dari struktur diatas sebelum diberi B.C adalah

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H + 0.25qL \\ 0.75qL \end{Bmatrix}$$

B.C diberikan pada titik 1 yaitu $u_1=0$

Maka matrik berubah menjadi

$$\frac{AE}{L} u_2 = 0.75qL$$

Sehingga $u_2 = 0.75 \frac{qL^2}{AE}$

Reaksi tumpuan dicari dengan memasukkan nilai u ke matrik kekakuan sebelum diberi B.C sbb:

$$\{H + 0.25qL\} = \frac{AE}{L} [1 \quad -1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.75 \frac{qL^2}{AE} \end{Bmatrix} = -0.75qL$$

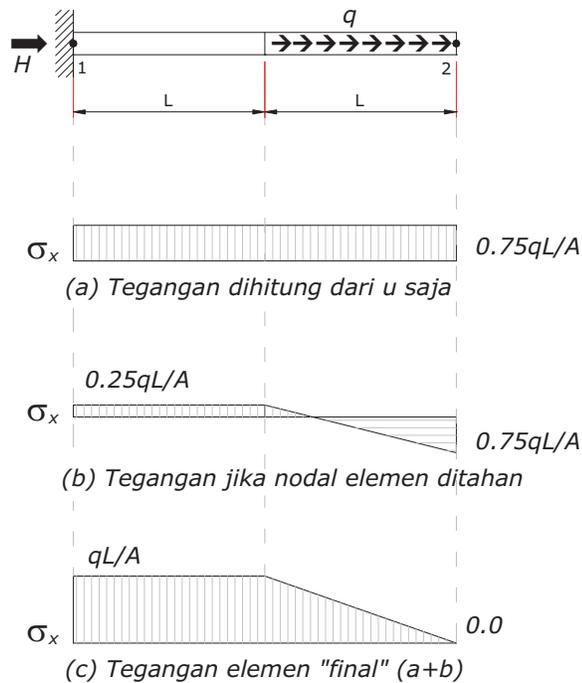
Maka $H = -0.75qL - 0.25qL = -qL$

Sedangkan tegangan-tegangan pada titik nodal dihitung sebagai berikut:

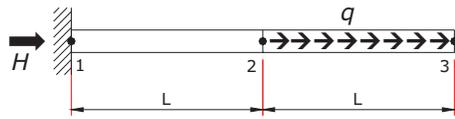
Akibat perpindahan u

$$\sigma_{1-2} = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(0.75 \frac{qL^2}{AE} - 0 \right) = 0.75 \frac{qL}{A}$$

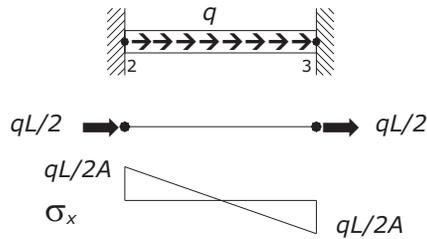
Maka distribusi tegangan elemen tersebut



b. Memakai 2 elemen, masing-masing panjangnya L



(a) Pemodelan Elemen



(b) Beban nodal dan stress fields

Matrik kekakuan dari struktur diatas sebelum diberi B.C adalah

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

B.C diberikan pada titik 1 yaitu $u_1=0$

Maka matrik berubah menjadi

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

Diselesaikan dengan cara invers

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} qL/2 \\ qL/2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{Bmatrix} qL \\ 1.5qL \end{Bmatrix}$$

Reaksi tumpuan dicari dengan memasukkan nilai u ke matrik kekakuan awal sbb:

$$\{H\} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ qL \\ 1.5qL \end{Bmatrix} = -qL$$

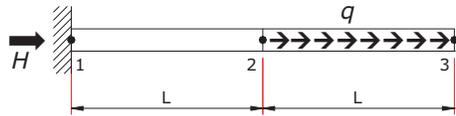
Sedangkan tegangan-tegangan pada titik nodal dihitung sebagai berikut:

Akibat perpindahan u

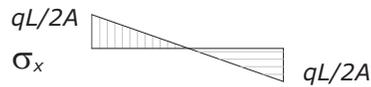
$$\sigma_{1-2} = E \frac{u_2 - u_1}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{qL^2}{AE} - 0 \right) = \frac{qL}{A}$$

$$\sigma_{2-3} = E \frac{u_3 - u_2}{L} = \frac{E}{L} \left(\frac{1.5qL^2 - qL^2}{AE} \right) = \frac{0.5qL}{A}$$

Maka distribusi tegangan pada ke dua elemen tersebut



(a) Tegangan dihitung dari u saja



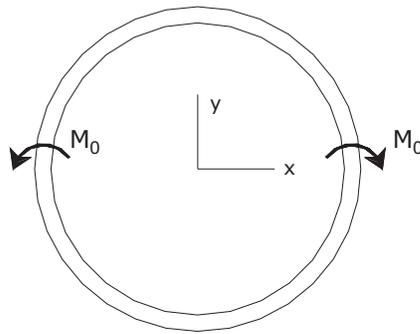
(b) Tegangan jika nodal elemen ditahan



(c) Tegangan elemen "final" (a+b)

4. Soal latihan keempat

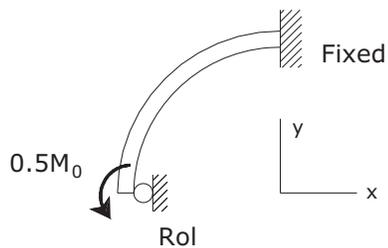
Diketahui suatu ring dengan beban berupa momen M_o seperti terlihat pada Gambar 3.17. Untuk menyelesaikan permasalahan ini, hanya diperlukan model simetri, yaitu model seperempat ring saja. Tentukanlah kondisi batas dan beban yang dibutuhkan, agar solusi dengan model seperempat ring hasilnya sama dengan model *full*-ring.



Gambar 3.17 Model Struktur Ring Penuh.

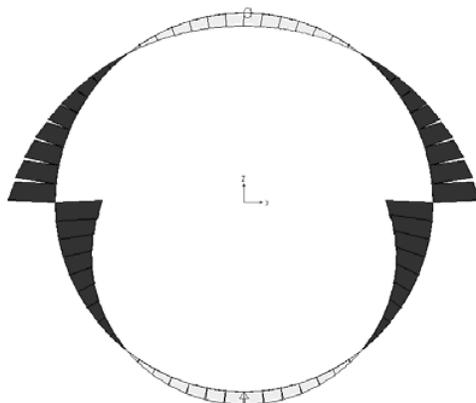
Penyelesaian:

Ring yang dibebani seperti diatas simetri baik dalam hal struktur maupun beban sehingga dapat dimodelkan hanya menggunakan $\frac{1}{4}$ bagian saja. Adapun B.C dari bagian tersebut dan juga pembebanannya harus dibuat sebagai berikut:

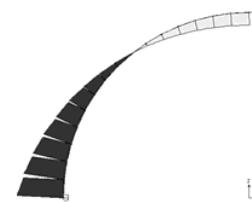


Model Struktur $\frac{1}{4}$ Ring

Untuk membuktikan, ditinjau rangka berbentuk ring penuh dan $\frac{1}{4}$ bagian ring, lalu diberikan momen nodal dengan perbandingan yang sama seperti pada gambar. Dari program SAP2000 dapat digambarkan Bending Moment Diagram,



BMD Struktur Ring Penuh



BMD Struktur $\frac{1}{4}$ Ring

3.9 Referensi

1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.

BAB 4

ELEMEN-ELEMEN DASAR

4.1 Preliminary

Hampir semua elemen yang dipelajari dalam bab ini adalah berbasis perpindahan. Bab ini mempelajari interpolasi dan elemen-elemen sederhana dalam lingkup berbasis perpindahan, serta bagaimana memformulasikan matrik kekakuan. Sebagian elemen dapat di-formulasikan dengan menggunakan metode kekakuan langsung (*direct stiffness method*), seperti yang telah diterapkan pada elemen batang dan elemen balok. Secara umum, formulasi elemen untuk mekanika struktur menggunakan dasar teori analisis tegangan yang ada, termasuk didalamnya hubungan tegangan-regangan, hubungan regangan-peralihan, dan prinsip energi [3]. Formula yang ditinjau dalam bab ini berbasis koordinat kartesian. Apabila diperlukan, maka formula untuk koordinat polar dan silindrikan dapat disusun pula.

Dalam bab ini akan dibahas prinsip kerja virtual untuk elemen batang (*bar*) dan elemen balok (*beam*) 1 dimensi.

4.1.1 Hubungan Tegangan dengan Regangan

Hubungan tegangan-regangan, dapat dijabarkan dalam persamaan sebagai berikut (catatan: asumsi material dalam kondisi elastik linier),

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad (4.1a)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \quad (4.1b)$$

$$\text{dimana: } \{\boldsymbol{\sigma}_0\} = - [\mathbf{E}] (\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) \quad (4.1c)$$

Persamaan 4.1 berlaku untuk model struktur satu dimensi, dua dimensi, dan tiga dimensi. Untuk lingkup tegangan uniaksial dimana tidak terdapat tegangan awal (*initial stress* sama dengan nol), maka persamaan tersebut menjadi lebih sederhana yaitu $\sigma = E.\varepsilon$, dimana E adalah modulus elastisitas. Untuk konteks koordinat bidang xy ,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \tau_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Matrik konstitutif $[\mathbf{E}]$ simetris, $E_{ij} = E_{ji}$. Untuk kondisi tegangan bidang (*plane stress*) dan material bersifat isotropik, maka,

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \quad (4.3)$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4a)$$

$$[\mathbf{E}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (4.4b)$$

dimana ν adalah rasio poisson dan G adalah modulus geser, yang mana dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.5)$$

Dalam bentuk umum, apabila diperhitungkan tegangan awal,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Regangan awal $\{\varepsilon_0\}$ dapat terjadi akibat, sebagai contoh perubahan suhu, perubahan kadar air, atau radiasi.

4.1.2 Hubungan regangan dengan peralihan

Hubungan antara regangan dengan peralihan dalam lingkup tinjauan struktur dua dimensi, dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.7a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.7b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.7c)$$

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (4.8a)$$

$$\varepsilon_y = u_{,y} \quad (4.8b)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (4.8c)$$

Dalam tinjauan struktur tiga dimensi, peralihan dalam koordinat x , y , dan z adalah sebagai berikut,

$$u = u(x,y,z) \quad (4.9a)$$

$$v = v(x,y,z) \quad (4.9b)$$

$$w = w(x,y,z) \quad (4.9c)$$

$$\varepsilon_z = w_{,z} \quad (4.10a)$$

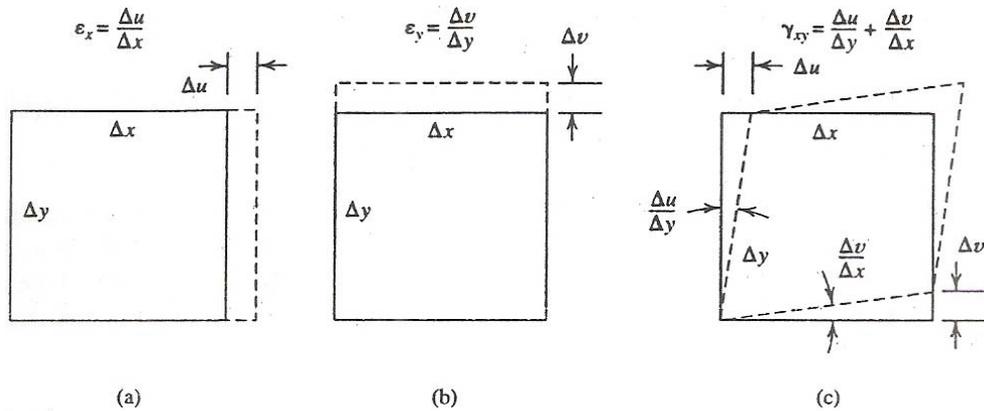
$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} \quad (4.10b)$$

$$\gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z} \quad (4.10c)$$

Dalam format matrik dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.11a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.11b)$$



Gambar 4.1 Suatu bidang segiempat yang sangat kecil [3].

4.1.3 Kompatibilitas

Ketika suatu struktur benda mengalami deformasi yang kontinu (tidak patah), tidak terjadi retak, lentur yang terjadi tidak berlebihan, dan partikel material tidak saling *overlap*. Persamaan kompatibilitas memerlukan kondisi yaitu deformasi yang terjadi kontinu dan mempunyai nilai tunggal pada setiap posisinya. Pada lingkup permasalahan struktur berbentuk bidang, persamaan kompatibilitas sebagai berikut,

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (4.12)$$

Dari persamaan tersebut, dapat dilihat bahwa regangan harus selalu ada agar kondisi kompatibilitas terpenuhi.

4.1.4 Persamaan Keseimbangan

Gambar 4.2 memperlihatkan tegangan-tegangan yang terjadi pada suatu elemen diferensial (permasalahan bidang dua dimensi). Dalam konteks koordinat kartesian, untuk suatu bidang dengan ketebalan t maka persamaan keseimbangan gaya-gayanya adalah sebagai berikut,

$$-\sigma_x t dy - \tau_{xy} t dx + (\sigma_x + \sigma_{x,x} dx) t dy + (\tau_{xy} + \tau_{xy,y} dy) t dx + F_x t dx dy = 0 \quad (4.13)$$

Selanjutnya, persamaan untuk benda *solid* dua dimensi, persamaan menjadi sebagai berikut,

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + F_x = 0 \quad (4.14a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + F_y = 0 \quad (4.14b)$$

Selanjutnya, persamaan untuk benda *solid* tiga dimensi, persamaan menjadi sebagai berikut,

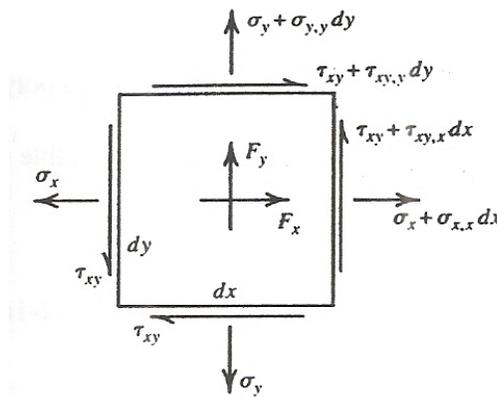
$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + F_x = 0 \quad (4.15a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} + F_y = 0 \quad (4.15b)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} + F_z = 0 \quad (4.15b)$$

Dalam bentuk umum (dua dimensi maupun tiga dimensi) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$[\partial]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\mathbf{F}\} = \{0\} \quad (4.16)$$



Gambar 4.2 Elemen diferensial dengan ketebalan t [3].

4.1.5 Kondisi Batas

Kondisi batas telah dibahas baik pada bab sebelumnya, maupun dari matakuliah-matakuliah sebelumnya seperti Statika, Analisis Struktur, maupun Analisis Struktur Metode Matrik.

4.1.6 Solusi Pendekatan dan Solusi Eksak

Solusi eksak harus memenuhi persamaan kompatibilitas, persamaan keseimbangan, dan kondisi batas. Solusi eksak dapat diperoleh apabila diketahui data-data berupa kondisi tumpuan-tumpuan yang digunakan, pembebanan yang bekerja, dan kondisi geometri struktur.

4.2 Interpolasi dan Bentuk Fungsi

Dalam konteks d.o.f umum a_i , interpolasi polinomial dengan variabel tidak bebas ϕ dan variabel bebas x dapat ditulis sebagai berikut,

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{atau} \quad \phi = [\mathbf{X}][\mathbf{a}] \quad (4.17)$$

dimana,

$$[\mathbf{X}] = [1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \quad x^n] \quad (4.18a)$$

$$[\mathbf{a}] = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^T \quad (4.18b)$$

dimana $n = 1$ untuk interpolasi linier, dan $n = 2$ untuk interpolasi kuadratik, dan seterusnya. Hubungan Persamaan 4.17 dengan Persamaan 4.18 dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$[\phi_e] = [\mathbf{A}][\mathbf{a}] \quad (4.19a)$$

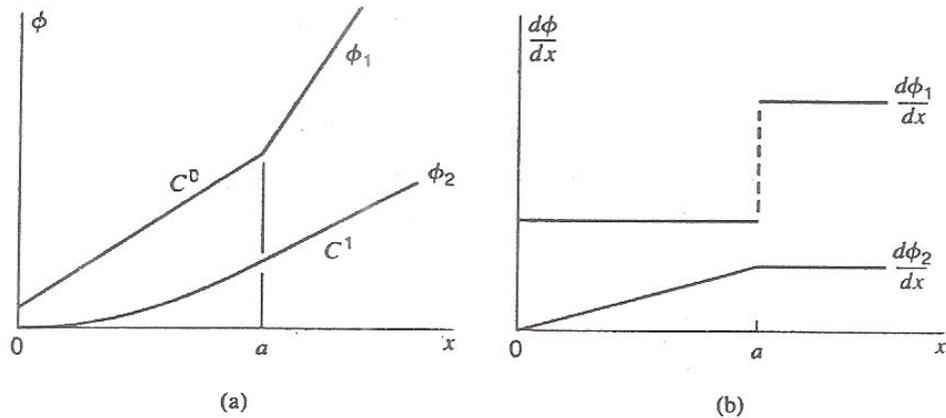
$$\phi = [\mathbf{N}][\phi_e] \quad (4.19b)$$

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{X}][\mathbf{A}]^{-1} = [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \quad (4.19c)$$

Nilai individu dari N_i pada matrik $[\mathbf{N}]$ disebut bentuk fungsi (*shape function*).

4.2.1 Derajat Kontinuitas

Symbol C^m adalah digunakan untuk mendeskripsikan kondisi kontinuitas. Kondisi C^m akan kontinu jika derivatif tergantung dan termasuk didalamnya derajat m adalah kontinu antar-elemen.



Gambar 4.3 Fungsi ϕ_1 maka C^0 kontinu dan ϕ_2 maka C^1 kontinu [3].

Pada kondisi struktur satu dimensi, $\Phi = \Phi(x)$ maka C^0 kontinu jika Φ kontinu tetapi $\Phi_{,x}$ tidak, dan $\Phi = \Phi(x)$ maka C^1 kontinu jika Φ dan $\Phi_{,x}$ kontinu tetapi $\Phi_{,xx}$ tidak. Ilustrasi kedua kasus tersebut selengkapnya dijelaskan melalui Gambar 4.3, dimana $x = a$ menunjukkan batas antar-elemen. Terminology C^m ini dapat diaplikasikan pada berbagai tipe elemen.

4.2.2 Interpolasi C^0

Interpolasi linier antara titik-titik (x_1, Φ_1) dan (x_2, Φ_2) , dimana $[X] = [1 \ x]$ adalah telah dijelaskan pada Persamaan 4.18a. maka diperoleh,

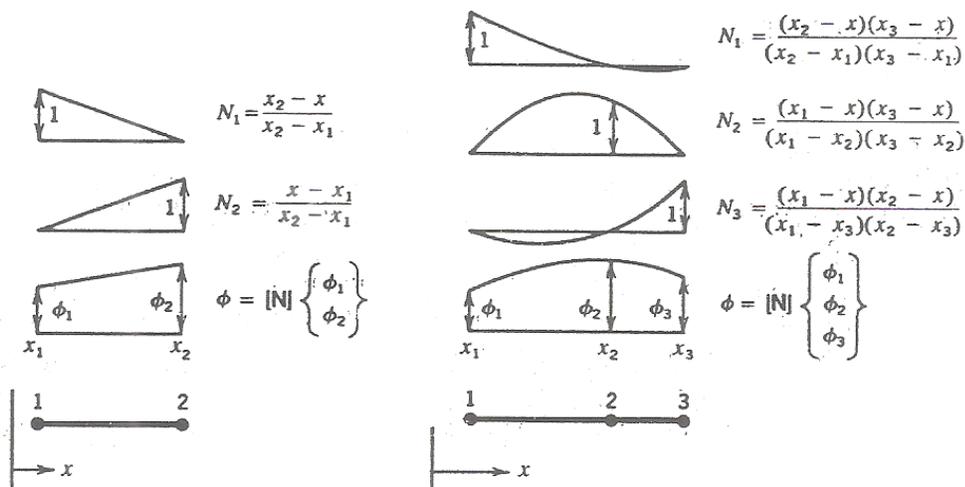
$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dengan meng-invers matrik $[A]$ maka diperoleh,

$$[A]^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21a)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{bmatrix} \quad (4.21b)$$

Dua bentuk fungsi linier N_1 dan N_2 dijelaskan secara detail pada Gambar 4.4. Ini adalah contoh interpolasi paling sederhana dalam analisis elemen hingga. Properti formulasi dari elemen dua titik nodal dengan panjang L , digunakan $x_1 = 0, x_2 = L$, dan d.o.f titik nodal Φ_1 dan Φ_2 .



(a). Interpolasi linier.

(b). Interpolasi kuadratik.

Gambar 4.4 Interpolasi linier dan interpolasi kuadratik [3].

Interpolasi kuadratik berbentuk parabola dari titik-titik (x_1, Φ_1) , (x_2, Φ_2) , dan (x_3, Φ_3) . Jarak antar titik tersebut tidak harus sama. Apabila $[X] = [1 \ x \ x^2]$, maka Persamaan 4.19a menjadi sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } [A] = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Gambar 4.4 dapat dianggap sebagai contoh tertentu dari formula interpolasi *Lagrange*,

$$N_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x) \dots (x_n - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)} \quad (4.23a)$$

$$N_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2)} \quad (4.23b)$$

dalam bentuk umum,

$$N_k = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x) \dots (x_k - x) \dots (x_n - x)}{(x_1 - x_k)(x_3 - x_k) \dots (x_k - x_k) \dots (x_n - x_k)} \quad (4.23c)$$

Pembahasan lebih lanjut materi ini dapat dibaca pada buku *Concepts and Applications of Finite Element Analysis* [3].

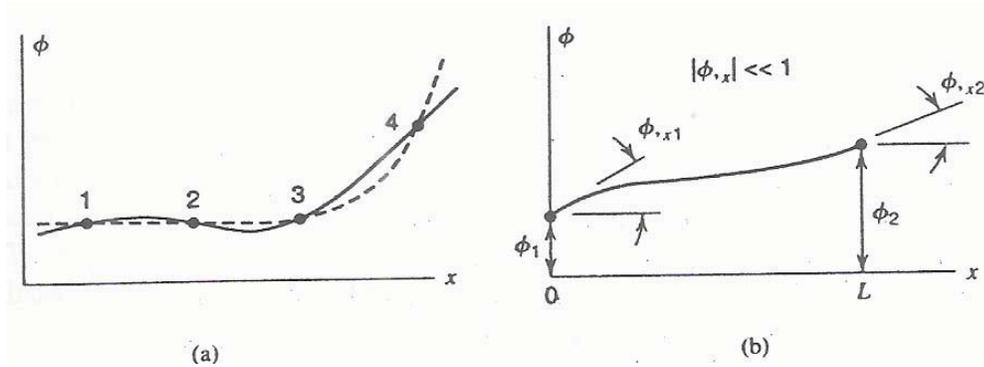
4.2.3 Interpolasi C^1

Untuk kurva kubik $\Phi = \Phi(x)$ bentuknya ditentukan oleh empat item data. Sebagai contoh diambil item dengan ordinat Φ_i dan potongan kecil $(d\Phi/dx)_i$ pada masing-masing ujung suatu garis dengan panjang L (Gambar 4.5).

$$[X] = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \quad (4.24a)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_{,x1} \\ \phi_2 \\ \phi_{,x2} \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad \text{dimana } [A] = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{Bmatrix} \quad (4.24b)$$

Empat bentuk fungsi yang diperoleh dari Persamaan 4.19b menghasilkan empat bentuk fungsi dan persamaan seperti terlihat pada Gambar 4.5 sebagai berikut,



Gambar 4.5 Bentuk fungsi kurva kubik [3].

4.3 Persamaan untuk Matrik Elemen

Prinsip dari kerja virtual, atau disebut pula peralihan virtual, dapat dituliskan dari persamaan sebagai berikut,

$$\int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\mathbf{F}\} dV + \int \{\delta \mathbf{u}\}^T \{\Phi\} dS \quad (4.25)$$

$\{\delta \varepsilon\}$ adalah vektor regangan yang diperoleh dari Persamaan 4.11 dan peralihan virtual $\{\delta \mathbf{u}\}$ dimana $\{\delta \mathbf{u}\} = [\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T$. Simbol δ artinya sama dengan d untuk diferensial, tetapi simbol δ digunakan untuk konteks ketika peralihan adalah virtual.

Apabila peralihan $\{\mathbf{u}\}$ diinterpolasikan seperti halnya Persamaan 4.19, maka,

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dimana } \{\mathbf{u}\} = [u \quad v \quad w]^T \quad (4.26)$$

dan $\{\mathbf{d}\}$ berisi derajat kebebasan (d.o.f) peralihan titik nodal dari elemen. Selanjutnya regangan dihitung dari peralihan yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [\partial] \{\mathbf{u}\} \\ \{\varepsilon\} &= [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \quad \text{dimana } [\mathbf{B}] = [\partial] [\mathbf{N}] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Matrik $[\mathbf{B}]$ disebut matrik peralihan-regangan.

$$\{\delta \mathbf{u}\} = \{\delta \mathbf{d}\}^T [\mathbf{N}]^T \quad (4.28a)$$

$$\{\delta \varepsilon\} = \{\delta \mathbf{d}\}^T [\mathbf{B}]^T \quad (4.28b)$$

Persamaan umum hubungan tegangan-regangan, dengan memasukkan remangan inisial dan regangan inisial dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \{\delta \mathbf{d}\}^T & \left(\int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \{\mathbf{d}\} - \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_o\} dV + \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_o\} dV \right. \\ & \left. - \int [\mathbf{N}]^T [\mathbf{F}] dV + \int [\mathbf{N}]^T \{\Phi\} dS \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vektor $\{\delta \mathbf{d}\}$ dan $\{\mathbf{d}\}$ tidak muncul dalam persamaan integral tersebut dikarenakan kedua vektor tersebut bukan merupakan fungsi dari koordinat. Maka,

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}_e\} \quad (4.30)$$

dimana matrik kekakuan elemen adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] dV \quad (4.31)$$

Apabila vektor beban diaplikasikan pada titik nodal struktur oleh elemen, maka,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{r}_e\} & = \int [\mathbf{N}]^T [\mathbf{F}] dV + \int [\mathbf{N}]^T [\Phi] dS + \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}_o\} dV \\ & + \int [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}_o\} dV \end{aligned} \quad (4.32)$$

Persamaan 4.32 menunjukkan beban nodal konsisten [3].

4.3.1 Elemen Batang

Untuk elemen batang (ilustrasi selengkapnya ditampilkan pada Gambar 4.6), apabila di-set nilai $x_1 = 0$ dan $x_2 = L$. Peralihan aksial adalah merupakan interpolasi linier dari titik nodal derajat kebebasan u_1 sampai dengan u_2 . Persamaan bentuk fungsi dan matrik hubungan peralihan-regangan adalah sebagai berikut,

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33a)$$

$$[\mathbf{B}] = \frac{d}{dx} [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.33b)$$

Dimana nilai E dan A merupakan konstanta, maka Persamaan 4.31 menghasilkan persamaan matrik kekakuan elemen, yaitu sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] A dx = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

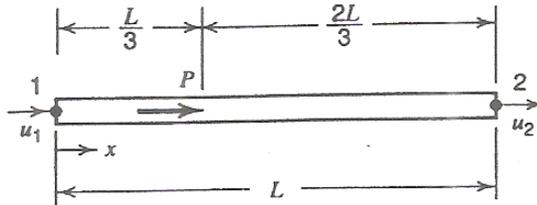
Selanjutnya, Persamaan 4.32 apabila ditulis dalam bentuk lain, dimana $\{\Phi\} dS$ menjadi gaya P dan $[\mathbf{N}]$ dievaluasi pada titik $x = L/3$, kemudian terdapat

tegangan inisial σ_0 akibat adanya perubahan temperatur (perubahannya seragam) T , sebagai berikut,

$$\{r_s\} = [N_{L/3}]^T P - \int_0^L [B]^T (-E\alpha T) A dx = \begin{Bmatrix} 2P/3 \\ P/3 \end{Bmatrix} + EA\alpha T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

dimana tegangan inisial adalah sebagai berikut,

$$\sigma_o = -E.\varepsilon_o = -E\left(\frac{\Delta L}{L}\right) \quad (4.36)$$



Gambar 4.6 Elemen batang dengan beban terpusat [3].

4.3.2 Elemen Balok

Contoh lain yang sederhana mengenai elemen balok tanpa deformasi geser (deformasi geser diabaikan) adalah dijabarkan dalam persamaan-persamaan sebagai berikut,

$$M = EI_x \kappa \quad (4.37a)$$

$$\kappa = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4.37b)$$

$$v = [N] \{d\} \quad (4.37c)$$

$$\kappa = [B] \{d\} \quad (4.37d)$$

dimana $v = v(x)$ adalah peralihan arah lateral dan derajat kebebasan titik nodal adalah sebagai berikut,

$$\{d\} = [v_1 \quad \theta_{z1} \quad v_2 \quad \theta_{z2}]^T \quad (4.38)$$

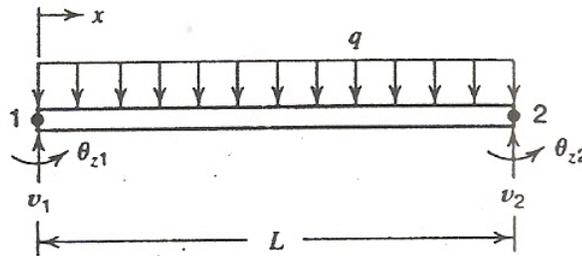
Maka persamaan bentuk fungsi $[B]$ menjadi sebagai berikut,

$$[B] = \frac{d^2}{dx^2} [N] = \left[\frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{-4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{-2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] \quad (4.39a)$$

Dengan nilai E dan I_z adalah konstanta, maka selanjutnya persamaan matrik kekakuan elemen dapat ditulis dalam persamaan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T EI_z [\mathbf{B}] dx = \frac{EI_x}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.39b)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan beban-beban pada titik nodal akibat beban merata (ilustrasi selengkapnya ditampilkan pada Gambar 4.7, digunakan integrasi kedua dari Persamaan 4.32, dimana $\{\Phi\}dS$ adalah beban merata q dan $dS = dx$, kemudian tegangan inisial $\{\sigma_0\}$ ditulis sebagai m_0 dan dV ditulis sebagai dx . Dalam studi kasus ini balok mempunyai bentuk potongan penampang dengan tinggi $2c$, temperatur bervariasi secara linier dari $-T$ di permukaan atas balok sampai dengan T di permukaan bawah balok.



Gambar 4.7 Elemen balok (*beam*) dengan beban merata [3].

Persamaan yang dihasilkan adalah sebagai berikut,

$$m_0 = -EI_z \kappa_0 \quad (4.40a)$$

$$\kappa_0 = \frac{\alpha T}{c} \quad (4.40b)$$

$$\{\mathbf{r}_s\} = \frac{EI_x \alpha T}{c} [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T \quad (4.40c)$$

4.4 Referensi

1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.

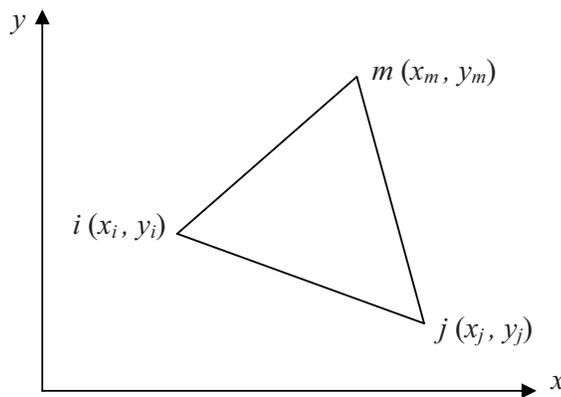
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
5. Kuntjoro, W. (2005). "An Introduction to The Finite Element Method", MacGraw-Hill Education Asia.
6. Logan D.L. (2002). "A First Course in the Finite Element Method", Brooks/Cole, Thompson Learning, USA.

BAB 5

ELEMEN CST DAN Q4

5.1 Elemen Segitiga Linier (CST)

Elemen segitiga linier adalah elemen bidang dengan tiga titik nodal, dimana besarnya bervariasi secara linier pada koordinat kartesian sumbu x dan y . dalam analisis tegangan, lingkup peralihan linier yang dihasilkan berada pada lingkup regangan konstan, sehingga elemen ini disebut pula elemen CST atau *constant-strain-triangle*. Sebagai ilustrasi dapat dilihat Gambar 5.1.



Gambar 5.1 Elemen segitiga linier tiga titik nodal.

5.1.1 Pengantar Mengenai Tegangan Bidang dan Regangan Bidang

Sebelum mempelajari elemen segitiga tiga titik nodal (CST), terlebih dahulu akan dibahas ulang mengenai definisi tegangan bidang dan regangan bidang. Hubungan antara regangan dengan peralihan untuk pelat adalah sebagai berikut,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (5.1)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (5.2)$$

dimana hubungan tegangan dengan regangan dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (5.3)$$

dimana komponen-komponen tegangan adalah sebagai berikut,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

Selanjutnya matrik $[E]$ dapat dihitung dengan menggunakan Persamaan 5.5 untuk lingkup tegangan bidang (*plane stress*) dan Persamaan 5.6 untuk lingkup regangan bidang (*plane strain*).

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Persamaan 5.3 dapat ditulis pula dalam bentuk persamaan sebagai berikut,

$$\{\sigma\} = [E][B]\{d\} \quad (5.7)$$

5.1.2 Persamaan Umum Elemen Segitiga Linier (CST)

Persamaan umum matrik peralihan untuk elemen segitiga linier tiga titik nodal (CST) adalah sebagai berikut,

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

dimana fungsi peralihan dapat didefinisikan sebagai peralihan linier sebagai berikut,

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (5.9a)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad (5.9b)$$

Dalam bentuk fungsi peralihan umum $\{\psi\}$, Persamaan 5.9a dan Persamaan 5.9b dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Untuk mendapatkan nilai a_1 sampai dengan a_6 maka, mula-mula koordinat-koordinat titik nodal disubstitusikan kedalam persamaan menjadi,

$$u_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \quad (5.11a)$$

$$u_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \quad (5.11b)$$

$$u_m = a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \quad (5.11c)$$

$$v_i = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i \quad (5.11d)$$

$$v_j = a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j \quad (5.11e)$$

$$v_m = a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m \quad (5.11f)$$

dimana $u_i = u(x_i, y_i)$ dan $u_j = u(x_j, y_j)$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

dimana,

$$\{a\} = [x]^{-1} \{u\} \quad (5.13)$$

$$[x]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

dimana,

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (5.15a)$$

$$2A = x_i(y_i - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \quad (5.15b)$$

Kenyataannya, A adalah luas segitiga,

$$a_i = x_j y_m - y_j x_m \quad (5.16a)$$

$$a_j = x_m y_i - y_m x_i \quad (5.16b)$$

$$a_m = x_i y_j - y_i x_j \quad (5.16c)$$

$$\beta_i = y_j - y_m \quad (5.16d)$$

$$\beta_j = y_m - y_i \quad (5.16e)$$

$$\beta_m = y_i - y_j \quad (5.16f)$$

$$\gamma_i = x_m - x_j \quad (5.16g)$$

$$\gamma_j = x_i - x_m \quad (5.16h)$$

$$\gamma_m = x_j - x_i \quad (5.16i)$$

Dengan $[x]^{-1}$ diketahui, maka Persamaan 5.13 dapat ditulis menjadi sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Dengan cara yang sama, untuk $a_4, a_5,$ dan a_6 dapat dihitung sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan fungsi peralihan x secara umum, maka,

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Substitusikan Persamaan 5.17 kedalam Persamaan 5.19, maka diperoleh,

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) u_i + \right. \\ \left. (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) u_m \right\} \quad (5.21a)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) v_i + \right. \\ \left. (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) v_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) v_m \right\} \quad (5.21b)$$

dimana,

$$N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad (5.22a)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \quad (5.22b)$$

$$N_m = \frac{1}{2A} (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \quad (5.22c)$$

Persamaan 5.21 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$u(x, y) = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (5.23a)$$

$$v(x, y) = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \quad (5.23b)$$

Dalam bentuk matrik, Persamaan 5.23 dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{Bmatrix} \quad (5.24a)$$

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.24b)$$

Maka,

$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (5.25)$$

dimana,

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Matrik $[N]$ adalah matrik bentuk fungsi dari elemen segitiga regangan konstan. Konsep ini sama dengan konsep yang digunakan pada elemen satu dimensi.

5.1.3 Hubungan Regangan-Peralihan dan Tegangan-Regangan

Tahap selanjutnya adalah mendefinisikan hubungan regangan-peralihan. Dimulai dari persamaan regangan untuk elemen dua dimensi sebagai berikut,

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Untuk peralihan arah sumbu-x, maka diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m) \quad (5.28a)$$

$$u_{,x} = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + N_{m,x} u_m \quad (5.28b)$$

Fungsi bentuk sebagai berikut,

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \quad (5.29a)$$

$$N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \quad (5.29b)$$

$$N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A} \quad (5.29c)$$

dari substitusi Persamaan 5.29b dan Persamaan 5.29c terhadap Persamaan 5.28b maka diperoleh,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m) \quad (5.30a)$$

dengan cara yang sama, dapat dihitung pula,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} (\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m) \quad (5.30b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\gamma_i u_i + \gamma_j u_j + \gamma_m u_m + \beta_i v_i + \beta_j v_j + \beta_m v_m) \quad (5.30c)$$

Kemudian dari substitusi Persamaan 5.30a, Persamaan 5.30b, dan Persamaan 5.30c terhadap Persamaan 5.27 maka diperoleh,

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (5.31a)$$

$$\{\varepsilon\} = [B_i \quad B_j \quad B_m] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} \quad (5.31b)$$

dimana,

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad (5.32a)$$

$$[B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad (5.32b)$$

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (5.32c)$$

Dalam bentuk umum dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (5.33)$$

dimana,

$$[B] = [B_i \quad B_j \quad B_m] \quad (5.34)$$

Nilai-nilai regangan pada Persamaan 5.33 adalah konstan, sehingga elemen ini disebut elemen segitiga linier regangan konstan.

Selanjutnya dari persamaan hubungan regangan-peralihan tersebut, dapat dikembangkan lagi menjadi persamaan hubungan teganga-regangan yaitu,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

Dimana matrik $[E]$ telah didefinisikan sebelumnya pada Persamaan 5.5 untuk *plane stress* dan Persamaan 5.6 untuk *plane strain*.

$$\{\sigma\} = [E][B]\{d\} \quad (5.36)$$

5.1.4 Matrik Kekakuan Elemen dan Persamaan Elemen

Matrik kekakuan elemen dan persamaan elemen diturunkan dengan menggunakan prinsip energi potensial minimum. Energi potensial total dari elemen merupakan fungsi dari peralihan-peralihan titik nodal $u_i, v_i, u_j, \dots, v_m$ yaitu,

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (5.37)$$

Energi potensial total adalah sebagai berikut,

$$\pi_p = U + W_b + W_p + W_s \quad (5.38)$$

Energi regangan U adalah sebagai berikut,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.39a)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_v \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (5.39b)$$

Maka energi potensial dari gaya bodi adalah sebagai berikut,

$$W_b = - \iiint_v \{\psi\}^T \{X\} dV \quad (5.40)$$

dimana $\{\psi\}$ adalah fungsi peralihan umum dan $\{X\}$ adalah gaya bodi per unit volume.

Energi potensial untuk beban-beban terpusat atau beban pada titik nodal adalah sebagai berikut,

$$W_p = - \{d\}^T \{P\} \quad (5.41)$$

dimana $\{d\}$ adalah peralihan-peralihan titik nodal dan $\{P\}$ adalah beban-beban terpusat pada titik nodal.

Energi potensial untuk beban-beban merata atau traksi permukaan adalah sebagai berikut,

$$W_s = - \iint_s \{\psi\}^T \{T\} dS \quad (5.42)$$

dimana $\{T\}$ adalah traksi permukaan dan S adalah permukaan.

Selanjutnya dengan men-substitusikan Persamaan 5.25 dan Persamaan 5.33 kedalam Persamaan 5.39 sampai dengan Persamaan 5.42, dapat diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \iiint_v \{d\}^T [B]^T [D] [B] \{d\} dV - \iiint_v \{d\}^T [N]^T \{X\} dV \\ & - \iint_s \{d\}^T [N]^T \{T\} dS \end{aligned} \quad (5.43)$$

dengan memasukkan matrik peralihan $\{d\}$ kedalam Persamaan 5.43 maka diperoleh,

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \{d\}^T \iiint_v [B]^T [D] [B] \{d\} dV - \{d\}^T \iiint_v [N]^T \{X\} dV \\ & - \{d\}^T \{P\} - \{d\}^T \iint_s [N]^T \{T\} dS \end{aligned} \quad (5.44)$$

Beban total $\{f\}$ pada elemen adalah,

$$\{f\} = \iiint_v [N]^T \{X\} dV + \{P\} + \iint_s [N]^T \{T\} dS \quad (5.45)$$

Jika hanya beban terpusat saja yang bekerja, maka,

$$\{f\} = \{P\} \quad (5.46)$$

Energi potensial total dapat ditulis sebagai berikut,

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{d\}^T \iiint_v [B]^T [D][B] \{d\} dV \{d\} - \{d\}^T \{f\} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{d\}} = \left[\iiint_v [B]^T [D][B] dV \right] \{d\} - \{f\} = 0 \quad (5.48)$$

Persamaan 5.48 dapat ditulis menjadi sebagai berikut,

$$\left[\iiint_v [B]^T [D][B] dV \right] \{d\} = \{f\} \quad (5.49)$$

Seperti diketahui bahwa (dalam diktat kuliah ini, notasi f disebut atau ditulis pula dalam notasi r),

$$[k] \{d\} = \{f\} \quad (5.50)$$

$$[k] = \iiint_v [B]^T [D][B] dV \quad (5.51)$$

Untuk elemen dengan ketebalan konstan sebesar t , maka Persamaan 5.51 dapat ditulis menjadi sebagai berikut,

$$[k] = t \iint_A [B]^T [D][B] dx dy \quad (5.52)$$

$$[k] = tA [B]^T [D][B] \quad (5.53)$$

Selanjutnya persamaan umum elemen dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

5.2 Elemen Segiempat Bilinier (Q4)

Elemen segiempat bilinier adalah elemen bidang dengan 4 (empat) titik nodal, dan mempunyai 8 (delapan) derajat kebebasan. Persamaan umum yang digunakan adalah sebagai berikut,

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (5.55a)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (5.55b)$$

$$s_x = a_2 + a_4y \quad (5.55c)$$

$$s_y = a_7 + a_8x \quad (5.55d)$$

$$\gamma_{xy} = (a_4 + a_8) + a_4x + a_8y \quad (5.55e)$$

Dalam elemen segiempat bilinier ini digunakan formula interpolasi *lagrange*. Dimana pada arah sumbu x disebut peralihan u , maka dapat dihitung sebagai berikut,

$$u_{12} = \frac{a-x}{2a}u_1 + \frac{a+x}{2a}u_2 \quad (5.56a)$$

$$u_{43} = \frac{a-x}{2a}u_4 + \frac{a+x}{2a}u_3 \quad (5.56b)$$

Selanjutnya diinterpolasikan secara linier pada sumbu y ,

$$u = \frac{b-y}{2b}u_{12} + \frac{b+y}{2b}u_{43} \quad (5.57)$$

Dengan prinsip substitusi Persamaan 5.56a, Persamaan 5.56b, dan Persamaan 5.57 selanjutnya dapat diperoleh bentuk fungsi (*shape function*) untuk elemen segiempat bilinier empat titik nodal (Q4) sebagai berikut,

$$u = \sum N_i u_i \quad (5.58)$$

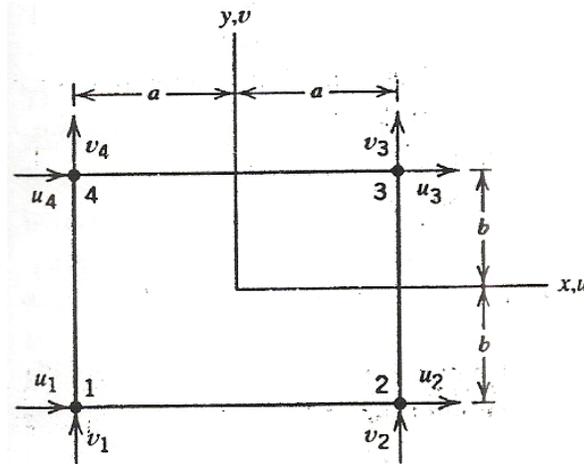
dimana,

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \quad (5.59a)$$

$$N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \quad (5.59b)$$

$$N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \quad (5.59c)$$

$$N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \quad (5.59d)$$



Gambar 5.2 Elemen segiempat bilinear empat titik nodal (Q4) dengan 8 (delapan) derajat kebebasan [1].

Elemen ini disebut bilinear karena bentuk fungsi merupakan produk dari polinomial linier satu dimensi. N_i memuat hanya satu kuadratik, yaitu xy . Bentuk lengkap persamaan peralihan elemen dinyatakan dalam persamaan berikut,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Regangan-regangan elemen dapat dihitung dengan persamaan sebagai berikut,

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \quad (5.61)$$

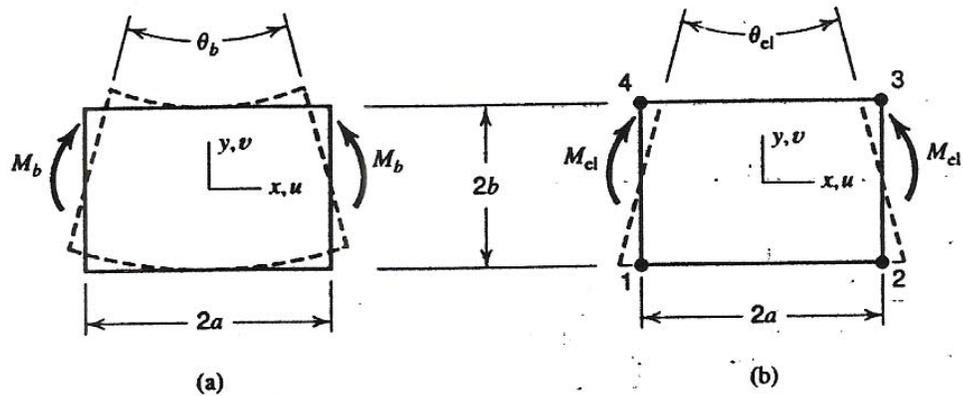
Selanjutnya matrik $[\mathbf{B}]$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} -(b-y) & 0 & (b-y) & 0 & (b+y) & 0 & -(b+y) & 0 \\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & (a+x) & 0 & (a-x) \\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & (b-y) & (a+x) & (b+y) & (a-x) & -(b+y) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

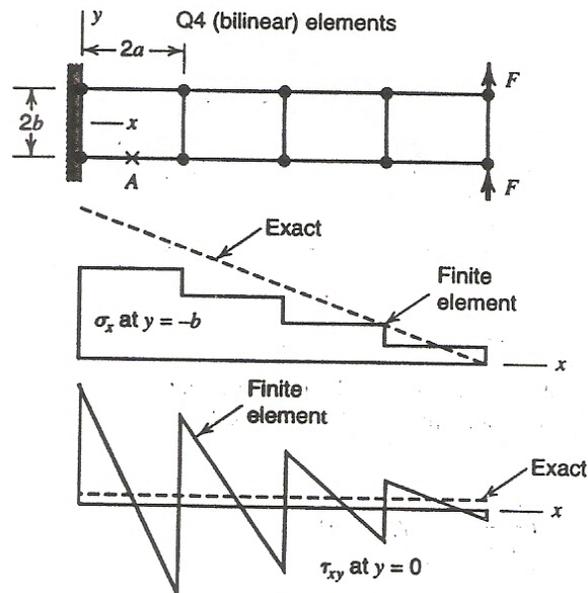
Selanjutnya matrik kekakuan elemen segiempat bilinear (Q4) dapat ditulis sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}]_{8 \times 8} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] t \, dx \, dy \quad (5.63)$$

dimana t adalah tebal elemen. Persamaan-persamaan yang telah dibahas tersebut berlaku khusus apabila bentuk elemen adalah persegi (*rectangular*).



Gambar 5.3 Ragam deformasi elemen segiempat bilinear Q4 [1].



Gambar 5.4 Kantilever yang dimodelkan dengan elemen Q4 [1].

5.1.1 Persamaan Umum Elemen Segiempat Q4

Untuk elemen dengan bentuk segiempat sembarang, maka persamaan umumnya dijabarkan sebagai berikut,

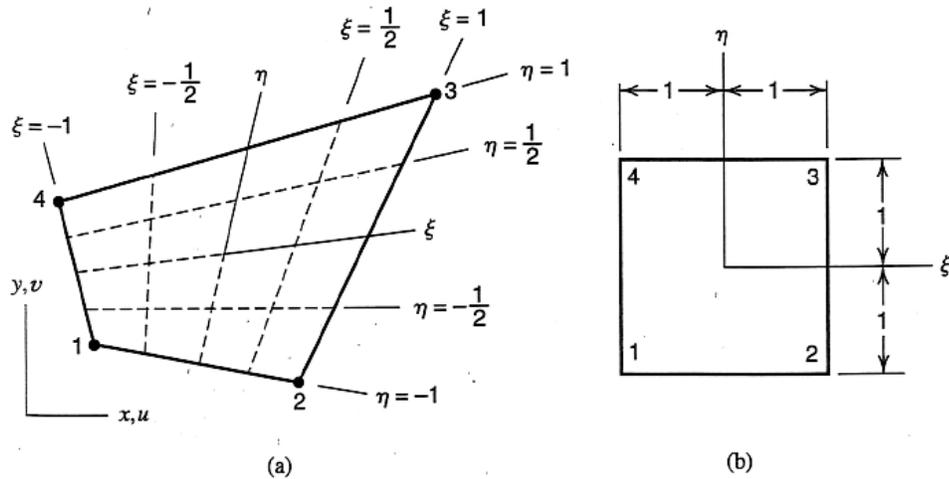
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i x_i \\ \sum N_i y_i \end{Bmatrix} = [N] \{c\} \quad (5.64a)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum N_i u_i \\ \sum N_i v_i \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \quad (5.64b)$$

$$\{c\} = [x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4]^T \quad (5.64c)$$

$$\{d\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T \quad (5.64d)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.64e)$$



Gambar 5.5 Elemen segiempat empat titik nodal Q4 pada bidang ξ - η [1].

dimana,

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (5.65a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (5.65b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (5.65c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (5.65d)$$

Matrik jacobian atau $[J]$ diperoleh dari proses transformasi [1], selanjutnya didapat sebagai berikut,

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} x_i & \sum N_{i,\xi} y_i \\ \sum N_{i,\eta} x_i & \sum N_{i,\eta} y_i \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Maka Persamaan 5.24 menjadi sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (5.67a)$$

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (4.107b)$$

Determinan matrik $[\mathbf{J}]$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$|[\mathbf{J}]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \quad (5.68)$$

Matrik $[\mathbf{\Gamma}]$ selanjutnya dihitung sebagai invers dari matrik $[\mathbf{J}]$,

$$[\mathbf{\Gamma}] = [\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Regangan dihitung menggunakan Persamaan 5.28 sebagai berikut,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\} \quad (5.70)$$

atau dapat dihitung sebagai berikut,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (5.71a)$$

dimana,

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} \quad (5.71b)$$

dimana,

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \{\mathbf{d}\} \quad (5.71c)$$

Maka Persamaan 5.29a dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (5.72)$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \{\mathbf{d}\}$$

Maka matrik $[\mathbf{B}]$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (5.73)$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

dimana,

$$N_{1,\xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \quad (5.74a)$$

$$N_{2,\xi} = \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \quad (5.74b)$$

$$N_{3,\xi} = \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta) \quad (5.74c)$$

$$N_{4,\xi} = \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \quad (5.74d)$$

$$N_{1,\eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \quad (5.74e)$$

$$N_{2,\eta} = \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \quad (5.74f)$$

$$N_{3,\eta} = \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (5.74g)$$

$$N_{4,\eta} = \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (5.74h)$$

Tegangan dapat dihitung sebagai berikut,

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{E}][\mathbf{B}]\{\mathbf{d}\} \quad (5.75)$$

dimana untuk kondisi tegangan bidang atau *plane stress*, matrik $[\mathbf{E}]$ dihitung menggunakan Persamaan 4.4a.

Koordinat titik-titik $\xi = \eta = \pm 1$ disebut pula koordinat-koordinat alamiah atau *natural coordinates*. Metode ini digunakan untuk menentukan besarnya regangan dan tegangan pada titik-titik nodal yang berada dalam elemen tersebut.

5.1.2 Matrik Kekakuan Elemen

Sedangkan matrik kekakuan elemen atau $[\mathbf{k}]$ dapat dihitung sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\} \quad (5.76a)$$

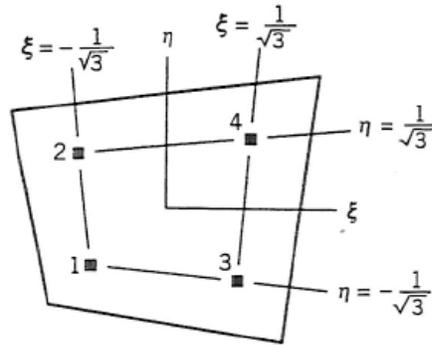
$$[\mathbf{k}] = \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}] t dA \quad (5.77b)$$

Tidak mudah untuk meng-integralkan $[\mathbf{k}]$ menggunakan sistem koordinat global, karena secara umum elemen akan mengalami distorsi dan tidak sebaris lagi dengan sumbu global, sehingga sebagai gantinya dimensi matrik untuk elemen Q4, yaitu dengan meng-integralkan master elemen, sehingga pada elemen tersebut tidak terjadi distorsi dan sebaris terhadap system koordinat. Caranya sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}][\mathbf{B}] t [J] d\xi d\eta \quad (5.78)$$

Diperlukan integrasi numerikal (selanjutnya disebut kuadratur/*quadrature*) untuk mendapatkan matrik kekakuan $[\mathbf{k}]$, dimana kuadratur melibatkan contoh

titik-titik diskret, mengalikan dengan faktor bobot, dan menjumlahkan untuk mendapatkan estimasi dari integral. Kuadratur Gauss (*Gauss quadrature*) adalah metode integrasi numerikal yang mempunyai karakteristik optimal ketika fungsi yang mendasarinya merupakan bentuk polinomial.



Gambar 5.6 Percontohan lokasi-lokasi titik untuk integrasi menggunakan aturan Gauss empat titik [1].

Maka Persamaan 5.30 menjadi sebagai berikut, dimana untuk elemen segiempat bilinear empat titik nodal Q4 dimana nilai $\xi = \eta = \pm 1/\sqrt{3}$, maka nilai bobot $W_i = W_j = 1,0$.

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] \int [\mathbf{J}] W_i W_j \quad (5.79)$$

Aturan koordinat Gauss ini digunakan untuk menghitung besarnya matrik kekakuan elemen. Sedangkan untuk menghitung tegangan dan regangan pada elemen digunakan aturan koordinat alamiah atau natural.

5.3 Referensi

1. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
2. Kuntjoro, W. (2005). "An Introduction to The Finite Element Method", MacGraw-Hill Education Asia.
3. Logan D.L. (2002). "A First Course in the Finite Element Method", Brooks/Cole, Thompson Learning, USA.

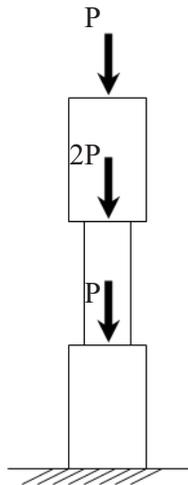
BAB 6

LATIHAN SOAL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas beberapa latihan soal elemen batang, elemen balok, elemen segitiga linier tiga titik nodal (CST), dan elemen segiempat bilinear empat titik nodal (Q4). Untuk menunjang kelancaran dalam memahami elemen-elemen tersebut dan dalam mengaplikasikannya dengan menggunakan perangkat lunak rekayasa, maka dalam bab ini setiap hasil perhitungan secara manual akan diverifikasi dengan perangkat lunak SAP2000 [1].

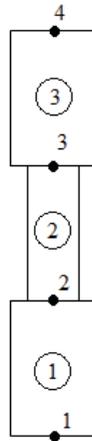
6.1 Elemen Batang

Diketahui struktur batang seperti terlihat pada Gambar 6.1. Elemen 1 mempunyai ukuran penampang persegi 300 mm x 300 mm. Elemen 2 mempunyai ukuran penampang persegi 200 mm x 200 mm. Elemen 3 mempunyai ukuran penampang persegi 300 mm x 300 mm. Batang terbuat dari baja dengan modulus elastisitas 200000 MPa. Panjang masing-masing elemen 1 meter. Besar beban P adalah 500 kg. Hitunglah deformasi yang terjadi pada struktur batang tersebut.



Gambar 6.1 Struktur batang dengan beberapa beban terpusat.

Terdapat tiga elemen batang, dengan masing-masing batang mempunyai dua titik nodal. Penomoran elemen dan titik nodal sebagai berikut,



Gambar 6.2 Penomoran elemen dan titik nodal.

Selanjutnya penyelesaian sebagai berikut, pertama-tama adalah merakit matrik kekakuan masing-masing elemen dan matrik kekakuan gabungan,

Elemen 1:

$$K_1 = \frac{A_1 \cdot E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen 2:

$$K_2 = \frac{A_2 \cdot E}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemen 3:

$$K_3 = \frac{A_3 \cdot E}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemen gabungan,

$$[\mathbf{k}] = K_1 + K_2 + K_3 = \begin{bmatrix} \frac{A_1 \cdot E}{L} & -\frac{A_1 \cdot E}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{A_1 \cdot E}{L} & \frac{A_1 \cdot E}{L} + \frac{A_2 \cdot E}{L} & -\frac{A_2 \cdot E}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{A_2 \cdot E}{L} & \frac{A_2 \cdot E}{L} + \frac{A_3 \cdot E}{L} & -\frac{A_3 \cdot E}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{A_3 \cdot E}{L} & \frac{A_3 \cdot E}{L} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya apabila diterapkan syarat batas, maka $u_1 = 0$, maka penyelesaian sebagai berikut,

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}].\{\mathbf{d}\} &= \{\mathbf{r}\} \\ \{\mathbf{d}\} &= [\mathbf{k}]^{-1}.\{\mathbf{r}\} \end{aligned}$$

Matrik elemen gabungan dapat direduksi menjadi berukuran 3x3 dikarenakan $u_1 = 0$, yaitu menjadi sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \frac{A_1.E}{L} + \frac{A_2.E}{L} & -\frac{A_2.E}{L} & 0 \\ -\frac{A_2.E}{L} & \frac{A_2.E}{L} + \frac{A_3.E}{L} & -\frac{A_3.E}{L} \\ 0 & -\frac{A_3.E}{L} & \frac{A_3.E}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ -2P \\ -P \end{Bmatrix}$$

maka dengan memasukkan nilai-nilai A , E , L , dan P sebagai berikut,

$$A_1 = 300.300 = 90000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 200.200 = 40000 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 300.300 = 90000 \text{ mm}^2$$

$$E = 200000 \text{ MPa}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

$$P = 500 \text{ kg} = 500.9,81 \text{ N} = 4905 \text{ N}$$

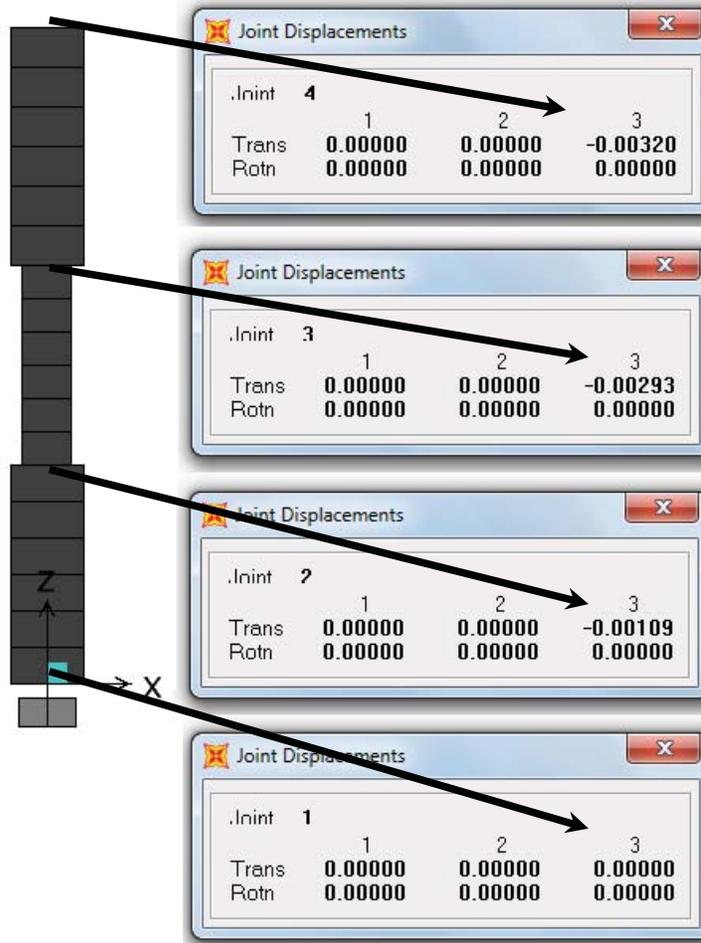
maka selanjutnya dapat dihitung u_2 , u_3 dan u_4 (unit satuan mm) sebagai berikut,

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1}.\{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{bmatrix} \frac{A_1.E}{L} + \frac{A_2.E}{L} & -\frac{A_2.E}{L} & 0 \\ -\frac{A_2.E}{L} & \frac{A_2.E}{L} + \frac{A_3.E}{L} & -\frac{A_3.E}{L} \\ 0 & -\frac{A_3.E}{L} & \frac{A_3.E}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -P \\ -2P \\ -P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,00109 \\ -0,00293 \\ -0,00320 \end{Bmatrix}$$

Selanjutnya, hasil tersebut diverifikasi dengan menggunakan perangkat lunak SAP2000. Salah satu hal penting dalam pemodelan numerik adalah input data

harus tepat, dalam hal ini nilai modulus elastisitas (E) adalah 200000 MPa, berat sendiri elemen diabaikan, dan nilai rasio poisson nol. Hasil analisis selengkapnya ditampilkan pada Gambar 6.3, dimana hasil perhitungan dengan SAP2000 sama dengan hasil perhitungan sebelumnya.



Gambar 6.3 Hasil analisis, deformasi pada masing-masing titik nodal.

Kesimpulan yang dapat diperoleh ditampilkan dalam Tabel 6.1 sebagai berikut,

Tabel 6.1 Hasil perhitungan.

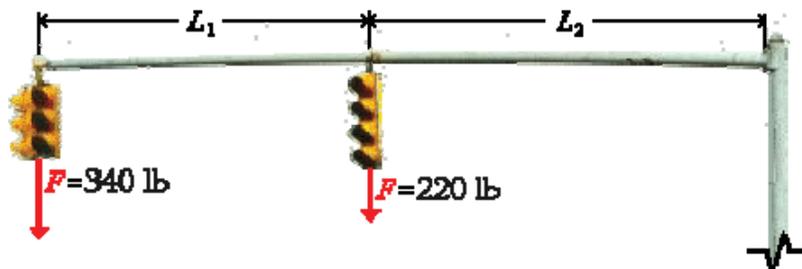
| Deformasi (mm) | Perhitungan manual | Hasil SAP2000 |
|----------------|--------------------|---------------|
| u_1 | 0,00000 | 0,00000 |
| u_2 | 0,00109 | 0,00109 |
| u_3 | 0,00293 | 0,00293 |
| u_4 | 0,00320 | 0,00320 |

6.2 Elemen Balok

Diketahui struktur portal dengan tumpuan jepit seperti terlihat pada Gambar 6.4. Struktur berfungsi untuk menahan dua buah beban terpusat berupa lampu lalu lintas.

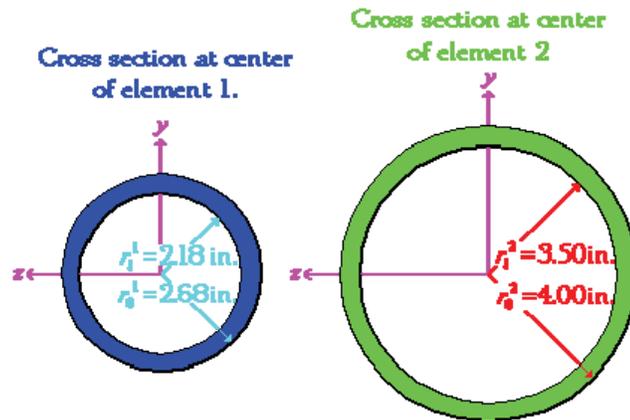


Gambar 6.4 Struktur portal dengan pipa baja [5].



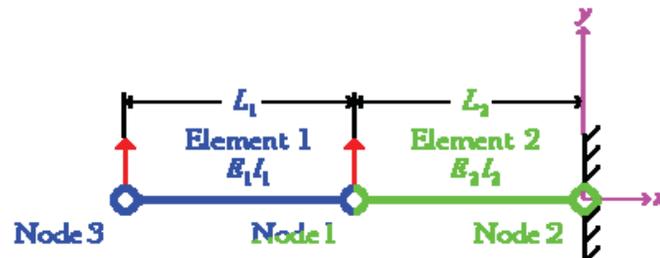
Gambar 6.5 Idealisasi model struktur [5].

Balok dengan panjang $L_1 = 2438,4 \text{ mm}$ (96 inch) menggunakan pipa dengan diameter luar 136,144 mm (2,68 inch) dan tebal pipa 12,7 mm (0,6 inch). Balok dengan panjang $L_2 = 2946,4 \text{ mm}$ (116 inch) menggunakan pipa dengan diameter luar 203,2 mm (4,00 inch) dan tebal pipa 12,7 mm (0,5 inch). Balok terbuat dari baja dengan modulus elastisitas sebesar 200000 MPa. Beban yang bekerja seperti terlihat pada Gambar 6.5, yaitu sebesar 340 lb (1512,4 N) dan 220 lb (978,61 N).

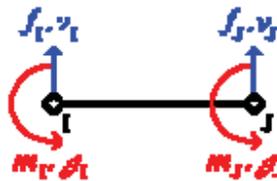


Gambar 6.6 Dimensi dan ukuran penampang balok yang digunakan [5].

Selanjutnya, untuk mengetahui besarnya deformasi yang terjadi akibat adanya beban-beban tersebut, maka struktur balok dimodelkan menjadi dua elemen seperti terlihat pada Gambar 6.7. Dengan model tersebut, maka dapat dihitung besarnya deformasi pada titik nodal 3 dan titik nodal 1. Titik nodal 2 diasumsikan sebagai tumpuan jepit, sehingga tidak terjadi deformasi.



Gambar 6.7 Pemodelan dan idealisasi elemen [5].



Gambar 6.8 Derajat kebebasan elemen balok [5].

Tahap selanjutnya adalah menentukan matrik kekakuan elemen untuk tiap-tiap elemen. Setelah itu merakit matrik kekakuan struktur (gabungan). Tahap selanjutnya atau tahap terakhir adalah menentukan syarat batas dan menentukan peralihan dan rotasi yang terjadi pada masing-masing titik nodal. Perhitungan selengkapnya sebagai berikut,

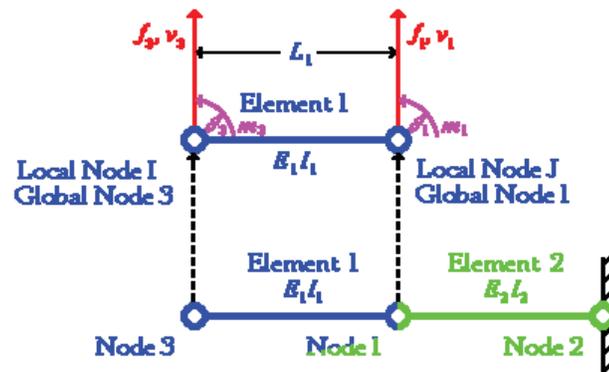
Langkah pertama, menentukan matrik kekakuan elemen masing-masing elemen, tiap elemen mempunyai empat titik nodal (Gambar 6.8),

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \\ f_j \\ m_j \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_{4 \times 1}$$

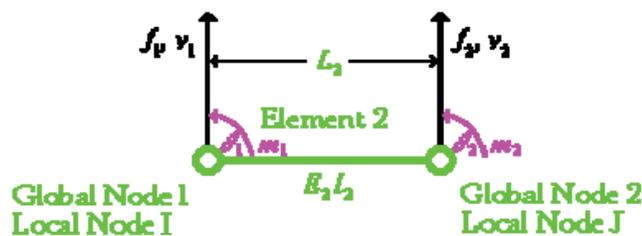
$$\begin{Bmatrix} f_i \\ m_i \\ f_j \\ m_j \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}_{4 \times 1}$$

Matrik kekakuan elemen (umum),

$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



(a). Elemen 1.



(b). Elemen 2.

Gambar 6.9 Penomoran titik nodal Elemen 1 dan Elemen 2 [5].

Matrik kekakuan untuk elemen 1,

$$K_1 = \frac{E.I_1}{L_1^3} \begin{bmatrix} 12 & -6.L_1 & 0 & 0 & -12 & -6.L_1 \\ -6.L_1 & 4.L_1^2 & 0 & 0 & 6.L_1 & 2.L_1^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6.L_1 & 0 & 0 & 12 & 6.L_1 \\ -6.L_1 & 2.L_1^2 & 0 & 0 & 6.L_1 & 4.L_1^2 \end{bmatrix}$$

Matrik kekakuan untuk elemen 2,

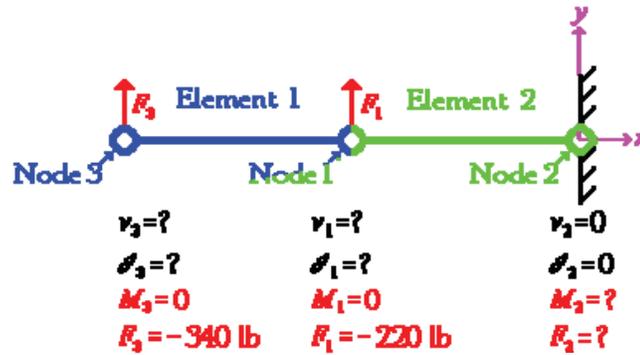
$$K_2 = \frac{E.I_2}{L_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6.L_2 & -12 & 6.L_2 & 0 & 0 \\ 6.L_2 & 4.L_2^2 & -6.L_2 & 2.L_2^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6.L_2 & 12 & -6.L_2 & 0 & 0 \\ 6.L_2 & 2.L_2^2 & -6.L_2 & 4.L_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrik kekakuan gabungan berukuran 6x6 (unit satuan N dan mm),

$$[\mathbf{k}] = K_1 + K_2$$

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 4820,82 & 2,87E6 & -3250,76 & 4,78E6 & -1570,06 & -1,91E6 \\ 2,87E6 & 1,25E10 & -4,78E6 & 4,70E9 & 1,91E6 & 1,55E9 \\ -3250,76 & -4,78E6 & 3250,76 & -4,78E6 & 0 & 0 \\ 4,78E6 & 4,70E9 & -4,78E6 & 9,41E9 & 0 & 0 \\ -1570,06 & 1,91E6 & 0 & 0 & 1570,06 & 1,91E6 \\ -1,91E6 & 1,55E9 & 0 & 0 & 1,91E6 & 3,11E9 \end{bmatrix}$$

Kemudian dengan menerapkan syarat/kondisi batas, yaitu titik nodal 2 adalah dimodelkan tumpuan dimana tidak terjadi translasi vertikal maupun rotasi, maka v_2 dan θ_2 sama dengan nol, karena translasi dan rotasi tersebut dicegah terjadi oleh model tumpuannya.



Gambar 6.10 Syarat batas [5].

Langkah terakhir selanjutnya yaitu menghitung peralihan dan rotasi pada titik nodal 3 dan titik nodal 1 sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1} \cdot \{\mathbf{r}\}$$

Matrik kekakuan gabungan dapat direduksi menjadi 4x4 dengan diterapkannya syarat/kondisi batas, yaitu menjadi sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 4820,82 & 2,87E6 & -1570,06 & -1,91E6 \\ 2,87E6 & 1,25E10 & 1,91E6 & 1,55E9 \\ -1570,06 & 1,91E6 & 1570,06 & 1,91E6 \\ -1,91E6 & 1,55E9 & 1,91E6 & 3,11E9 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{r}] = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{d}] = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

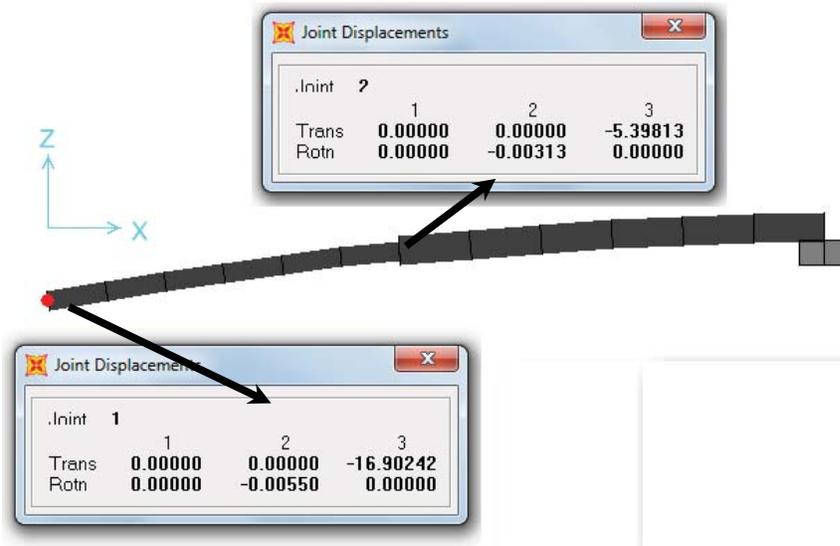
Maka diperoleh translasi (satuan mm) dan rotasi (satuan radian) di titik nodal 1 dan titik nodal 3 sebagai berikut,

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1} \cdot \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4820,82 & 2,87E6 & -1570,06 & -1,91E6 \\ 2,87E6 & 1,25E10 & 1,91E6 & 1,55E9 \\ -1570,06 & 1,91E6 & 1570,06 & 1,91E6 \\ -1,91E6 & 1,55E9 & 1,91E6 & 3,11E9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{d}] = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5,27081 \\ 0,00306 \\ -16,47219 \\ 0,00535 \end{Bmatrix}$$

Hasil perhitungan selanjutnya diverifikasi dengan menggunakan perangkat lunak SAP2000. Hasil analisis dengan SAP2000 ditampilkan pada Gambar 6.11. Kesimpulannya hasil perhitungan manual dengan SAP2000 adalah sama.



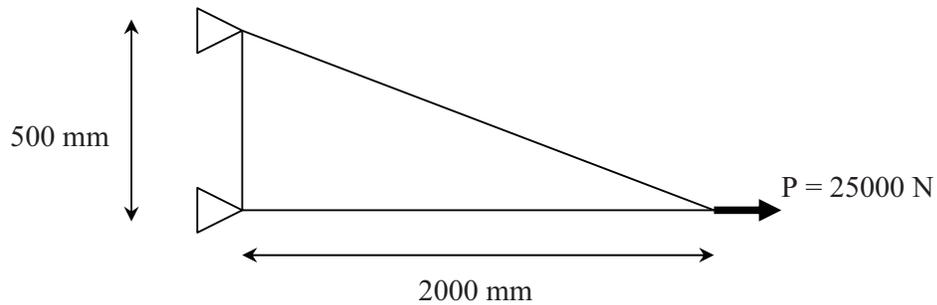
Gambar 6.11 Deformasi struktur hasil analisis SAP2000.

6.3 Elemen Segitiga Linier (CST)

A. Studi Kasus Pertama

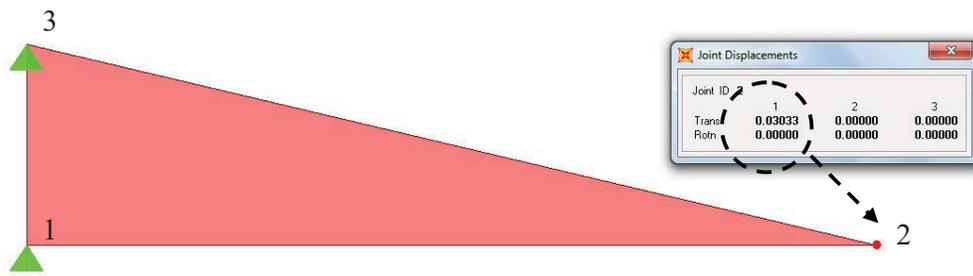
Diketahui suatu elemen segitiga dengan beban seperti terlihat pada Gambar 6.12. Dalam subbab ini, penyelesaian studi kasus menggunakan asumsi bahwa struktur adalah elemen segitiga linier CST. Struktur menggunakan material

dengan nilai modulus elastisitas (E) sebesar 20000 MPa dan rasio poisson (ν) sebesar 0,3. Tebal elemen adalah 300 mm.



Gambar 6.12 Struktur elemen segitiga.

Penyelesaian dengan perangkat lunak SAP2000 ditampilkan pada Gambar 6.13. Deformasi arah horizontal (translasi) yang terjadi sebesar 0,03033 mm.



Gambar 6.13 Hasil analisis dengan SAP2000.

Perhitungan manual sebagai berikut (unit satuan dalam N dan mm),

$$x_i = 0 \quad ; \quad x_j = 2000 \quad ; \quad x_m = 0$$

$$y_i = 0 \quad ; \quad y_j = 0 \quad ; \quad y_m = 500$$

$$t = 300 \text{ mm}$$

$$A = 0,5 \cdot 2000 \cdot 500 = 500000 \text{ mm}^2$$

Menghitung matrik $[E]$,

$$\nu = 0,3$$

$$E = 20000 \text{ N/mm}^2$$

$$[\mathbf{E}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21978,02 & 6593,41 & 0 \\ 6593,41 & 21978,02 & 0 \\ 0 & 0 & 7692,31 \end{bmatrix}$$

$$\beta_i = y_j - y_m$$

$$\beta_j = y_m - y_i$$

$$\beta_m = y_i - y_j$$

$$\gamma_i = x_m - x_j$$

$$\gamma_j = x_i - x_m$$

$$\gamma_m = x_j - x_i$$

Menghitung matrik $[\mathbf{B}]$,

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -0,0005 & 0 & 0,0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,002 & 0 & 0 & 0 & 0,002 \\ -0,002 & -0,0005 & 0 & 0,0005 & 0,002 & 0 \end{bmatrix}$$

Menghitung matrik $[\mathbf{k}]$,

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}] \cdot t \cdot A$$

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 5,44E6 & 2,14E6 & -8,24E5 & -1,15E6 & -4,62E6 & -9,89E5 \\ 2,14E6 & 1,35E7 & -9,89E5 & -2,88E5 & -1,15E6 & -1,32E7 \\ -8,24E5 & -9,89E5 & 8,24E5 & 0 & 0 & 9,89E5 \\ -1,15E6 & -2,88E5 & 0 & 2,88E5 & 1,15E6 & 0 \\ -4,62E6 & -1,15E6 & 0 & 1,15E6 & 4,62E6 & 0 \\ -9,89E5 & -1,32E7 & 9,89E5 & 0 & 0 & 1,32E7 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menerapkan kondisi batas, dimana pada titik nodal 1 dan titik nodal 3 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal maupun vertikal pada

kedua titik nodal tersebut sama dengan nol. Maka matrik kekakuan elemen $[k]$ dapat ditulis menjadi sebagai berikut,

$$[k] = \begin{bmatrix} 5,44E6 & 2,14E6 & -8,24E5 & -1,15E6 & -4,62E6 & -9,89E5 \\ 2,14E6 & 1,35E7 & -9,89E5 & -2,88E5 & -1,15E6 & -1,32E7 \\ -8,24E5 & -9,89E5 & 8,24E5 & 0 & 0 & 9,89E5 \\ -1,15E6 & -2,88E5 & 0 & 2,88E5 & 1,15E6 & 0 \\ -4,62E6 & -1,15E6 & 0 & 1,15E6 & 4,62E6 & 0 \\ -9,89E5 & -1,32E7 & 9,89E5 & 0 & 0 & 1,32E7 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 8,24E5 & 0 \\ 0 & 2,88E5 \end{bmatrix}$$

Matrik beban $\{r\}$ yaitu beban terdapat pada titik nodal 2 saja,

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} 25000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Maka dapat dihitung sebagai berikut,

$$[k]\{d\} = \{r\}$$

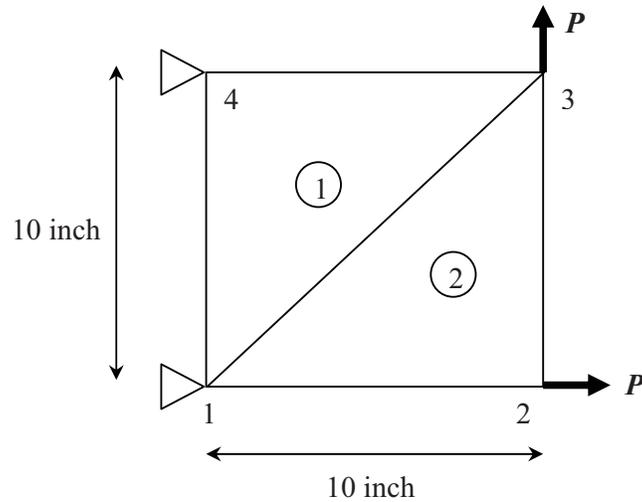
$$\{d\} = [k]^{-1}\{r\}$$

$$\{d\} = \begin{bmatrix} 8,24E5 & 0 \\ 0 & 2,88E5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 25000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,03033 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh memperlihatkan bahwa sama dengan hasil verifikasi dari perangkat lunak SAP2000.

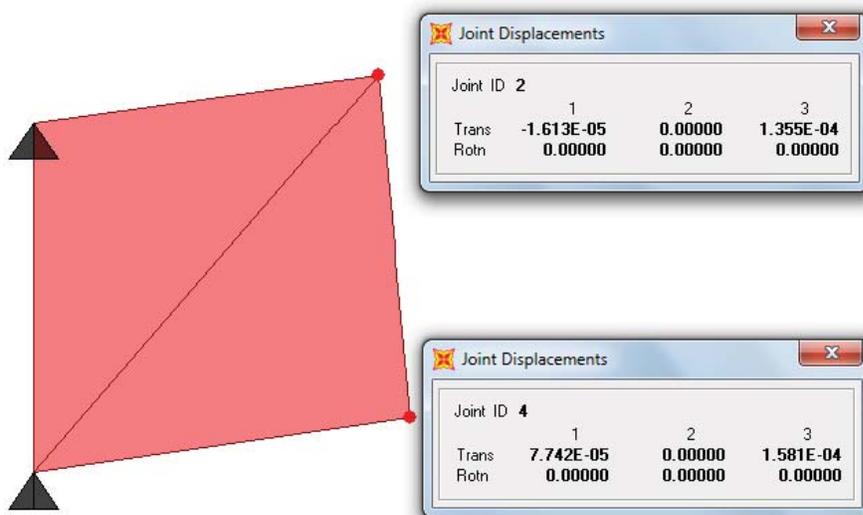
B. Studi Kasus Kedua

Diketahui suatu kantilever dengan beban seperti terlihat pada Gambar 6.14. Dalam penyelesaian studi kasus ini, digunakan asumsi bahwa struktur disusun oleh 2 (dua) buah elemen segitiga linier CST. Diketahui struktur kantilever dengan material $E = 30000000$ Psi (atau $E = 206842,74$ MPa) dan $\nu = 0,4999$. Tebal elemen adalah 1 inch. Luas total elemen adalah 10×10 inch² (254×254 mm²) atau luas masing-masing elemen adalah $0,5 \times 10 \times 10$ inch² ($0,5 \times 254 \times 254$ mm²). Besar beban P adalah 1000 lb (4448,22 Newton).



Gambar 6.14 Struktur kantilever.

Hasil penyelesaian dengan perangkat lunak SAP2000 selengkapnya ditampilkan pada Gambar 6.16.



Gambar 6.15 Hasil analisis: deformasi struktur dengan SAP2000.

Sedangkan perhitungan manual selengkapnya sebagai berikut,

a. Elemen 1

$$x_i = 0 \quad ; \quad x_j = 10 \quad ; \quad x_m = 0$$

$$y_i = 0 \quad ; \quad y_j = 10 \quad ; \quad y_m = 10$$

$$t = 1 \text{ inch} \quad ; \quad A = 0,6 \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ inch}^2$$

Menghitung matrik $[E]$,

$$\nu = 0,4999$$

$$E = 30000000 \text{ Psi}$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,99E7 & 1,99E7 & 0 \\ 1,99E7 & 3,99E7 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00E7 \end{bmatrix}$$

$$\beta_i = y_j - y_m$$

$$\beta_j = y_m - y_i$$

$$\beta_m = y_i - y_j$$

$$\alpha_i = x_m - x_j$$

$$\alpha_j = x_i - x_m$$

$$\alpha_m = x_j - x_i$$

Menghitung matrik $[B_1]$,

$$[B_1] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

Menghitung matrik $[k_1]$ dengan ukuran 6x6, yang kemudian disusun menjadi 8x8,

$$[k_1] = [B_1]^T \cdot [E] \cdot [B_1] \cdot t \cdot A$$

a. Elemen 2

$$x_i = 0 \quad ; \quad x_j = 10 \quad ; \quad x_m = 10$$

$$y_i = 0 \quad ; \quad y_j = 0 \quad ; \quad y_m = 10$$

$$t = 1 \text{ inch} \quad ; \quad A = 0,6 \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ inch}^2$$

$$\beta_i = y_j - y_m$$

$$\beta_j = y_m - y_i$$

$$\beta_m = y_i - y_j$$

$$\alpha_i = x_m - x_j$$

$$\alpha_j = x_i - x_m$$

$$\alpha_m = x_j - x_i$$

Menghitung matrik $[\mathbf{B}_2]$,

$$[\mathbf{B}_2] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & -0,1 & -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menghitung matrik $[\mathbf{k}_2]$ dengan ukuran 6x6, yang kemudian disusun menjadi 8x8,

$$[\mathbf{k}_2] = [\mathbf{B}_2]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}_2] \cdot t.A$$

Selanjutnya menghitung matrik kekakuan elemen total, ukuran 8x8,

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}_1] + [\mathbf{k}_2]$$

Selanjutnya dengan menerapkan kondisi batas, dimana pada titik nodal 1 dan titik nodal 4 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal maupun vertikal pada kedua titik nodal tersebut sama dengan nol. Maka matrik kekakuan elemen $[\mathbf{k}]$ dapat ditulis menjadi sebagai berikut berukuran 4x4,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 2,49E7 & -1,49E7 & -5,00E6 & 9,99E6 \\ -1,49E7 & 2,39E7 & 5,00E6 & -1,99E7 \\ -5,00E6 & 5,00E6 & 2,49E7 & 0 \\ 9,99E6 & -1,99E7 & 0 & 2,49E7 \end{bmatrix}$$

Matrik beban $\{\mathbf{r}\}$ yaitu beban terdapat pada titik nodal 2 dan titik nodal 3 saja,

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Maka dapat dihitung sebagai berikut (satuan deformasi dalam inch),

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}$$

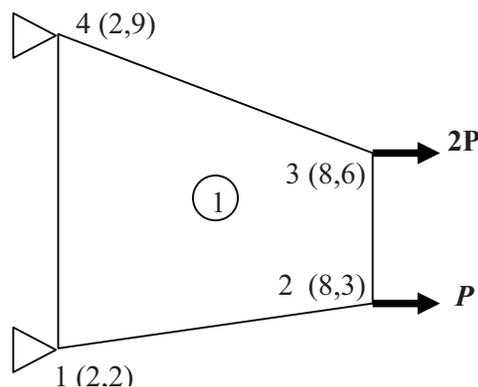
$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1}\{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{bmatrix} 2,49E7 & -1,49E7 & -5,00E6 & 9,99E6 \\ -1,49E7 & 2,39E7 & 5,00E6 & -1,99E7 \\ -5,00E6 & 5,00E6 & 2,49E7 & 0 \\ 9,99E6 & -1,99E7 & 0 & 2,49E7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,000077 \\ 0,000158 \\ -0,000016 \\ 0,000135 \end{Bmatrix}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh memperlihatkan bahwa sama dengan hasil verifikasi dari perangkat lunak SAP2000.

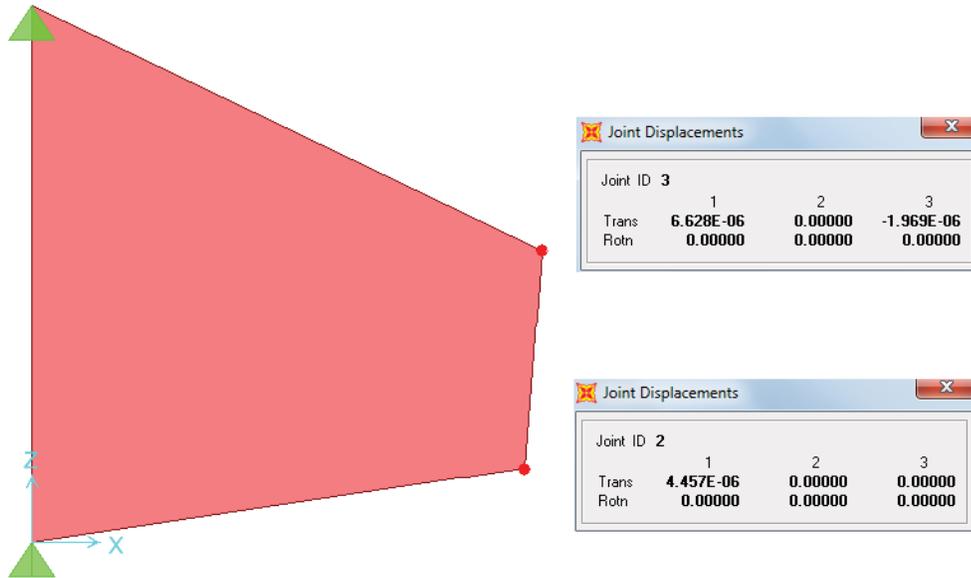
6.4 Elemen Segiempat Bilinier (Q4)

Diketahui suatu kantilever dengan beban seperti terlihat pada Gambar 6.16, dalam subbab ini, penyelesaian studi kasus menggunakan asumsi bahwa struktur dibagi menjadi satu elemen segiempat bilinier Q4. Latihan soal ini diambil dari buku Grandin [3] halaman 252.

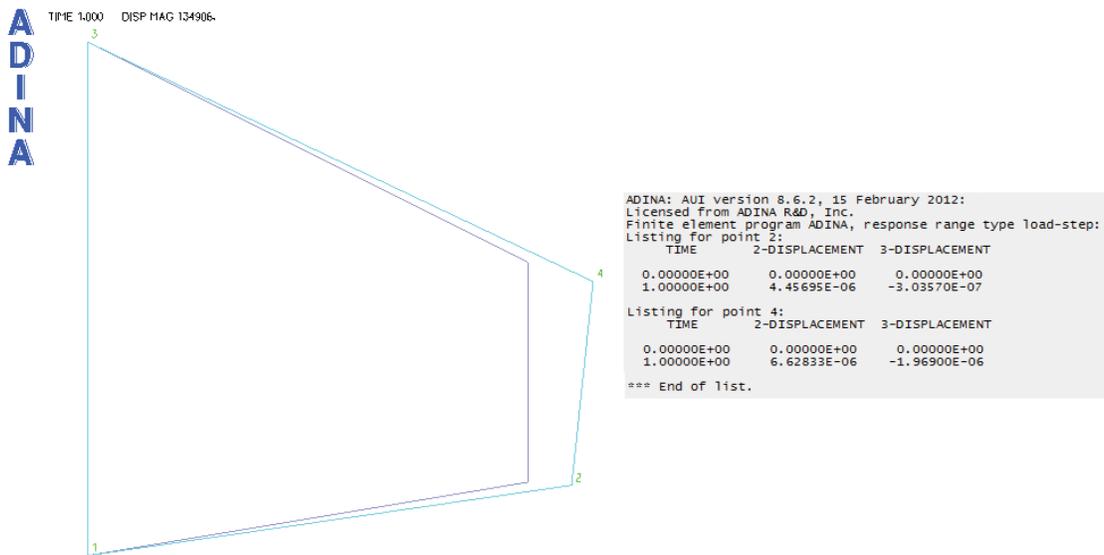


Gambar 6.16 Struktur kantilever dengan elemen Q4.

Material $E = 30000000$ Psi (atau $E = 206842,74$ MPa) dan $\nu = 0,3$. Tebal elemen adalah 0,1 inch (2,54 mm). Besar beban P adalah 5 lb (22,2411 Newton).



Gambar 6.17 Hasil analisis dengan SAP2000.



Gambar 6.18 Hasil analisis dengan ADINA.

Perhitungan secara manual langkah demi langkah sebagai berikut,

$$x_1 = 2 \quad ; \quad y_1 = 2$$

$$x_2 = 8 \quad ; \quad y_2 = 3$$

$$\begin{aligned} x_3 = 8 & ; & y_3 = 6 \\ x_4 = 2 & ; & y_4 = 9 \end{aligned}$$

$$W_i = W_j = 1,0$$

$$\nu = 0,3$$

$$E = 30000000 \text{ Psi}$$

$$t = 0,1 \text{ inch}$$

a. Titik Nodal 1:

$$\xi = -0,5773$$

$$\eta = -0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_1]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_1] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_1] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_1] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_1] = [\mathbf{J}_1]^{-1} = \frac{1}{[\mathbf{J}_1]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_1] = [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_1] t [\mathbf{J}_1] W_i W_j$$

b. Titik Nodal 2:

$$\xi = 0,5773$$

$$\eta = -0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_2]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_2] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{J}_2]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_2] = [\mathbf{J}_2]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_2]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_2] = [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_2] t |[\mathbf{J}_2]| W_i W_j$$

c. Titik Nodal 3:

$$\xi = 0,5773$$

$$\eta = 0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_3]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_3] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_3] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{J}_3]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_3] = [\mathbf{J}_3]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_3]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_3] = [\mathbf{B}_3]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_3] t |[\mathbf{J}_3]| W_i W_j$$

d. Titik Nodal 4:

$$\xi = -0,5773$$

$$\eta = 0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_4]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_4] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_4] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{J}_4]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_4] = [\mathbf{J}_4]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_4]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_4] = [\mathbf{B}_4]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_4] t \left[[\mathbf{J}_4] \right] W_i W_j$$

Selanjutnya menghitung matrik kekakuan gabungan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}_1] + [\mathbf{k}_2] + [\mathbf{k}_3] + [\mathbf{k}_4]$$

Matrik $[\mathbf{k}]$ tersebut berukuran 8x8.

Dengan menerapkan kondisi batas, dimana pada titik nodal 1 dan titik nodal 4 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal dan translasi vertical dicegah, maka $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = 0$, sehingga persamaan matrik kekakuan menjadi berukuran 4x4 sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 1,52E6 & -3,55E5 & -4,19E5 & 2,22E5 \\ -3,55E5 & 1,99E6 & -1,39E5 & -1,61E6 \\ -4,19E5 & -1,39E5 & 1,67E6 & 7,17E5 \\ 2,22E5 & -1,61E6 & 7,17E5 & 2,19E6 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

Matrik beban (pada titik nodal 2 dan titik nodal 3) sebagai berikut,

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

Selanjutnya dapat dihitung matrik peralihan (unit satuan dalam inch) sebagai berikut,

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}] \cdot \{\mathbf{d}\} &= \{\mathbf{r}\} \\ \{\mathbf{d}\} &= [\mathbf{k}]^{-1} \cdot \{\mathbf{r}\} \\ \{\mathbf{d}\} &= \begin{Bmatrix} 0,0000048324 \\ 0,000000451 \\ 0,0000063589 \\ -0,0000015566 \end{Bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \end{aligned}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh memperlihatkan bahwa hasilnya hampir sama (%-relatif perbedaannya kecil) dengan hasil verifikasi dari perangkat lunak SAP2000 (Gambar 6.17) dan ADINA (Gambar 6.18).

6.6 Penutup

Pembahasan soal-soal latihan dalam Bab 1 sampai dengan Bab 6 ini hanya mempelajari perhitungan matrik [B], matrik [k], dan menghitung deformasi titik-titik nodal. Pembahasan lebih lanjut mengenai perhitungan tegangan dan regangan di titik nodal selengkapnya akan dibahas pada Lampiran.

Pada bagian Lampiran juga dibahas tambahan contoh-contoh soal agar mahasiswa dapat lebih memahami permasalahan elemen batang, elemen balok, elemen segitiga CST, dan elemen segiempat Q4.

6.7 Referensi

1. Computer and Structures, Inc. 2006. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
2. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
3. Grandin, H. (1986). "Fundamentals of The Finite Element Method", Macmillan Publishing Company, New York, USA.
4. Kuntjoro, W. (2005). "An Introduction to The Finite Element Method", MacGraw-Hill Education Asia.
5. url: <http://comp.uark.edu/~jjrencis>, diakses tanggal 27 Januari 2012.

6. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.

DAFTAR PUSTAKA

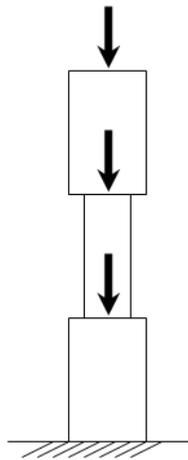
1. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.
2. Computer and Structures, Inc. 2005. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
3. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.
4. Felippa, C.A. (2004). "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, Boulder, Colorado 80309-0429, USA.
5. Grandin, H. (1986). "Fundamentals of The Finite Element Method", Macmillan Publishing Company, New York, USA.
6. Kuntjoro, W. (2005). "An Introduction to The Finite Element Method", MacGraw-Hill Education Asia.
7. url: http://www.abacom.de/products/abaqus_fea.html, diakses tanggal 26 November 2011.
8. url: <http://www.adina.com/index.shtml>, diakses tanggal 26 November 2011.
9. url: <http://www.ansys.com>, diakses tanggal 26 November 2011.
10. url: <http://www.csiberkeley.com/sap2000>, diakses tanggal 26 November 2011.
11. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, diakses tanggal 26 November 2011.
12. url: <http://preview.filesonic.com/img/c4/6d/ce/3475071.jpg>, diakses tanggal 26 November 2011.
13. url: http://web.srasgroup.com/wp-content/uploads/2010/11/car_impact.jpg, diakses tanggal 26 November 2011.
14. url: <http://www.infometrik.com/2009/08/pengantar-finite-element-method>, diakses tanggal 26 November 2011.
15. url: http://en.wikipedia.org/wiki/Strength_of_materials diakses tanggal 29 November 2011.
16. url: <http://comp.uark.edu/~jjrencis>, diakses tanggal 27 Januari 2012.

LAMPIRAN

Dalam lampiran ini disertakan beberapa latihan soal tambahan disertai dengan pembahasannya. Selain model elemen dengan beban terpusat di titik nodal, terdapat pula contoh studi kasus elemen dengan beban merata, yang selanjutnya diidealisasikan menjadi beban pada titik nodal. Selain itu perhitungan mencakup penyelesaian menghitung tegangan dan regangan yang terjadi pada titik-titik nodal yang ditinjau.

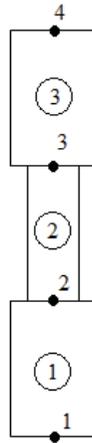
L1.1 Latihan Soal Pertama – Elemen Batang (*Bar*)

Diketahui struktur batang seperti terlihat pada Gambar 6.1. Elemen 1 mempunyai ukuran penampang persegi 300 mm x 300 mm. Elemen 2 mempunyai ukuran penampang persegi 200 mm x 200 mm. Elemen 3 mempunyai ukuran penampang persegi 300 mm x 300 mm. Batang terbuat dari baja dengan modulus elastisitas 200000 MPa. Panjang masing-masing elemen 1 meter. Besar beban P adalah 500 kg. Hitunglah deformasi yang terjadi pada struktur batang tersebut.



Gambar L1.1 Struktur batang dengan beberapa beban terpusat.

Terdapat tiga elemen batang, dengan masing-masing batang mempunyai dua titik nodal. Penomoran elemen dan titik nodal sebagai berikut,



Gambar L1.2 Penomoran elemen dan titik nodal.

Perhitungan selengkapnya telah dibahas pada Bab 6 sebelumnya, yaitu telah dapat dihitung u_2 , u_3 dan u_4 (unit satuan mm) dan $u_1 = 0$ sebagai berikut,

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1} \cdot \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{bmatrix} \frac{A_1.E}{L} + \frac{A_2.E}{L} & -\frac{A_2.E}{L} & 0 \\ -\frac{A_2.E}{L} & \frac{A_2.E}{L} + \frac{A_3.E}{L} & -\frac{A_3.E}{L} \\ 0 & -\frac{A_3.E}{L} & \frac{A_3.E}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -P \\ -2P \\ -P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,00109 \\ -0,00293 \\ -0,00320 \end{Bmatrix}$$

Menghitung tegangan dan regangan titik nodal,

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\mathbf{E}\} \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

Elemen 1:

$$\Delta = u_2 - u_1 = -0,00109 - 0 = -0,00109 \text{ mm}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_o} = \frac{0,00109}{1000} = 0,00000109 \text{ mm/mm}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = E \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 200000 \cdot 0,00000109 = 0,218 \text{ MPa}$$

Elemen 2:

$$\Delta = u_3 - u_2 = -0,00293 - 0,00109 = -0,00184 \text{ mm}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta}{L_o} = \frac{0,00184}{1000} = 0,00000184 \text{ mm/mm}$$

$$\sigma = E.\varepsilon = 200000.0,00000184 = 0,368 \text{ MPa}$$

Elemen 3:

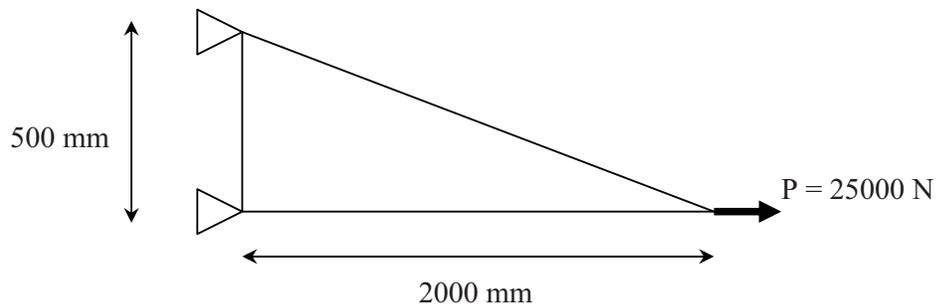
$$\Delta = u_4 - u_3 = -0,00320 - 0,00293 = -0,00027 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L_o} = \frac{0,00027}{1000} = 0,00000027 \text{ mm/mm}$$

$$\sigma = E.\varepsilon = 200000.0,00000027 = 0,054 \text{ MPa}$$

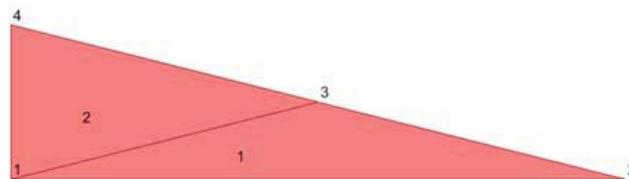
L1.2 Latihan Soal Kedua – Elemen Segitiga Linier (CST)

Diketahui suatu elemen segitiga dengan beban seperti terlihat pada Gambar L1.3. Dalam lampiran ini, penyelesaian studi kasus menggunakan asumsi bahwa struktur dibagi menjadi 2 (dua) elemen segitiga linier CST seperti ditampilkan pada Gambar L1.4. Struktur menggunakan material dengan nilai modulus elastisitas (E) sebesar 20000 MPa dan rasio poisson (ν) sebesar 0,3. Tebal elemen adalah 300 mm.



Gambar L1.3 Struktur elemen segitiga.

Penyelesaian sebagai berikut, pertama dilakukan penomoran titik nodal dan penomoran elemen (Gambar L1.4).



Gambar L1.4 Penomoran titik nodal dan elemen.

Selanjutnya adalah menghitung matrik kekakuan elemen 1 dan elemen 2.

Elemen 1:

$$x_i = 0 \quad ; x_j = 2000 \quad ; x_m = 1000$$

$$y_i = 0 \quad ; y_j = 0 \quad ; y_m = 250$$

$$t = 300 \text{ mm}$$

$$A_1 = 0,5 \times 2000 \times 250 = 250000 \text{ mm}^2$$

Menghitung Matrik $[B_1]$:

$$[B_1] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0005 & 0 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.002 & 0 & -0.002 & 0 & 0.004 \\ -0.002 & -0.0005 & -0.002 & 0.0005 & 0.004 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menghitung matrik $[k_1]$:

$$[k_1] = [B_1]^T \cdot [E] \cdot [B_1] \cdot t \cdot A_1$$

Matrik $[k_1]$ ini berukuran 6x6, oleh karena itu disusun ulang supaya menjadi matrik berukuran 8x8, dikarenakan d.o.f struktur gabungan tersebut ada 8 (4 titik nodal).

$$[k_1] = \begin{pmatrix} 2.719780e6 & 1.071428e6 & 1.895604e6 & -82417.582417 & -4.615384e6 & -989010.989010 & 0 & 0 \\ 1.071428e6 & 6.737637e6 & 82417.582417 & 6.449175e6 & -1.153846e6 & -1.318681e7 & 0 & 0 \\ 1.895604e6 & 82417.582417 & 2.719780e6 & -1.071428e6 & -4.615384e6 & 989010.989011 & 0 & 0 \\ -82417.582417 & 6.449175e6 & -1.071428e6 & 6.737637e6 & 1.153846e6 & -1.318681e7 & 0 & 0 \\ -4.615384e6 & -1.153846e6 & -4.615384e6 & 1.153846e6 & 9.230769e6 & 0 & 0 & 0 \\ -989010.989010 & -1.318681e7 & 989010.989011 & -1.318681e7 & 0 & 2.637363e7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elemen 2:

$$x_i = 0 \quad ; x_j = 1000 \quad ; x_m = 0$$

$$y_i = 0 \quad ; y_j = 250 \quad ; y_m = 500$$

$$t = 300 \text{ mm}$$

$$A_1 = 0,5 \times 1000 \times 500 = 250000 \text{ mm}^2$$

Menghitung Matrik [B₂]:

$$[B_2] = \frac{1}{2A} \cdot \begin{pmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0005 & 0 & 0.001 & 0 & -0.0005 & 0 \\ 0 & -0.002 & 0 & 0 & 0 & 0.002 \\ -0.002 & -0.0005 & 0 & 0.001 & 0.002 & -0.0005 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menghitung matrik [k₂]:

$$[k_2] = [B_2]^T \cdot [E] \cdot [B_2] \cdot t \cdot A_2$$

Matrik [k₂] ini berukuran 6x6, oleh karena itu disusun ulang supaya menjadi matrik berukuran 8x8, dikarenakan d.o.f struktur gabungan tersebut ada 8 (4 titik nodal).

$$[k_2] = \begin{pmatrix} 2.719780e6 & 1.071428e6 & 0 & 0 & -824175.824175 & -1.153846e6 & -1.895604e6 & 82417.582417 \\ 1.071428e6 & 6.737637e6 & 0 & 0 & -989010.989011 & -288461.538461 & -82417.582417 & -6.449175e6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -824175.824175 & -989010.989011 & 0 & 0 & 1.648351e6 & 0 & -824175.824175 & 989010.989011 \\ -1.153846e6 & -288461.538461 & 0 & 0 & 0 & 576923.076923 & 1.153846e6 & -288461.538461 \\ -1.895604e6 & -82417.582417 & 0 & 0 & -824175.824175 & 1.153846e6 & 2.719780e6 & -1.071428e6 \\ 82417.582417 & -6.449175e6 & 0 & 0 & 989010.989011 & -288461.538461 & -1.071428e6 & 6.7376374e6 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dapat dihitung matrik kekakuan struktur (matrik kekakuan total) atau matrik kekakuan gabungan sebagai berikut,

$$[k] = [k_1] + [k_2]$$

$$[k] = \begin{matrix} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{u}_4 & \mathbf{v}_4 \\ \begin{pmatrix} 5.43956e6 & 2.142856e6 & 1.895604e6 & -82417.582417 & -5.439559e6 & -2.1428561e6 & -1.895604e6 & 82417.582417 \\ 2.142856e6 & 1.3475274e7 & 82417.582417 & 6.449175e6 & -2.1428561e6 & -1.347527e7 & -82417.582417 & -6.449175e6 \\ 1.895604e6 & 82417.582417 & 2.71978e6 & -1.071428e6 & -4.615384e6 & 989010.989011 & 0 & 0 \\ -82417.582417 & 6.449175e6 & -1.071428e6 & 6.737637e6 & 1.153846e6 & -1.318681e7 & 0 & 0 \\ -5.439559e6 & -2.1428561e6 & -4.615384e6 & 1.153846e6 & 1.087912e7 & 0 & -824175.824175 & 989010.989011 \\ -2.1428561e6 & -1.347527e7 & 989010.989011 & -1.318681e7 & 0 & 2.695055e7 & 1.153846e6 & -288461.538461 \\ -1.895604e6 & -82417.582417 & 0 & 0 & -824175.824175 & 1.153846e6 & 2.71978e6 & -1.071428e6 \\ 82417.582417 & -6.449175e6 & 0 & 0 & 989010.989011 & -288461.538461 & -1.071428e6 & 6.7376374e6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Dengan menerapkan kondisi batas (syarat batas), maka dapat diketahui bahwa titik nodal 1 dan titik nodal 4 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal (u) dan translasi vertikal (v) pada kedua titik nodal tersebut adalah NOL. Maka matrik kekakuan struktur [K] dapat disederhanakan menjadi sebagai berikut:

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2.71978e6 & -1.071428e6 & -4.615384e6 & 989010.989011 \\ -1.071428e6 & 6.737637e6 & 1.153846e6 & -1.318681e7 \\ -4.615384e6 & 1.153846e6 & 1.087912e7 & 0 \\ 989010.989011 & -1.318681e7 & 0 & 2.695055e7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrik {r} sebagai berikut:

$$\{r\} = [25000 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

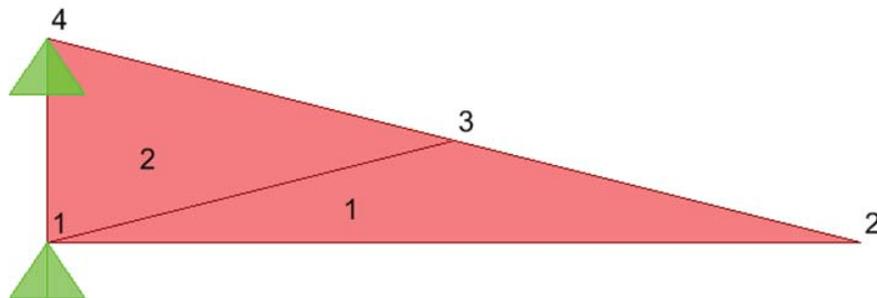
Menghitung matrik {d} sebagai berikut:

$$\{d\} = [K]^{-1} \cdot \{r\}$$

Maka diperoleh (satuan dalam mm) sebagai berikut:

$$\{d\} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.037507 \\ 0.022551 \\ 0.013521 \\ 0.009658 \end{pmatrix}$$

Hasil tersebut selanjutnya diverifikasi dengan perangkat lunak SAP2000. Hasil analisis dengan SAP2000 selengkapnya ditampilkan pada Gambar L1.5.



| Joint Text | Output Case Text | Case Type Text | U1 mm | U2 mm | U3 mm |
|------------|------------------|----------------|----------|-------|----------|
| 1 | DEAD | LinStatic | 0 | 0 | 0 |
| 2 | DEAD | LinStatic | 0.037508 | 0 | 0.022551 |
| 3 | DEAD | LinStatic | 0.013521 | 0 | 0.009658 |
| 4 | DEAD | LinStatic | 0 | 0 | 0 |

Gambar L1.5 Hasil analisis dengan SAP2000.

Kesimpulan yang didapat adalah bahwa hasil perhitungan antara manual dengan SAP2000 adalah sama.

Selanjutnya menghitung tegangan-tegangan yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 (keterangan bahwa unit satuan dalam Newton dan milimeter).

$$\{\sigma\} = [E].\{\varepsilon\}$$

$$\{\sigma\} = [E].[B].\{d\}$$

dimana,

$$[E] = \begin{pmatrix} 21978.021978021978022 & 6593.4065934065934066 & 0 \\ 6593.4065934065934066 & 21978.021978021978022 & 0 \\ 0 & 0 & 7692.3076923076923077 \end{pmatrix}$$

Maka untuk elemen 1,

$$[B_1] = \begin{pmatrix} -0.0005 & 0 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.002 & 0 & -0.002 & 0 & 0.004 \\ -0.002 & -0.0005 & -0.002 & 0.0005 & 0.004 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{d_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.037507 \\ 0.022551 \\ 0.013521 \\ 0.009658 \end{pmatrix}$$

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1].\{d_1\} = \begin{pmatrix} 0.00001875399247640002839 \\ -0.0000064712423403600917956 \\ -0.000009657652542172380345 \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma_1\} = [E].\{\varepsilon_1\} = \begin{pmatrix} 0.36950812690751650222718259 \\ -0.018572408734946885243975049 \\ -0.07428963493978754111545891 \end{pmatrix}$$

Maka untuk elemen 2,

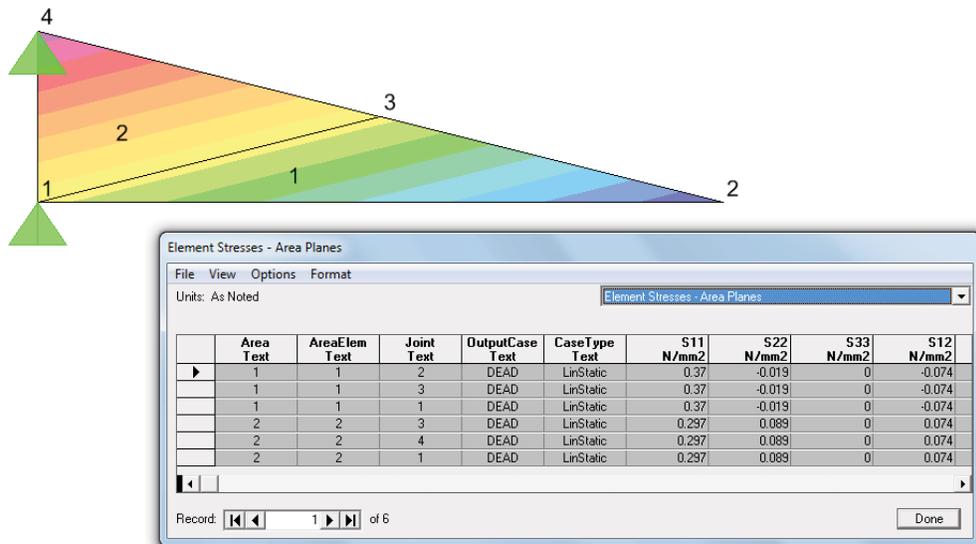
$$[B_2] = \begin{pmatrix} -0.0005 & 0 & 0.001 & 0 & -0.0005 & 0 \\ 0 & -0.002 & 0 & 0 & 0 & 0.002 \\ -0.002 & -0.0005 & 0 & 0.001 & 0.002 & -0.0005 \end{pmatrix}$$

$$\{d_2\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.013521 \\ 0.009658 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\varepsilon_2\} = [B_2] \cdot \{d_2\} = \begin{pmatrix} 0.000013520713559041332482 \\ 0 \\ 0.0000096576525421723803381 \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma_2\} = [E] \cdot \{\varepsilon_2\} = \begin{pmatrix} 0.2971585397591501644398576 \\ 0.08914756192774504933195728 \\ 0.074289634939787541062381982 \end{pmatrix}$$

Hasil tersebut selanjutnya diverifikasi dengan perangkat lunak SAP2000. Hasil analisis dengan SAP2000 selengkapnya ditampilkan pada Gambar L1.6.

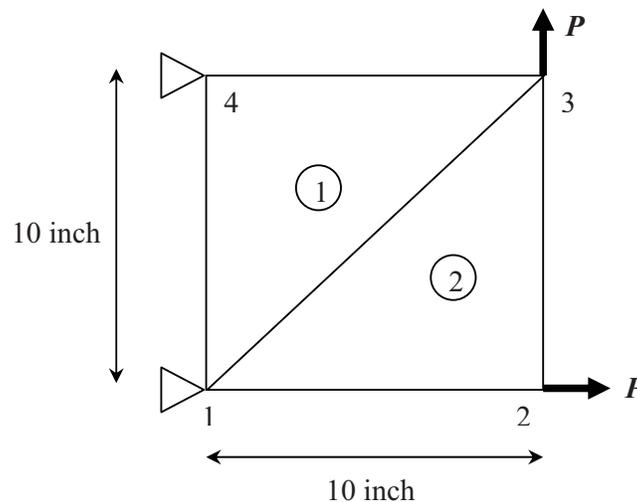


Gambar L1.6 Hasil analisis dengan SAP2000.

Kesimpulan yang didapat adalah bahwa hasil perhitungan antara manual dengan SAP2000 adalah sama.

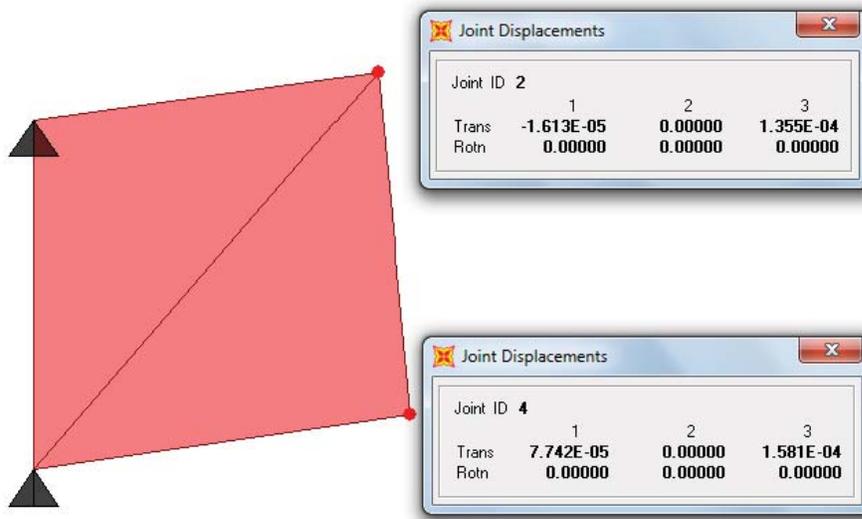
L1.3 Latihan Soal Ketiga – Elemen Segitiga Linier (CST)

Diketahui suatu kantilever dengan beban seperti terlihat pada Gambar L1.7. Dalam penyelesaian studi kasus ini, digunakan asumsi bahwa struktur disusun oleh 2 (dua) buah elemen segitiga linier CST. Diketahui struktur kantilever dengan material $E = 30000000$ Psi (atau $E = 206842,74$ MPa) dan $\nu = 0,4999$. Tebal elemen adalah 1 inch. Luas total elemen adalah 10×10 inch² (254×254 mm²) atau luas masing-masing elemen adalah $0,5 \times 10 \times 10$ inch² ($0,5 \times 254 \times 254$ mm²). Besar beban P adalah 1000 lb (4448,22 Newton).



Gambar L1.7 Struktur kantilever.

Hasil penyelesaian dengan perangkat lunak SAP2000 selengkapnya ditampilkan pada Gambar L1.8.



Gambar L1.8 Hasil analisis: deformasi struktur dengan SAP2000.

Sedangkan perhitungan manual selengkapnya sebagai berikut,

Menghitung matrik $[E]$,

$$\nu = 0,4999$$

$$E = 30000000 \text{ Psi}$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,99E7 & 1,99E7 & 0 \\ 1,99E7 & 3,99E7 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00E7 \end{bmatrix}$$

a. Elemen 1

$$x_i = 0 \quad ; \quad x_j = 10 \quad ; \quad x_m = 0$$

$$y_i = 0 \quad ; \quad y_j = 10 \quad ; \quad y_m = 10$$

$$t = 1 \text{ inch} \quad ; \quad A = 0,6 \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ inch}^2$$

$$\beta_i = y_j - y_m \quad \beta_j = y_m - y_i \quad \beta_m = y_i - y_j$$

$$\alpha_i = x_m - x_j \quad \alpha_j = x_i - x_m \quad \alpha_m = x_j - x_i$$

Menghitung matrik $[\mathbf{B}_1]$,

$$[\mathbf{B}_1] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

Menghitung matrik $[\mathbf{k}_1]$ dengan ukuran 6x6, yang kemudian disusun menjadi 8x8,

$$[\mathbf{k}_1] = [\mathbf{B}_1]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}_1] \cdot t \cdot A$$

b. Elemen 2

$$\begin{aligned} x_i = 0 & & ; x_j = 10 & & ; x_m = 10 \\ y_i = 0 & & ; y_j = 0 & & ; y_m = 10 \\ t = 1 \text{ inch} & & ; A = 0,6 \cdot 10 \cdot 10 = 50 \text{ inch}^2 \\ \beta_i = y_j - y_m & & \beta_j = y_m - y_i & & \beta_m = y_i - y_j \\ \alpha_i = x_m - x_j & & \alpha_j = x_i - x_m & & \alpha_m = x_j - x_i \end{aligned}$$

Menghitung matrik $[\mathbf{B}_2]$,

$$[\mathbf{B}_2] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & -0,1 & -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menghitung matrik $[\mathbf{k}_2]$ dengan ukuran 6x6, yang kemudian disusun menjadi 8x8,

$$[\mathbf{k}_2] = [\mathbf{B}_2]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{B}_2] \cdot t \cdot A$$

Selanjutnya menghitung matrik kekakuan elemen total, ukuran 8x8,

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}_1] + [\mathbf{k}_2]$$

Selanjutnya dengan menerapkan kondisi batas, dimana pada titik nodal 1 dan titik nodal 4 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal maupun vertikal pada kedua titik nodal tersebut sama dengan nol. Maka matrik kekakuan elemen $[\mathbf{k}]$ dapat ditulis menjadi sebagai berikut berukuran 4x4,

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} 2,49E7 & -1,49E7 & -5,00E6 & 9,99E6 \\ -1,49E7 & 2,39E7 & 5,00E6 & -1,99E7 \\ -5,00E6 & 5,00E6 & 2,49E7 & 0 \\ 9,99E6 & -1,99E7 & 0 & 2,49E7 \end{bmatrix}$$

Matrik beban $\{\mathbf{r}\}$ yaitu beban terdapat pada titik nodal 2 dan titik nodal 3 saja,

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix}$$

Maka dapat dihitung sebagai berikut (satuan deformasi dalam inch),

$$[\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = [\mathbf{k}]^{-1}\{\mathbf{r}\}$$

$$\{\mathbf{d}\} = \begin{bmatrix} 2,49E7 & -1,49E7 & -5,00E6 & 9,99E6 \\ -1,49E7 & 2,39E7 & 5,00E6 & -1,99E7 \\ -5,00E6 & 5,00E6 & 2,49E7 & 0 \\ 9,99E6 & -1,99E7 & 0 & 2,49E7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,000077 \\ 0,000158 \\ -0,000016 \\ 0,000135 \end{Bmatrix}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh memperlihatkan bahwa sama dengan hasil verifikasi dari perangkat lunak SAP2000.

Selanjutnya menghitung tegangan-tegangan yang terjadi pada elemen 1 dan elemen 2 (keterangan bahwa unit satuan dalam lb dan inch).

$$\{\sigma\} = [E].\{\epsilon\}$$

$$\{\sigma\} = [E].[B].\{\mathbf{d}\}$$

dimana,

$$[E] = \begin{pmatrix} 3.9994667910874122262e7 & 1.9993334488645973719e7 & 0 \\ 1.9993334488645973719e7 & 3.9994667910874122262e7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000666711114074272e7 \end{pmatrix}$$

Maka untuk elemen 1,

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ -0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}$$

$$\{d_1\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.000016129454981547445749 \\ 0.00013548174772426536392 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\varepsilon_1\} = [B_1] \cdot \{d_1\} = \begin{pmatrix} -0.000016129454981547445749 \\ 0 \\ 0.000013548174772426536392 \end{pmatrix}$$

$$\{\sigma_1\} = [E] \cdot \{\varepsilon_1\} = \begin{pmatrix} -64.509219557038438631329364 \\ -32.248158856563515472166397 \\ 135.4907804429615613625978 \end{pmatrix}$$

Dalam satuan N dan mm,

$$\{\sigma_1\} = [E] \cdot \{\varepsilon_1\} = \begin{pmatrix} -0.445 \\ -0.222 \\ 0.934 \end{pmatrix}$$

Maka untuk elemen 2,

$$[B_2] = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & -0,1 & -0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{d_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00007742035356682497438 \\ 0.00015805472749077372286 \\ -0.000016129454981547445749 \\ 0.00013548174772426536392 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon_2\} = [B_2] \cdot \{d_2\} = \begin{pmatrix} 0.000007742035356682497438 \\ -0.000002257297976650835894 \\ 0.0000064504918942401302731 \end{pmatrix}$$

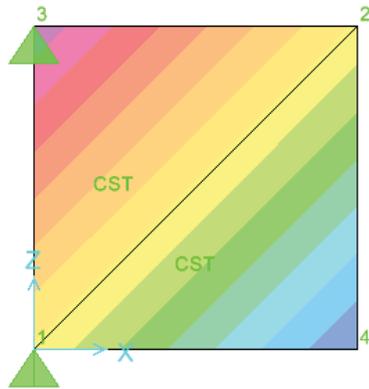
$$\{\sigma_2\} = [E] \cdot \{\varepsilon_2\} = \begin{pmatrix} 264.5092195570384386182963 \\ 64.50921955703843864732671 \\ 64.509219557038438629371853 \end{pmatrix}$$

Dalam satuan N dan mm,

$$\{\sigma_2\} = [E] \cdot \{\varepsilon_2\} = \begin{pmatrix} 1.824 \\ 0.445 \\ 0.445 \end{pmatrix}$$

Hasil tersebut selanjutnya diverifikasi dengan perangkat lunak SAP2000. Hasil analisis dengan SAP2000 selengkapnya ditampilkan pada Gambar L1.9.

Kesimpulan yang didapat adalah bahwa hasil perhitungan antara manual dengan SAP2000 adalah sama.



Element Stresses - Area Planes

File View Options Format

Units: As Noted

| Area Text | AreaElem Text | Joint Text | OutputCase Text | CaseType Text | S11 Lb/in2 | S22 Lb/in2 | S33 Lb/in2 | S12 Lb/in2 |
|-----------|---------------|------------|-----------------|---------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1 | 2 | DEAD | LinStatic | -64.51 | -32.25 | 0 | 135.49 |
| 1 | 1 | 3 | DEAD | LinStatic | -64.51 | -32.25 | 0 | 135.49 |
| 1 | 1 | 1 | DEAD | LinStatic | -64.51 | -32.25 | 0 | 135.49 |
| 2 | 2 | 4 | DEAD | LinStatic | 264.51 | 64.51 | 0 | 64.51 |
| 2 | 2 | 2 | DEAD | LinStatic | 264.51 | 64.51 | 0 | 64.51 |
| 2 | 2 | 1 | DEAD | LinStatic | 264.51 | 64.51 | 0 | 64.51 |

(a). Satuan lb dan inch.

| Area Text | AreaElem Text | Joint Text | OutputCase Text | CaseType Text | S11 N/mm2 | S22 N/mm2 | S33 N/mm2 | S12 N/mm2 |
|-----------|---------------|------------|-----------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 1 | 2 | DEAD | LinStatic | -0.445 | -0.222 | 0 | 0.934 |
| 1 | 1 | 3 | DEAD | LinStatic | -0.445 | -0.222 | 0 | 0.934 |
| 1 | 1 | 1 | DEAD | LinStatic | -0.445 | -0.222 | 0 | 0.934 |
| 2 | 2 | 4 | DEAD | LinStatic | 1.824 | 0.445 | 0 | 0.445 |
| 2 | 2 | 2 | DEAD | LinStatic | 1.824 | 0.445 | 0 | 0.445 |
| 2 | 2 | 1 | DEAD | LinStatic | 1.824 | 0.445 | 0 | 0.445 |

(b). Satuan N dan mm.

Gambar L1.9 Hasil analisis dengan SAP2000.

L1.4 Latihan Soal Keempat – Elemen Segiempat Bilinier (Q4)

Diketahui balok beton dengan modulus elastisitas sebesar 23500 MPa dan rasio poisson sebesar 0,3. Balok mempunyai bentuk penampang persegi panjang 300 mm x 500 mm. Panjang bentang balok 2 meter. Beban yang bekerja adalah beban terpusat sebesar 3000 kg (Gambar L1.10).



Gambar L1.10 Balok dengan beban terpusat P.

Pertanyaan: Hitunglah deformasi yang terjadi pada tiap-tiap titik nodal struktur balok tersebut, apabila dikerjakan dengan memodelkan balok sebagai satu elemen segiempat bilinear (Q4).

Penyelesaian sebagai berikut:

Perhitungan secara manual langkah demi langkah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 & ; & & y_1 &= 0 \\ x_2 &= 2000 & ; & & y_2 &= 0 \\ x_3 &= 2000 & ; & & y_3 &= 500 \\ x_4 &= 0 & ; & & y_4 &= 500 \end{aligned}$$

$$W_i = W_j = 1,0$$

$$\nu = 0,3$$

$$E = 23500 \text{ MPa}$$

$$t = 300 \text{ mm}$$

a. Titik Nodal 1:

$$\xi = -0,5773$$

$$\eta = -0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_1]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_1] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_1] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{J}_1]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_1] = [\mathbf{J}_1]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_1]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_1] = [\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_1] t \left[[\mathbf{J}_1] \right] W_i W_j$$

Diperoleh nilai $[\mathbf{k}_1]$ sebagai berikut,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1.989 \times 10^6 & 7.834 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & -3.251 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & -2.487 \times 10^5 \\ 7.834 \times 10^5 & 4.926 \times 10^6 & -2.487 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -3.251 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 \\ 1.503 \times 10^5 & -2.487 \times 10^5 & 4.222 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 & -4.024 \times 10^4 & 6.656 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & 3.918 \times 10^5 \\ -3.251 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & 4.509 \times 10^5 & 8.701 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 4.477 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 \\ -5.323 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 & -4.024 \times 10^4 & 8.701 \times 10^4 & 1.425 \times 10^5 & 5.613 \times 10^4 & 4.301 \times 10^5 & 6.656 \times 10^4 \\ -2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 6.656 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 5.613 \times 10^4 & 3.53 \times 10^5 & 8.701 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 \\ -1.607 \times 10^6 & -3.251 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & 4.477 \times 10^5 & 4.301 \times 10^5 & 8.701 \times 10^4 & 1.709 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 \\ -2.487 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 3.918 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 6.656 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & 4.829 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

b. Titik Nodal 2:

$$\xi = 0,5773$$

$$\eta = -0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_2]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_2] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left[[\mathbf{J}_2] \right] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_2] = [\mathbf{J}_2]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_2]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_2] = [\mathbf{B}_2]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_2] t |[\mathbf{J}_2]| W_i W_j$$

Diperoleh nilai $[\mathbf{k}_2]$ sebagai berikut,

$$\mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 4.222 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & 2.487 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & -3.918 \times 10^5 & -4.024 \times 10^4 & -6.656 \times 10^4 \\ 2.097 \times 10^5 & 4.509 \times 10^5 & 3.251 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -4.477 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -8.701 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 \\ 1.503 \times 10^5 & 3.251 \times 10^5 & 1.989 \times 10^6 & -7.834 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & 2.487 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 \\ 2.487 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -7.834 \times 10^5 & 4.926 \times 10^6 & 3.251 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 \\ -5.323 \times 10^5 & -4.477 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & 3.251 \times 10^5 & 1.709 \times 10^6 & 2.097 \times 10^5 & 4.301 \times 10^5 & -8.701 \times 10^4 \\ -3.918 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 2.487 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 2.097 \times 10^5 & 4.829 \times 10^6 & -6.656 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 \\ -4.024 \times 10^4 & -8.701 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & 4.301 \times 10^5 & -6.656 \times 10^4 & 1.425 \times 10^5 & -5.613 \times 10^4 \\ -6.656 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -8.701 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -5.613 \times 10^4 & 3.53 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

c. Titik Nodal 3:

$$\xi = 0,5773$$

$$\eta = 0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_3]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_3] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{J}_3] &= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \\
|[\mathbf{J}_3]| &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \\
[\mathbf{\Gamma}_3] &= [\mathbf{J}_3]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_3]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \\
[\mathbf{B}_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \\
[\mathbf{k}_3] &= [\mathbf{B}_3]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_3] t |[\mathbf{J}_3]| W_i W_j
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai $[\mathbf{k}_3]$ sebagai berikut,

$$\mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1.425 \times 10^5 & 5.613 \times 10^4 & 4.301 \times 10^5 & 6.656 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 & -4.024 \times 10^4 & 8.701 \times 10^4 \\ 5.613 \times 10^4 & 3.53 \times 10^5 & 8.701 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 6.656 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 \\ 4.301 \times 10^5 & 8.701 \times 10^4 & 1.709 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & -3.251 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & 4.477 \times 10^5 \\ 6.656 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & 4.829 \times 10^6 & -2.487 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 3.918 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 \\ -5.323 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & -2.487 \times 10^5 & 1.989 \times 10^6 & 7.834 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & -3.251 \times 10^5 \\ -2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -3.251 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 7.834 \times 10^5 & 4.926 \times 10^6 & -2.487 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 \\ -4.024 \times 10^4 & 6.656 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & 3.918 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & -2.487 \times 10^5 & 4.222 \times 10^5 & -2.097 \times 10^5 \\ 8.701 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 4.477 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -3.251 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -2.097 \times 10^5 & 4.509 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

d. Titik Nodal 4:

$$\xi = -0,5773$$

$$\eta = 0,5773$$

Matrik jacobian atau $[\mathbf{J}_4]$ diperoleh sebagai berikut,

$$[\mathbf{J}_4] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_4] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$|[\mathbf{J}_4]| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

$$[\mathbf{\Gamma}_4] = [\mathbf{J}_4]^{-1} = \frac{1}{|[\mathbf{J}_4]|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 & 0 \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & 0 & N_{4,\eta} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{k}_4] = [\mathbf{B}_4]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_4] t |[\mathbf{J}_4]| W_i W_j$$

Diperoleh nilai $[\mathbf{k}_4]$ sebagai berikut,

$$\mathbf{k}_4 = \begin{pmatrix} 1.709 \times 10^6 & 2.097 \times 10^5 & 4.301 \times 10^5 & -8.701 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & -4.477 \times 10^5 & -1.607 \times 10^6 & 3.251 \times 10^5 \\ 2.097 \times 10^5 & 4.829 \times 10^6 & -6.656 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -3.918 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 2.487 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 \\ 4.301 \times 10^5 & -6.656 \times 10^4 & 1.425 \times 10^5 & -5.613 \times 10^4 & -4.024 \times 10^4 & -8.701 \times 10^4 & -5.323 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 \\ -8.701 \times 10^4 & 1.283 \times 10^6 & -5.613 \times 10^4 & 3.53 \times 10^5 & -6.656 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 \\ -5.323 \times 10^5 & -3.918 \times 10^5 & -4.024 \times 10^4 & -6.656 \times 10^4 & 4.222 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & 2.487 \times 10^5 \\ -4.477 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & -8.701 \times 10^4 & -3.172 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & 4.509 \times 10^5 & 3.251 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 \\ -1.607 \times 10^6 & 2.487 \times 10^5 & -5.323 \times 10^5 & 2.097 \times 10^5 & 1.503 \times 10^5 & 3.251 \times 10^5 & 1.989 \times 10^6 & -7.834 \times 10^5 \\ 3.251 \times 10^5 & -4.793 \times 10^6 & 2.097 \times 10^5 & -1.319 \times 10^6 & 2.487 \times 10^5 & 1.185 \times 10^6 & -7.834 \times 10^5 & 4.926 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya menghitung matrik kekakuan gabungan sebagai berikut,

$$[\mathbf{k}] = [\mathbf{k}_1] + [\mathbf{k}_2] + [\mathbf{k}_3] + [\mathbf{k}_4]$$

Matrik [k] tersebut berukuran 8x8.

$$K = \begin{pmatrix} 4.262 \times 10^6 & 1.259 \times 10^6 & 1.161 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & -2.129 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & -3.294 \times 10^6 & 9.684 \times 10^4 \\ 1.259 \times 10^6 & 1.056 \times 10^7 & 9.684 \times 10^4 & 4.936 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & -5.275 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & -1.022 \times 10^7 \\ 1.161 \times 10^6 & 9.684 \times 10^4 & 4.262 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & -3.294 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & -2.129 \times 10^6 & 1.259 \times 10^6 \\ -9.684 \times 10^4 & 4.936 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & 1.056 \times 10^7 & 9.684 \times 10^4 & -1.022 \times 10^7 & 1.259 \times 10^6 & -5.275 \times 10^6 \\ -2.129 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & -3.294 \times 10^6 & 9.684 \times 10^4 & 4.262 \times 10^6 & 1.259 \times 10^6 & 1.161 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 \\ -1.259 \times 10^6 & -5.275 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & -1.022 \times 10^7 & 1.259 \times 10^6 & 1.056 \times 10^7 & 9.684 \times 10^4 & 4.936 \times 10^6 \\ -3.294 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & -2.129 \times 10^6 & 1.259 \times 10^6 & 1.161 \times 10^6 & 9.684 \times 10^4 & 4.262 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 \\ 9.684 \times 10^4 & -1.022 \times 10^7 & 1.259 \times 10^6 & -5.275 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 & 4.936 \times 10^6 & -1.259 \times 10^6 & 1.056 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Dengan menerapkan kondisi batas, dimana pada titik nodal 1 dan titik nodal 4 terdapat tumpuan, sehingga translasi horizontal dan translasi vertical dicegah, maka $u_1 = v_1 = v_2 = u_4 = v_4 = 0$, sehingga persamaan matrik kekakuan menjadi berukuran 3x3 sebagai berikut,

$$K = \begin{pmatrix} 4.262 \times 10^6 & -3.294 \times 10^6 & -9.684 \times 10^4 \\ -3.294 \times 10^6 & 4.262 \times 10^6 & 1.259 \times 10^6 \\ -9.684 \times 10^4 & 1.259 \times 10^6 & 1.056 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Matrik beban (satuan Newton) sebagai berikut,

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.943 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dapat dihitung matrik peralihan (unit satuan mm) sebagai berikut,

$$[k] \cdot \{d\} = \{r\}$$

$$\{d\} = [k]^{-1} \cdot \{r\}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1.542 \times 10^{-3} \\ 2.084 \times 10^{-3} \\ -3.022 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Hasil perhitungan yang diperoleh memperlihatkan bahwa hasilnya hampir sama (%-relatif perbedaannya kecil) dengan hasil verifikasi dari perangkat lunak SAP2000 (Gambar L1.11).



| Joint Displacements | | | | | | |
|---|------------|------------------|----------------|----------|-------|-----------|
| File View Format-Filter-Sort Select Options | | | | | | |
| Units: As Noted | | | | | | |
| | Joint Text | Output Case Text | Case Type Text | U1 mm | U2 mm | U3 mm |
| ▶ | 1 | DEAD | LinStatic | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | DEAD | LinStatic | 0.001505 | 0 | 0 |
| | 3 | DEAD | LinStatic | 0.002247 | 0 | -0.003127 |
| | 4 | DEAD | LinStatic | 0 | 0 | 0 |

Gambar L1.11 Hasil perhitungan dengan SAP2000 (satuan mm).

L1.5 Referensi

1. Computer and Structures, Inc. 2006. "SAP2000 version 8.3.8 Reference", Computer and Structures, Inc., Berkeley.
2. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley and Sons, Inc., New York, USA.

3. Grandin, H. (1986). "Fundamentals of The Finite Element Method", Macmillan Publishing Company, New York, USA.
4. Kuntjoro, W. (2005). "An Introduction to The Finite Element Method", MacGraw-Hill Education Asia.
5. ADINA R&D, Inc. (2009). "ADINA version 8.6.2 Theory and Modelling Guide Volume 1", ADINA R&D, Inc., 71 Elton Ave., Watertown, MA 02472, USA.