Persamaan differensial adalah gabungan antara fungsi yang tidak diketahui secara eksplisit dan turunan.

Jenis persamaan diferensial, yaitu :

1) Persamaan diferensial biasa (*Ordinary Differential Equations*, ODE) yang hanya terdiri dari satu variabel bebas.
2) Persamaan diferensial parsial (*Partial Differential Parsial*, PDE) yang terdiri dari dua atau lebih variabel bebas.

6.1. Definisi Persamaan Differensial Biasa (PDB)

PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas, x. Kelompok PDB menurut ordenya,

1) PDB orde 1 yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama
2) PDB orde 2 yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan kedua
3) PDB orde 3 yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga
4) Dan seterusnya.

Contoh :

1) $\frac{dx}{dy} = x + y$
2) $y' = x^2 + y^2$
3) $\frac{2dy}{dx} + x^2 y - y = 0$
4) $y'' + y' \cos x - 3y = \sin 2x$
5) $2y''' - 23y' = 1 - y''$
6) Hukum Newton II tentang gerak, $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$
7) Hukum Fourier tentang panas, $Heat\ Flux = -k\frac{dT}{dx}$
8) Hukum Fick tentang difusi, $Mass\ Flux = -D\frac{dC}{dx}$

Bentuk baku PDB Orde 1,

$y' = f(x, y), \qquad y(0) = y$

Transformasi bentuk diferensial biasa ke bentuk PDB orde 1,

1) $2y' + xy = 100; \;\; y(0) = 1$

   Bentuk baku :

   $$y' = \frac{100 - xy}{2}; \qquad y(0) = 1$$

2) $-xy' + \frac{2y}{x} = y' - y; \;\; y(1) = -1$

   Bentuk baku :

   $$-\mathrm{xy}' - \mathrm{y}' = -\mathrm{y} - \frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

   $$-y'(x+1) = -y - \frac{2y}{x}$$

   $$y'(x+1) = y + \frac{2y}{x}$$

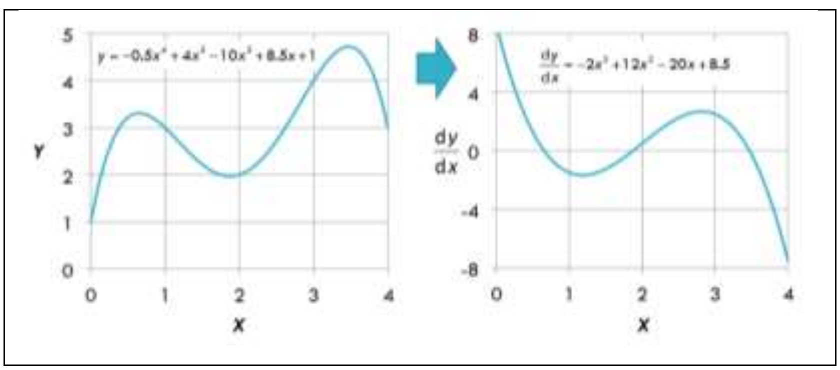
   $$y' = \frac{y + 2y/2}{x+1}; \quad y(1) = -1$$

Contoh 1.

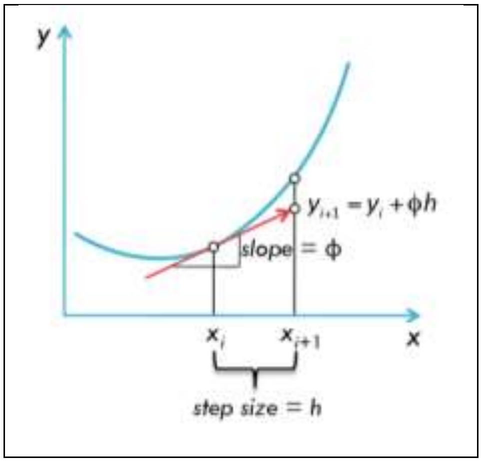
$$y = 0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Maka,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$



6.1.1. Metode Satu Langkah



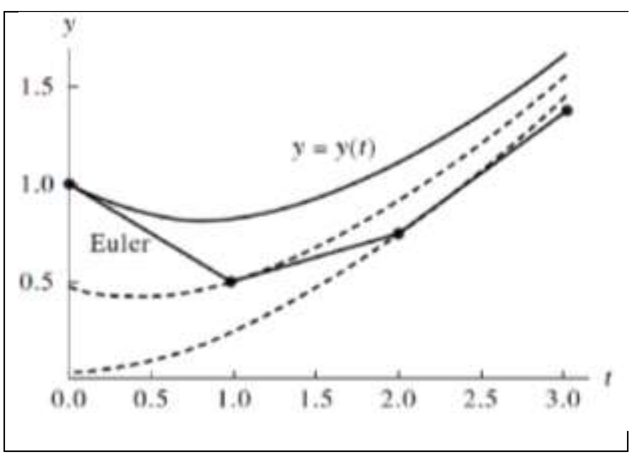
$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \varphi h}$$

Kemiringan ϕ dipakai untuk mengesktrapolasikan nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1}

METODE EULER

Rumus metode Euler,

$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r)$



Gambar 6.1. Deskripsi Geometrik Metode Euler

Dari titik (t_0, y_0) dibuat garis (t_1, y_1) dengan kemiringan m = y'(t_0) = f(t_0, y_0) dengan lebar h, sebagai hampiran dari y = y(t_1). Dari titik (t_1, y_1) dibuat garis (t_2, y_2) dengan kemiringan m = y'(t_1) = f(t_1, y_1) dengan lebar h, sebagai hampiran dari y = y(t_2), dan seterusnya.

Pada ilustrasi geometrik diatas dapat dilihat bahwa lebar h sangat berpengaruh terhadap galat perhitungan. Semakin kecil lebar h semakin kecil galat perhitungan dan semakin banyak iterasi / pengulangan yang di lakukan. Galat pada setiap langkah adalah

$$e_{k+1} = y(t_{k+1}) - y_{k+1} = y(t_{k+1}) - \left(y_k + hf(t_k, y_k)\right) \approx y''(c_{k+1})\frac{h^2}{2} = O(h^2)$$

Setelah M langkah, galat terakumulasi menjadi

$$E = \sum_{k=0}^{M-1} e_{k+1} \approx \sum_{k=0}^{M-1} y''(c_{k+1})\frac{h^2}{2} = y''(c)\frac{b-a}{2}h = O(h)$$

Contoh :

Diketahui PDB,

$$\frac{dy}{dx} = x + y; \;\; y(0) = 1$$

Gunakan metode Euler untuk menghitung y(0,10) dengan h = 0,02 !

(solusi sejati=1,1103)

Penyelesaian :

Persamaan Euler PDB menjadi,

$$\boldsymbol{y_{r+1} = y_r + 0,02(x_r + y_r)}$$

x_0 = 0, y_0 = 1

x_1 = 0.02, y_0 = 1 + 0.02(0 + 1) = 1,02

x_2 = 0.04, y_0 = 1.02 + 0.02(0.02 + 1.02) = 1,0408

x_3 = 0.06, y_0 = 1.0408 + 0.02(0.04 + 1.0408) = 1,0624

x_4 = 0.08, y_0 = 1.0624 + 0.02(0.06 + 1.0624) = 1,0848

x_5 = 0.10, y_0 = 1.0848 + 0.02(0.08 + 1.0848) = 1,1081

jadi y(0,10) = 1,1081

error/galat = |1.1103-1.1081| = 0.0022