

BAB VI INTERPOLASI DAN REGRESI

6.1. Definisi

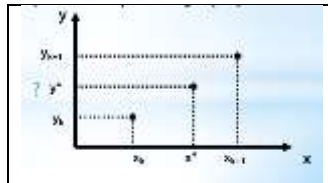
Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik diantara 2 titik yang nilai fungsi dari ke 2 titik tersebut telah diketahui. Cara menentukan harga fungsi f di titik $x^* \in [X_0, X_n]$ dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui $[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

X	X_0	X_1	X_2	...	X_n
F(X)	$F(X_0)$	$F(X_1)$	$F(X_2)$...	$F(X_n)$

Jenis interpoasi adalah interpolasi linier, interpolasi kuadrat, interpolasi lagrange dan interpolasi newton.

6.2. Interpolasi Linier

Misalkan ada m bilangan X_1, X_2, \dots, X_m dan bilangan lain yang berkaitan Y_1, Y_2, \dots, Y_m maka masalahnya adalah berapa harga Y^* pada $X^* \in [X_k, X_{k+1}]$



Ambil ruas garis yang menghubungkan 2 buah titik (X_k, Y_k) dan (X_{k+1}, Y_{k+1}) dituliskan sebagai (X_0, Y_0) dan (X_1, Y_1) maka akan diperoleh persamaan garisnya adalah

$$\frac{Y - Y_0}{X - X_0} = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$$

$$Y = Y_0 + \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0} (X - X_0) \quad (6.1)$$

Kasus 6.1

Perkiraan jumlah penduduk pada tahun 1968 berdasarkan data tabulasi berikut :

Tahun	1960	1970
Jumlah Penduduk (juta)	179,3	203,2

Penyelesaian :

$$(X_0, Y_0) = (1960, 179.3)$$

$$(X_1, Y_1) = (1970, 203.2)$$

Dengan menggunakan persamaan (6.1)

$$Y(1968) = 179,3 + \frac{203,2 - 179,3}{1970 - 1960} (1968 - 1960) = 198,4$$

Jadi taksiran jumlah penduduk pada tahun 1968 adalah 198,4

Kasus 6.2.

Diketahui data sebagai berikut :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

Tentukan harga Y pada $X = 6,5$!

Penyelesaian :

$(X_0, Y_0) = (6, 36)$ dan $(X_1, Y_1) = (7, 49)$

$$Y^* = 36 + \frac{49 - 36}{7 - 6} (6,5 - 6) = 42,5$$

Atau solusi sejati dapat kita cari dengan membuat persamaan dan dihasilkan

$$Y = X^2$$

$$Y = 6,5^2 = 42,25$$

Galat / error sebesar $|42,5 - 42,25| = 0,25$

Pada banyak kasus, interpolasi linier tidak memuaskan karena fungsi yang diinterpolasi berbeda cukup jauh dari fungsi linier,

6.2. Interpolasi Kuadrat

Untuk mengatasi hal ini dapat digunakan polinomial lain yang berderajat dua (interpolasi kuadrat) atau lebih mendekati fungsinya. Pada interpolasi kuadrat digunakan 3 buah titik (X_0, Y_0) , (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) .

$$Y = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1)$$

Dimana

$$b_0 = Y_0$$

$$b_1 = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$$

$$b_2 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$b_2 = \frac{C_1 - b_1}{X_2 - X_0}$$

Kasus 6.3.

Diberikan titik :

X	8.0	9.0	9.5
ln(X)	2.0794	2.1972	2.2513

Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadratik !

Penyelesaian :

$$(X_0, Y_0) = (8.0, 2.0794)$$

$$(X_1, Y_1) = (9.0, 2.1972)$$

$$(X_2, Y_2) = (9.5, 2.2513)$$

Tentukan nilai b_0, b_1, b_2

$$b_0 = 2.0794$$

$$b_1 = \frac{2.1972 - 2.0794}{9.0 - 8.0} = 0.1178$$

$$C_1 = \frac{2.2513 - 2.1972}{9.5 - 9.0} = 0.1082$$

$$b_2 = \frac{0.1082 - 0.1178}{9.5 - 8.0} = -0.0064$$

$$Y = 2.0794 + 0.1178(9.2 - 8.0) - 0.0064(9.2 - 8.0)(9.2 - 9.0)$$

$$Y = 2.0794 + 0.14136 - 0.001536 = 2.219224$$

6.4. Interpolasi Beda Bagi Newton

Interpolasi beda bagi Newton menggunakan 4 buah titik buah titik $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ dan (X_3, Y_3) nilai Y ditentukan berdasarkan rumus :

$$Y = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + b_3(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)$$

Dimana :

$$b_0 = Y_0$$

$$b_1 = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$$

$$C_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$$d_1 = \frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2}$$

$$b_2 = \frac{C_1 - b_1}{X_2 - X_0}$$

$$C_2 = \frac{d_1 - C_1}{X_3 - X_1}$$

$$b_3 = \frac{C_2 - b_2}{X_3 - X_0}$$

Kasus 6.4.

Diberikan data :

X	1	4	7	10
Y	3	5	9	16

Tentukan nilai Y pada X = 5 !

Penyelesaian :

Kita akan menggunakan 4 titik yakni

$$(X_0, Y_0) = (1, 3)$$

$$(X_1, Y_1) = (4, 5)$$

$$(X_2, Y_2) = (7, 9)$$

$$(X_3, Y_3) = (10, 16)$$

$$b_0 = Y_0 = 3$$

$$b_1 = \frac{5 - 3}{4 - 1} = 0,667$$

$$C_1 = \frac{9 - 5}{7 - 4} = 1,333$$

$$d_1 = \frac{16 - 9}{10 - 7} = 2,333$$

$$b_2 = \frac{1,333 - 0,667}{7 - 1} = 0,194$$

$$C_2 = \frac{2,333 - 1,333}{10 - 4} = 0,167$$

$$b_3 = \frac{0,167 - 0,194}{10 - 1} = -0,003$$

Sehingga,

$$Y = 3 + 0,667(5 - 1) + 0,194(5 - 1)(5 - 4) - 0,003(5 - 1)(5 - 7)$$

$$Y = 3 + 2,667 - 0,776 + 0,024$$

$$Y = 4,915$$

6.5. Interpolasi Lagrange

Interpolasi Lagrange orde 1, nilai Y pada nilai X diperoleh dengan rumus :

$$Y = \sum_{i=0}^n L_i Y_i$$

Dimana

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - X_j}{X_i - X_j}$$

Lagrange Orde 2, menggunakan 2 titik (X_0, Y_0) dan (X_1, Y_1) , nilai Y pada X diperoleh dengan rumus :

$$Y = L_0 \cdot Y_0 + L_1 \cdot Y_1$$

Dimana :

$$L_0 = \frac{X - X_1}{X_0 - X_1}$$

$$L_1 = \frac{X - X_0}{X_1 - X_0}$$