

**BAB III**  
**TURUNAN NUMERIK**

**3.1. RUMUS TURUNAN**

---

**RUMUS TURUNAN PERTAMA**

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.1)$$

$$f'_0 = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \quad \text{Selisih mundur} \quad (3.2)$$

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.3)$$

$$f'_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} + O(h^2) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.4)$$

$$f'_0 = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} + O(h^4) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.5)$$

---

**RUMUS TURUNAN KEDUA**

$$f''_0 = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.6)$$

$$f''_0 = \frac{f_{-2} - 2f_{-1} + f_0}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Selisih mundur} \quad (3.7)$$

$$f''_0 = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.8)$$

$$f''_0 = \frac{-f_3 + 4f_2 - 5f_1 + 2f_0}{12h} + O(h^2) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.9)$$

$$f''_0 = \frac{f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.10)$$

---

**RUMUS TURUNAN KETIGA**

$$f'''_0 = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{h^3} + O(h) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.11)$$

$$f'''_0 = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} + O(h^2) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.12)$$

---

**RUMUS TURUNAN KEEMPAT**

$$f^{(iv)}_0 = \frac{f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0}{h^4} + O(h) \quad \text{Selisih maju} \quad (3.13)$$

$$f^{(iv)}_0 = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^2} + O(h^2) \quad \text{Selisih pusat} \quad (3.14)$$

### 3.2. PEMBAHASAN BEBERAPA KASUS

#### KASUS 3.1. Sumber Rinaldi Munir

Tentukan nilai hampiran untuk  $f'(1,9)$  dengan menggunakan rumus selisih pusat  $O(h^2)$  untuk turunan pertama ( $f'_0$ ), turunan kedua ( $f''_0$ ), turunan ketiga ( $f'''_0$ ) dan turunan  $f^{iv}_0$  untuk data berikut ini :

| X          | F(x)         |                         |
|------------|--------------|-------------------------|
| 1,3        | 3,669        |                         |
| 1,5        | 4,482        | $X_{-2}$                |
| 1,7        | 5,474        | $X_{-1}$                |
| <b>1,9</b> | <b>6,686</b> | <b><math>X_0</math></b> |
| 2,1        | 8,166        | $X_1$                   |
| 2,3        | 9,974        | $X_2$                   |
| 2,5        | 12,182       |                         |

Penyelesaian :

**Catatan : Rumus selisih pusat untuk Orde( $h^2$ ) menggunakan persamaan 3.3., 3.6, 3.12 dan 3.14**

Diketahui :  $X_{-2} = 1.5$ ,  $X_{-1} = 1.7$ ,  $X_0 = 1.9$ ,  $X_1 = 2.1$  dan  $X_2 = 2.3$  dan  $h = 0.2$

#### Turunan pertama

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} = \frac{6,686 - 4,482}{2(0,2)} = 5,510$$

$$|\varepsilon| = |6,686 - 5,510| = 1,176$$

#### Turunan kedua

$$f''_0 = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = \frac{8,166 - 2(6,686) + 5,474}{0,2^2} = 6,700$$

$$|\varepsilon| = |6,686 - 6,700| = 0,014$$

#### Turunan ketiga

$$f'''_0 = \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} = \frac{9,974 - 2(8,166) + 2(5,474) - 4,482}{2(0,2^3)} = 6,750$$

$$|\varepsilon| = |6,686 - 6,750| = 0,064$$

#### Turunan keempat

$$f^{(iv)}_0 = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^2} = \frac{9,974 - 4(8,166) + 6(6,686) - 4(5,474) + 4,482}{0,2^2} = 7,500$$

$$|\varepsilon| = |6,686 - 7,500| = 0,814$$

Kasus ini konvergen pada turunan kedua.

### KASUS 3.2. *Sumber Rinaldi Munir*

Tentukan nilai hampiran untuk  $f'(1,4)$  dengan menggunakan rumus selisih pusat  $O(h^2)$  :

| X          | F(x)         |                       |
|------------|--------------|-----------------------|
| <b>1,3</b> | <b>3,669</b> | <b>X<sub>-1</sub></b> |
| <b>1,5</b> | <b>4,482</b> | <b>X<sub>1</sub></b>  |
| 1,7        | 5,474        |                       |
| 1,9        | 6,686        |                       |
| 2,1        | 8,166        |                       |
| 2,3        | 9,974        |                       |
| 2,5        | 12,182       |                       |

Penyelesaian :

**Catatan :** Lihat Rumus Turunan Pertama untuk selisih pusat kita akan menggunakan rumus 3.3.

Diketahui :  $X_{-1} = 1,3$ ,  $X_0 = 1,4$ ,  $X_1 = 1,5$  dan  $h = 0,1$

**Orde ( $h^2$ )** maka  $f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$

$$f'_0 = \frac{4,482 - 3,669}{2(0,1)} = 4,065$$

### TUGAS

Tentukan nilai hampiran Orde (h) dan Orde ( $h^2$ ) untuk  $f'(1,3)$  !

| X   | F(x)   |                |
|-----|--------|----------------|
| 1,3 | 3,669  | X <sub>0</sub> |
| 1,5 | 4,482  | X <sub>1</sub> |
| 1,7 | 5,474  | X <sub>2</sub> |
| 1,9 | 6,686  |                |
| 2,1 | 8,166  |                |
| 2,3 | 9,974  |                |
| 2,5 | 12,182 |                |

Penyelesaian :

Nilai  $X_0 = 1,3$  tidak memiliki nilai  $X_{-1}$  (nilai sebelumnya) sehingga kita menggunakan rumus hampiran selisih maju, gunakan persamaan 3.1. dan 3.4.

Diketahui :  $X_0 = 1,3$   $X_1 = 1,5$  dan  $X_2 = 1,7$   $h = 0,2$

**Orde(h)** maka  $f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h}$  maka

$$f'_0 = \frac{4,482 - 3,669}{0,2} = 4,065$$

**Orde ( $h^2$ )** maka  $f'_0 = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$ , maka

$$f'_0 = \frac{-3(3,669) + 4(4,482) - 5,474}{2(0,2)} = 3,6175$$

---

#### KASUS 3.4.

Tentukan nilai hampiran Orde (h) dan Orde ( $h^2$ ) untuk  $f'(1,3)$  !

| X   | F(x)   |       |
|-----|--------|-------|
| 1,3 | 3,669  | $X_0$ |
| 1,5 | 4,482  | $X_1$ |
| 1,7 | 5,474  | $X_2$ |
| 1,9 | 6,686  |       |
| 2,1 | 8,166  |       |
| 2,3 | 9,974  |       |
| 2,5 | 12,182 |       |