Pertemuan 7. Solusi Persamaan Linier

Diana, S.Si., M.Kom.

7.1. METODE ELIMINASI

Kasus 7.1.

Selesaikan persamaan linier sebagai berikut :

x + 2y + z = 1 (1)

3x + 3y + z = 1 (2)

2x + y + 2z = 1 (3)

Selesaikan dengan metode eliminasi !

PENYELESAIAN :

Eliminasi Y dari persamaan (1) dan (2)

x + 2y + z = 1 | dikali 3 | 3x + 6y + 3z = 3

3x + 3y + z = 1 | dikali 2 | 6x + 6y + 2z = 2 -

-3x + z = 1 (4)

Eliminasi Y dari persamaan (1) dan (3)

2x + y + 2z = 1 | dikali 2 | 4x + 2y + 4z = 2

x + 2y + z = 1 | dikali 1 | x + 2y + z = 1 -

3x + 3z = 1 (5)

Eliminasi Z dari persamaan (4) dan (5)

-3x + z = 1 | dikali 3| -9x + 3z =3

3x + 3z = 1 | dikali 1| 3x + 3z = 1 -

-12x = 2

-x = 2/12

x = -2/12 = -1/6

substitusi x = -1/6 ke persamaan (5)

3(-1/6) + 3z = 1

3z = 1+ 3/6

3z = 9/6

Z = 9/6 . 1/3

Z = 9/18 maka z = 1/2

Subsitusi x= -1/6 dan z = ½ ke persamaan (1)

$$-\frac{1}{6}+2y+\frac{1}{2}=1$$

$$2y=1+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}$$

$$2y=\frac{6+1-3}{6}$$

$$y=\frac{4}{6}.\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Hasilnya adalah (x,y,z) = $(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

7.2. METODE SUBSTITUSI

Kasus 7.2.

Selesaikan persamaan linier sebagai berikut :

x + 2y + z = 1 (1)

3x + 3y + z = 1 (2)

2x + y + 2z = 1 (3)

Selesaikan dengan metode substitusi !

PENYELESAIAN :

Ubah persamaan (1) dalam bentuk x

x + 2y + z = 1

$$x=1-2y-z$$

Substitusi $\boldsymbol{x=1-2y-z}$ ke persamaan (2)

$$3(1-2y-z)+3y+z=1$$

$$3-6y-3z+3y+z=1$$

$$-3y-2z=1-3$$

$-3y - 2z = -2$ (4)

Substitusi $x = 1 - 2y - z$ ke persamaan (3)

$2(1 - 2y - z) + y + 2z = 1$

$2 - 4y - 2z + y + 2z = 1$

$-3y = 1 - 2$

$-3y = -1$

$-y = -\frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}$

Substitusi $y = \frac{1}{3}$ ke persamaan (4)

$-3(\frac{1}{3}) - 2z = -2$

$-1 - 2z = -2$

$-2z = -2 + 1$

$-2z = -1$

$-z = -\frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2}$

Substitusi $y = \frac{1}{3}$ dan $z = \frac{1}{2}$ ke persamaan (1)

x + 2y + z = 1

$x + 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = 1$

$x = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

$x = \frac{6 - 4 - 3}{6}$

$x = -\frac{1}{6}$

Hasilnya adalah (x,y,z) = $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

7.3. Metode Matriks Invers

Kasus 7.2.

Selesaikan persamaan linier sebagai berikut :

x + 2y + z = 1   (1)

3x + 3y + z = 1   (2)

2x + y + 2z = 1   (3)

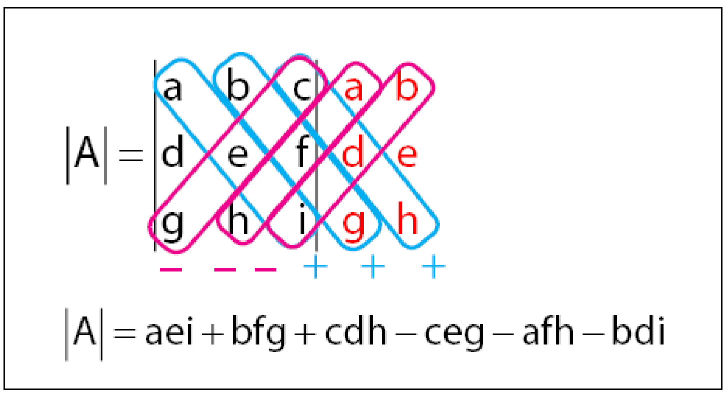
Selesaikan dengan metode matriks invers !

PENYELESAIAN :

A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Menentukan nilai determinan A

Menentukan determinan matriks ordo 3x3 menggunakan **Aturan Sarrus.**



|A| = $\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

|A| = det(A)= $1.3.1 + 2.1.2 + 1.3.1 - 2.3.1 - 1.1.1 - 1.3.2$

$|\mathrm{A}| = \det(A) = 6 + 4 + 3 - 6 - 1 - 12 = -6$

Menentukan Matriks Minor

Matriks minor M_{ij} adalah matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke i dan kolom ke j dari matriks A sehingga diperoleh matriks berordo 2x2

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Menentukan kofaktor A

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3.2 - 1.1 = 6 - 1 = 5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}| = -\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -(3.2 - 2.1) = -(6 - 2) = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}| = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3.1 - 2.3 = 3 - 6 = -3$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}| = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -(2.2 - 1.1) = -(4 - 1) = -3$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = |M_{22}| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1.2 - 2.1 = 2 - 2 = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}| = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -(1.1 - 2.2) = -(1 - 4) = 3$$

$C_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}| = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 1.2 - 1.3 = 2 - 3 = -1$

$C_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}| = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -(1.1 - 1.3) = 1 - 3 = 2$

$C_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = |M_{33}| = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 1.3 - 2.3 = 3 - 6 = -3$

Nilai kofaktor digunakan untuk menentukan adjoin matriks A.

Menentukan Adj(A)

Nilai adjoin matrik A (Adj(A)) dibentuk dari nilai kofaktor

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Menentukan invers matrik A (A^{-1})

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{det(A)}}\boldsymbol{adj(A)}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & -(-\frac{3}{6}) & -(-\frac{1}{6}) \\ -(-\frac{4}{6}) & -\frac{0}{6} & -\frac{2}{6} \\ -(-\frac{3}{6}) & -\frac{3}{6} & -(-\frac{3}{6}) \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Menentukan nilai x, y dan z

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

AB = C

$A^{-1}A. B = C$

$B = A^{-1}C$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{5}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-5 + 3 + 1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$y = \frac{2}{3} + 0 - \frac{1}{3} = \frac{2 + 0 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Hasilnya adalah (x,y,z) = $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

7.4. Metode Gauss Jordan

Gagasan solusi persamaan linier dengan eliminasi Gauss dan Gauss Jordan adalah mereduksi matriks yang diperbesar menjadi bentuk yang sederhana yakni matrik eselon baris dan matriks eselon baris tereduksi. Eliminasi Gauss digunakan untuk memperoleh matriks eselon baris, sedangkan eliminasi Gauss Jordan digunakan untuk mendapatkan matriks eselon baris tereduksi.

Sifat matriks eselon baris adalah

1) Jika baris tidak seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama baris tersebut adalah 1 (disebut 1 utama)
2) Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol maka semua baris seperti ini dikelompokkan bersama-sama di bawah matriks.
3) Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi

Sifat matriks eselon baris terduksi adalah sifat 1, 2, 3 dan masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Kasus 7.5.

Selesaikan persamaan linier sebagai berikut :

x + 2y + z = 1 (1)

3x + 3y + z = 1 (2)

2x + y + 2z = 1 (3)

Selesaikan dengan metode Eliminasi Gauss !

PENYELESAIAN :

$$\left[\begin{matrix}1 & 2 & 1\\3 & 3 & 1\\2 & 1 & 2\end{matrix}\right]\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix} \qquad R_2 - 3R_1$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 2 & 1\\0 & -3 & -2\\2 & 1 & 2\end{matrix}\right]\begin{matrix}1\\-2\\1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}-\frac{1}{3}R_2\\R_3 - 2R_1\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & \frac{2}{3}\\0 & -3 & 0\end{matrix}\right]\begin{matrix}1\\\frac{2}{3}\\-1\end{matrix} \qquad -\tfrac{1}{3}R_3$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & \frac{2}{3}\\0 & 1 & 0\end{matrix}\right]\begin{matrix}1\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{matrix}$$

Matrik eselon baris diatas dapat dibentuk dalam persamaan :

$x + 2y + z = 1$ (4)

$y + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}$ (5)

$$y = \frac{1}{3}$$

Substitusi $y = \frac{1}{3}$ ke persamaan (4)

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}$$

$$z = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Substitusi $y = \frac{1}{3}$ dan $z = \frac{1}{2}$ ke persamaan (5)

$x + 2(\frac{1}{3}) + \frac{1}{2} = 1$

$$x = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{6 - 4 - 3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Hasilnya adalah (x,y,z) = $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$