Pertemuan ke 6

SOLUSI PERSAMAAN NON LINIER – METODE TERBUKA

Diana, S.Si., M.Kom.

Metode terbuka tidak memerlukan selang yang mengurung akar, yang diperlukan adalah satu atau dua tebakan akar ar+1wal. Hampiran akar akan dicari melalui prosedur iterasi. Berbeda dengan metode tertutup yang pasti konvergen, pada metode terbuka ini kadang konvergen kearah solusi sejati kadang juga diperoleh hasil yang tidak konvergen / divergen.

5.1. METODE ITERASI TITIK TETAP

Metode iterasi sederhana/metode langsung/metode sulih beruntun dengan menginputkan nilai x pada fungsi f(x)

Kapan iterasi akan berhenti ? seperti pada metode lainnya kondisi iterasi dapat berhenti dengan menentukan nilai Ɛ atau δ adalah toleransi galat yang diinginkan, apabila galat mutlak lebih kecil dari nilai Ɛ atau δ maka iterasi berhenti.

Menggunakan galat relatif sejati

$$|X_{r+1} - X_r| < \varepsilon$$

Menggunakan galat relatif hampiran

$$\left|\frac{X_{r+1} - X_r}{X_{r+1}}\right| < \delta$$

SYARAT KONVERGENSI

Pada interval I =[s-h, s+h] dengan s titik tetap ,

- Jika 0 < f'(x) < 1 untuk ∀x Є I maka iterasi konvergen monoton
- Jika -1 < f'(x) < 0 untuk ∀x Є I maka iterasi konvergen berisolasi
- Jika f'(x) > 1 untuk ∀x Є I maka iterasi divergen monoton
- Jika f'(x) < -1 untuk ∀x Є I maka iterasi divergen berisolasi

Contoh :

$$X_{r+1} = \sqrt{x+2}$$

Maka

$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

X = 0,5 maka

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{0.5+2}}$ = 0,3162

Artinya iterasinya akan konvergen monoton.

KASUS 5.1.

Tentukan solusi hampiran untuk persamaan f(x) = x-e^{-x} mengunakan metode iterasi titik tetap mengunakan $\mathcal{E}$ = 0,000001 !

Penyelesaian :

Ubah persamaan f(x) dalam bentuk x.

x – e^{-x} = 0

x = e^{-x}

dalam hal ini berarti g(x) = e^{-x}, sehingga porsedur iterasinya adalah $x_{r+1} = e^{-x_r}$

misalkan diambil titik awal x_1 = 0,5

Iterasi 1 :

X_0 = 0,5 maka x_1 = $2{,}718281828^{-0,5}$ = 0,606531

|X_1-X_0| = abs(0,606531-0,5) = 0,106531

Iterasi 2 :

X_1 = 0,606531 maka x_2 = $2{,}718281828^{-0,606531}$ = 0,545239

|X_2-X_1| = abs(0,545239 – 0,606531) = 0,0,061291

Dan iterasi seterusnya dilakukan dengan cara yang sama. Ringkasan sampai iterasi ke 21 ditampilkan pada tabel berikut ini : (untuk mempermudah silakan anda gunakan MS. Excel}

R	X_r	$\mathcal{E}$ = |X_{r+1}-X_r|
0	0,5	
1	0,606531	0,106531
2	0,545239	0,061291
3	0,579703	0,034464
4	0,560065	0,019638
5	0,571172	0,011108
6	0,564863	0,006309
7	0,568438	0,003575
8	0,566409	0,002029
9	0,567560	0,001150

10	0,566907	0,000652
11	0,567277	0,000370
12	0,567067	0,000210
13	0,567186	0,000119
14	0,567119	0,000067
15	0,567157	0,000038
16	0,567135	0,000022
17	0,567148	0,000012
18	0,567141	0,000007
19	0,567145	0,000004
20	0,567142	0,000002
21	0,567144	0,000001

Sehingga diperoleh nilai hampiran $\hat{x} = 0{,}567144$.

KASUS 5.2.

Tentukan nilai hampiran untuk persamaan f(x) = x^2-x-2 menggunakan metode iterasi titik tetap dengan X_0 = 0 !

P**enyelesaian :**

Solusi sejati persamaan : $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ dicari dengan menggunakan cara memfaktorkan, kita cari perkalian a dan b yang apabila dikalikan sama dengan -2 dan apabila ditambahkan sama dengan 1, maka bilangan a dan b adalah 1 dan -2

(x+1) (x-2) = 0

x + 1 = 0 maka x = -1

x – 2 = 0 maka x = 2

Solusi hampiran dengan menggunakan metode iterasi titik tunggal dapat dilakukan dengan 2 cara yaitu :

a) Ubah persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ maka

$$x^2 = x + 2$$

$$x = \sqrt{x+2}$$

Tentukan titik awal , misalkan X_0 = 0

Iterasi 1 :

X_0 = 0 maka $X_1 = \sqrt{0+2} = 1{,}414213562$

$|X_1 – X_0|$ = abs(1,414213562-0) = 1,414213562

Iterasi 2 :

X_0 = 1,414213562 maka $X_1 = \sqrt{1,414213562 + 2} = 1,847759065$

$|X_1 – X_0|$ = abs(1,847759065-1,414213562) = 1,433445503

Iterasi selanjutnya dilakukan dengan cara yang sama

Iterasi	**X_r**	**$\|X_{r+1} – X_r\|$**
0	0	
1	1,414213562	1,414213562
2	1,847759065	0,433545503
3	1,961570561	0,113811496
4	1,990369453	0,028798893
5	1,997590912	0,007221459
6	1,999397637	0,001806725
7	1,999849404	0,000451766
8	1,999962351	0,000112947
9	1,999990588	0,000028237
10	1,999997647	0,000007059
11	1,999999412	0,000001765
12	1,999999853	0,000000441
13	1,999999963	0,000000110
14	1,999999991	0,000000028
15	1,999999998	0,000000007
16	1,999999999	0,000000002
17	2,000000000	0,000000000

Pada iterasi ke 17 nilai hampiran, $\hat{x} = 2,0000000000$

b) Ubah persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ maka

$$x(x-1) - 2 = 0$$
$$x(x-1) = 2$$
$$x = \frac{2}{x-1}$$

Misalkan kita ambil titik awal, $X_0 = 0$

Iterasi 1 :

X_0 = 0 maka

$$x_1 = \frac{2}{0-1} = -2$$

$$\varepsilon = |X_1 - X_0| = abs(-2.00000 - 0.000000) = -2.0000000$$

Iterasi 2 :

X_1 = -2.0000000 maka

$$x_1 = \frac{2}{-2.0000 - 1} = -0.666666667$$

$$\varepsilon = |X_2 - X_1| = abs(-0.6666667 - (-2.000000) = 1.33333333$$

Dan seterusnya dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh tabel berikut ini :

Iterasi	X_r	$\varepsilon = \lvert X_{r+1} - X_r \rvert$
0	0,00000000	
1	-2,00000000	2,00000000
2	-0,66666667	1,33333333
3	-1,20000000	0,53333333
4	-0,90909091	0,29090909
5	-1,04761905	0,13852814
6	-0,97674419	0,07087486
7	-1,01176471	0,03502052
8	-0,99415205	0,01761266
9	-1,00293255	0,00878050
10	-0,99853587	0,00439668
11	-1,00073260	0,00219673
12	-0,99963383	0,00109877
13	-1,00018312	0,00054928
14	-0,99990845	0,00027467
15	-1,00004578	0,00013733
16	-0,99997711	0,00006867
17	-1,00001144	0,00003433

Pada iterasi ke 17 nilai hampiran, $\hat{x} = -1{,}00001144$ yang menghasilkan nilai f(x) = -0.00003433

Kesimpulan pada kasus ini bahwa terdapat 2 persamaan x yang dapat dibentuk dari persamaan $f(x) = x^2 - x - 2$ yaitu $x = \sqrt{x+2}$ dan $x = \frac{2}{x-1}$ dengan nilai titik awal yang sama yakni X_0 = 0 dan jumlah iterasi yang sama (r = 17) diperoleh nilai hampiran , $\hat{x} = 2{,}0000000000$ untuk persamaan $x = \sqrt{x+2}$ dan nilai hampiran $\hat{x} = -1{,}00001144$ untuk persamaan $x = \frac{2}{x-1}$. Artinya kedua persamaan x yang dibentuk akan konvergen ke arah akar yang berbeda karena persamaan ini memiliki 2 akar yang berbeda yakni x = -1 dan x = 2.

KASUS 5.3.

Tentukan nilai hampiran untuk persamaan f(x) = x^2-x-2 menggunakan metode iterasi titik tetap dengan variasi titik awal !

Penyelesaian :

a) **Menggunakan persamaan $x = \sqrt{x+2}$**

Dilakukan variasi titik awal yaitu X_0 = 3, X_0 = 0.5, X_0 = -1, X_0 = -2 dan X_0 = -2,01 diperoleh nilai hampiran untuk masing-masing variasi nilai titik awal seperti pada tabel berikut ini :

Iterasi (r)	X_r	X_r	X_r	X_r	X_r
0	3	0,5	-1	-2	-2,01
1	2,23606798	1,58113883	1,00000000	0,00000000	#NUM!
2	2,05817103	1,89238971	1,73205081	1,41421356	#NUM!
3	2,01449026	1,97291402	1,93185165	1,84775907	#NUM!
4	2,00361929	1,99321700	1,98288972	1,96157056	#NUM!
5	2,00090462	1,99830353	1,99571785	1,99036945	#NUM!
6	2,00022614	1,99957584	1,99892917	1,99759091	#NUM!
7	2,00005653	1,99989396	1,99973228	1,99939764	#NUM!
8	2,00001413	1,99997349	1,99993307	1,99984940	#NUM!
9	2,00000353	1,99999337	1,99998327	1,99996235	#NUM!
10	2,00000088	1,99999834	1,99999582	1,99999059	#NUM!

Kesimpulan pada kasus ini bahwa pada saat titik awal X_0 = -2,01 (nilai lebih kecil dari -2) maka akan menghasilkan bilangan akar negatif, sehingga iterasi akan tidak konvergen ke arah akar persamaan. Pada saat titik awal lebih besar dari 2 ($X_0 \geq -2$) maka iterasi akan konvergen ke arah akar persamaan x = 2.

b) **Menggunakan persamaan** $\boldsymbol{x = \frac{1}{x-1}}$

Dilakukan variasi nilai titik awal X_0, yaitu X_0 = -2, X_0 = 0.5, X_0 = 2,9999, X_0 = 3 dan X_0 = 3.01 diperoleh nilai hampiran untuk masing-masing variasi nilai titik awal seperti pada tabel berikut ini :

Iterasi (r)	X_r	X_r	X_r	X_r	X_r
0	-2,00000000	0,50000000	2,99990000	3,00000000	3,01000000
1	-0,66666667	-4,00000000	1,00005000	1,00000000	0,99502488
2	-1,20000000	-0,40000000	39997,99999992	#DIV/0!	-402,00000000
3	-0,90909091	-1,42857143	0,00005000	#DIV/0!	-0,00496278
4	-1,04761905	-0,82352941	-2,00010001	#DIV/0!	-1,99012346
5	-0,97674419	-1,09677419	-0,66664444	#DIV/0!	-0,66886870
6	-1,01176471	-0,95384615	-1,20001600	#DIV/0!	-1,19841663
7	-0,99415205	-1,02362205	-0,90908430	#DIV/0!	-0,90974567
8	-1,00293255	-0,98832685	-1,04762268	#DIV/0!	-1,04725987
9	-0,99853587	-1,00587084	-0,97674246	#DIV/0!	-0,97691555
10	-1,00073260	-0,99707317	-1,01176559	#DIV/0!	-1,01167700

Kesimpulan pada kasus ini adalah pada saat nilai titik awal X_0 = 3 maka nilai hampiran tidak terdefinisi karena dibagi dengan nilai 0. Selain dari titik awal X_0 = 3, nilai hampiran akan konvergen ke arah X = -1

5.2. METODE NEWTON RAPHSON

Kelebihan metode newton rapshon terletak pada konvergensinya yang lebih cepat dibandingkan dengan metode lain sehingga metode ini paling sering digunakan dalam terapan sains dan rekayasa. Kelemahan metode Newton Raphson memerlukan perhitungan turunan fungsi, f'(x). Namun, tidak semua fungsi mudah mencari turunannya. Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode newton raphson, yaitu penurunan rumus newton rapshon secara geometri dan penurunan rumus newton raphson dengan bantuan deret Taylor. Dengan menggunaakn kedua pendekatan ini akan diperoleh rumus newton raphson berikut ini :

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}, \quad f'(x) \neq 0$$

Kapan iterasi akan berhenti ? Iterasi berhenti sama seperti pada metode iterasi titik tetap. Pada metode noewton raphson, diperlukan turunan pertama dari persamaan yang akan dicari akarnya. Apabila turunan pertama bernilai 0 ($f'(X_r) = 0$) maka ulang kembali perhitungan iterasi dengan nilai X_0 yang baru, jika f(x) = 0 memiliki akar lebih dari 1 maka pemilihan X_0 yang berbeda akan dapat menemukan akar yang lain, dapat juga iterasi akan konvergen ke akar yang berbeda.

KASUS 5.3.

Tentukan nilai akar hampiran untuk persamaan f(x) = x^2-x-2 menggunakan metode Newton Raphson dengan variasi nilai awal X_0 = 0, X_0 = 3, X_0 = 0,5 !

Penyelesaian :

Tentukan turunan pertama f(x),

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

Maka

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x^2-x-2}{2x-1}$$

a) Nilai awal, X_0 = 0

Iterasi 1 :

$x_1 = 0 - \frac{0^2-0-2}{2*0-1}$ = -2,00000

$\mathcal{E} = |-2 - 0| = 2{,}00000$

Iterasi 2 :

$x_2 = -2 - \frac{-2-(-2)-2}{2*(-2)-1}$ = -1,20000

$\mathcal{E} = |-1.2 - (-2)| = 0.8$

Iterasi 3 :

$x_3 = -1,2 - \frac{-1.2^2-(-1.2)-2}{2*(-1.2)-1} = -1.01176$

$\mathcal{E} = |-1.01176 - (-1.2)| = 0.18824$

Dan seterusnya hingga diperoleh tabel berikut ini :

Iterasi	**X_r**	**$\mathcal{E} = \|X_{r+1} - X_r\|$**
0	0	
1	- 2,00000	2,00000
2	- 1,20000	0,80000
3	- 1,01176	0,18824
4	- 1,00005	0,01172
5	- 1,00000	0,00005
6	- 1,00000	0,00000

Pada iterasi ke 6 nilai hampiran, $\hat{x} = -1,00000$ yang menghasilkan nilai f(x) = 0,00000

b) Nilai awal, X_0 = 3
Dilakukan dengan cara yang sama dengan langkah pada a), sehingga dihasilkan tabel berikut ini :

Iterasi	**X_r**	**$\mathcal{E} = \|X_{r+1} - X_r\|$**
0	3	
1	2,20000	0,80000
2	2,01176	0,18824
3	2,00005	0,01172
4	2,00000	0,00005
5	2,00000	0,00000

Pada iterasi ke 5 nilai hampiran, $\hat{x} = 2,00000$ yang menghasilkan nilai f(x) = 0,00000

c) Nilai awal, X_0 = 0,5

Pada saat X_0 = 0,5 maka nilai f'(x) = 0 sehingga nilai tidak terdefinisi karena dibagi dengan nilai 0 sehingga kita harus mencari nilai X_0 yang lain.

Kesimpulan pada kasus ini bahwa nilai akar untuk f(x) = x^2-x-2 dengan memfaktorkan adalah x = -1 dan x =2, titik tengah pada nilai ini adalah x = 0,5 sehingga pada saat X_0 = 0.5 nilai f'(x) = 0 (nilai tidak terdefinisi). Pada saat X_0 > 0,51 maka nilai hampiran yang diperoleh mendekati x = 2 dan pada saat X_0 < 0.5 maka nilai hampiran yang diperoleh mendekati x = -1

5.3. METODE SECANT

Metode secant menyempurnakan metode Newton Raphson dengan mengantikan turunan fungsi f'(x) dengan bentuk lain yang ekivalen. Prosedur iterasi pada metode secant menggunakan rumus sebagai berikut :

$$X_{r+1} = X_r - \frac{f(X_r)(X_r - X_{r-1})}{f(X_r) - f(X_{r-1})}$$

Kapan iterasi akan berhenti ? Iterasi berhenti sama seperti pada metode iterasi titik tetap.

KASUS 5.4. *(Sumber : Rinaldi Munir, 2003)*

Tentukan nilai hampiran, $\hat{x}$, untuk persamaan $f(x) = e^x - 5x^2$ dengan titik awal X_0 = 0,5 dan X_1 = 1

Penyelesaian :

Iterasi 2 :

X_0 = 0.5 dan X_1 = 1 maka

$f(X_0) = f(0{,}5) = e^{0.5} - 5(0.5)^2 = 0{,}3987213$

$f(X_1) = f(1) = e^1 - 5(1)^2 = -2{,}281782$

$X_2 = 1 - \frac{(-2.2827182)(0 - 0.5)}{-2.2827182 - 0.3987213} = 0.574376$

$\varepsilon = |X_2 - X_1| = |0.574376 - 1.000000| = 0.425624$

Iterasi 3 :

X_1= 1.0000 dan X_2 = 0.574376 maka

$f(X_1) = f(1) = e^1 - 5(1)^2 = -2{,}281782$

$f(X_2) = f(0.574376) = e^{0.574376} - 5(0.574376)^2 = 0{,}1264826$

$X_3 = 0.574376 - \frac{(0.1264826)(0.574376 - 1.00000)}{0.1264826 - (-2.281782)} = 0.596731$

$\varepsilon = |X_3 - X_2| = |0.596731 - 0.574376| = 0.022354$

dan seterusnya, iterasi yang lain dilakukan dengan cara yang sama sehingga menghasilkan tabel berikut ini :

Iterasi (r)	X_r	$F(X_r)$	$\varepsilon = \lvert X_{r+1} - X_r \rvert$
0	0,5	0,3987213	
1	1,000000	-2,2817182	
2	0,574376	0,1264826	0,425624
3	0,596731	0,0357344	0,022354
4	0,605533	-0,0011234	0,008803
5	0,605265	0,0000094	0,000268
6	0,605267	0,0000000	0,000002

Pada iterasi ke 6 nilai hampiran, $\hat{x} = 0.605267$ yang menghasilkan nilai f(x) = 0,00000

KASUS 5.5.

Tentukan nilai hampiran, $\hat{x}$ untuk persamaan kuadrat $f(x) = x^2 - x - 2$ untuk X_0 = -3 dan X_1 = -2.5. bandingkan jumlah iterasi untuk kondisi berhenti menggunakan galat relatif sejati dengan nilai Ɛ=0.000005 dan galat relatif hampiran dengan nilai δ = 0.000005 !

Penyelesaian :

<u>KONDISI BERHENTI MENGGUNAKAN GALAT RELATIF SEJATI</u>

Iterasi (r = 1) :

X_0 = -3 dan X_1 = -2.5 maka

$$\mathrm{f}(\mathrm{X}_0) = \mathrm{f}(-3) = -3^2 - (-3) - 2 = 10$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{f}(-2.5) = -2.5^2 - (-2.5) - 2 = 6.75$$

$$X_2 = -2.5 - \frac{6.75\big(-2.5 - (-3)\big)}{6.75 - 10} = -1.4615385$$

$$\mathrm{f}(\mathrm{X}_2) = \mathrm{f}(-1.4615385) = -1.4615385^2 - (-1.4615385) - 2 = 1.5976331$$

$$\varepsilon = |X_2 - X_1| = |-1.4615385 - (2.5)| = 1.038462$$

Iterasi (r = 2) :

X_1 = -2.5 dan X_2 = -1.4615385 menghasilkan f(X_1) =6.75 dan f(X_2) = 1.5976331

$$X_3 = -1.4615385 - \frac{1.5976331\big(-1.4615385 - (-2.5)\big)}{1.5976331 - 6.75} = -1.1395349$$

$$\varepsilon = |X_3 - X_2| = |-1.1395349 - (1.4615385)| = 0.322004$$

Dan iterasi seterusnya dilakukan dengan cara yang sama.

Iterasi (r)	X_r	$F(X_r)$	$\varepsilon = \lvert X_{r+1} - X_r \rvert$
0	-3	10	
1	-2,5	6,75	0,500000
2	-1,4615385	1,5976331	1,038462
3	-1,1395349	0,4380746	0,322004
4	-1,0178838	0,0539711	0,121651
5	-1,0007903	0,0023716	0,017093
6	-1,0000047	0,0000140	0,000786
7	-1	0,0000000	0,000005

Pada iterasi ke 7 nilai hampiran, $\hat{x} = -1.00000$ yang menghasilkan nilai f(x) = 0,00000

KONDISI BERHENTI MENGGUNAKAN GALAT RELATIF HAMPIRAN

Iterasi (r = 1) :

X_0 = -3 dan X_1 = -2.5 maka

$\mathrm{f}(\mathrm{X}_0) = \mathrm{f}(-3) = -3^2 - (-3) - 2 = 10$

$\mathrm{f}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{f}(-2.5) = -2.5^2 - (-2.5) - 2 = 6.75$

$$X_2 = -2.5 - \frac{6.75\big(-2.5 - (-3)\big)}{6.75 - 10} = -1.4615385$$

$\mathrm{f}(\mathrm{X}_2) = \mathrm{f}(-1.4615385) = -1.4615385^2 - (-1.4615385) - 2 = 1.5976331$

$$\delta = \left|\frac{X_{r+1} - X_r}{X_{r+1}}\right| = \left|\frac{-1.4615385 - (-2.5)}{-1.4615385}\right| = 0.7105263$$

Iterasi (r = 2) :

X_1 = -2.5 dan X_2 = -1.4615385 menghasilkan f(X_1) =6.75 dan f(X_2) = 1.5976331

$$X_3 = -1.4615385 - \frac{1.5976331\big(-1.4615385 - (-2.5)\big)}{1.5976331 - 6.75} = -1.1395349$$

$$\delta = \left|\frac{X_{r+1} - X_r}{X_{r+1}}\right| = \left|\frac{-1.1395349 - (-1.4615385)}{-1.1395349}\right| = 0.2825746$$

Dan iterasi seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga menghasilkan tabel berikut ini :

Iterasi (r)	**X_r**	**F(X_r)**	$\boldsymbol{\delta = \left\lvert\frac{X_{r+1} - X_r}{X_{r+1}}\right\rvert}$
0	-3	10	
1	-2,5	6,75	0,2000000
2	-1,4615385	1,5976331	0,7105263
3	-1,1395349	0,4380746	0,2825746
4	-1,0178838	0,0539711	0,1195138
5	-1,0007903	0,0023716	0,0170799
6	-1,0000047	0,0000140	0,0007856
7	-1	0,0000000	0,0000047

Pada iterasi ke 7 nilai hampiran, $\hat{x} = -1.00000$ yang menghasilkan nilai f(x) = 0,00000 dengan nilai galat relatif hampiran sebesar δ=0.0000047.

Kesimpulan pada kasus ini bahwa kedua kondisi berhentinya iterasi, baik menggunakan nilai galat hampiran sejati maupun menggunakan galat relatif hampiran akan menghasilkan iterasi yang konvergen menuju ke nilai , $\hat{x} = -1.00000$ dengan jumlah iterasi yang sama (7 kali iterasi).

LATIHAN :

1. Tentukan nilai hampiran untuk persamaan x^2 - 6x +3 = 0 dengan metode iterasi titik tetap, gunakan ε = 0,00001 dengan titik awal X_0 = 1,5 !
2. Tentukan nilai hampiran untuk persamaan x^2 - 6x +3 = 0 dengan metode newton raphson, gunakan ε = 0,00001 dengan titik awal X_0 = 1,5 !
3. Tentukan nilai hampiran untuk persamaan x^2 - 6x +3 = 0 dengan metode iterasi titik tetap, gunakan ε = 0,00001 dengan titik awal X_0 = 1 dan X_1 = 1,5 !