PERTEMUAN KE 4

PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

Koordinator Mata Kuliah : Diana, S.Si., M.Kom.

4.1. PERSAMAAN NON LINIER

Rumusan persamaan non linier adalah :

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan F(x) = 0 Yaitu nilai x=s sedemikian sehingga f(s) sama dengan nol.

4.2. METODE PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

Secara umum metode penyelesaian persamaan non linier ada dua jenis yaitu metode tertutup dan metode terbuka.

4.2.1 METODE TERTUTUP

Metode tertutup disebut juga metode pengurung *(bracketing method)* atau sering juga disebut sebagai metode konvergen, karena dipastikan akan ditemukan minimal 1 akar dalam selang [a,b]. Langkah yang dilakukan adalah mengurung akar sejadi pada selang tertentu sehingga lebar selang semakin sempit dan akan diperoleh nilai x yang menghasilkan f(x) mendekati nol.

Metode tertutup terdiri dari :

1) Metode Tabel,
2) Metode Biseksi
3) Metode Regula Falsi

METODE TABEL

Langkah metode tabel :

1) Diketahui fungsi f(x) dengan range x pada interval [a,b]
2) Tentukan n jumlah pembagian lalu hitung h
$$h = \frac{b-a}{n}$$
3) untuk i = 0 s.d n lakukan
4) untuk i = 0 s.d n tentukan nilai k
   jika $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah solusi
   selain itu, jika $|f(x_k)| \cdot |f(x_{k-1})| < 0$ maka
      jika $|f(x_k)| < |f(x_{k-1})|$ maka x_k adalah solusi
      jika tidak x_{k-1} adalah solusi

KASUS 4.1.

(Sumber : http://irma.lecturer.pens.ac.id/Metode%20Numerik/MetNum02-Persamaan%20Non%20Linier.pdf)

Catatan : e = 2,718281828

Tentukan solusi untuk persamaan eksponensial $f(x) = x + e^x$ dalam range x = [-1,0] dengan selang 0,1!

Penyelesaian :

Persamaan eksponensial merupakan salah satu bentuk persamaan non linier. Langkah pertama adalah menentukan selang kecil yang mengandung akar. Tentukan nilai f(x) berdasarkan nilai range x =[-1,0] pada selang 0,1 maka diperoleh nilai f(x) yang ditampilkan sebagai berikut :

X	f(x)
-1	-0,63212
-0,9	-0,49343
-0,8	-0,35067
-0,7	-0,20341
-0,6	**-0,05119**
-0,5	**0,10653**
-0,4	0,27032
-0,3	0,44082
-0,2	0,61873
-0,1	0,80484
0	1,00000

Selang kecil yang mengandung akar adalah range x = [-0.6, -0,5]

Selanjutnya adalah menentukan nilai akar berdasarkan selang kecil yang telah ditemukan. Solusi untuk persamaan eksponensial $f(x) = x + e^x$ dalam range x = [-0,6,-0,5], seperti ditampilkan berikut ini :

x	f(x)
-0,6	-0,05119
-0,59	-0,03567
-0,58	-0,02010
-0,57	**-0,00447**
-0,56	0,01121
-0,55	0,02695
-0,54	0,04275
-0,53	0,05860
-0,52	0,07452

-0,51	0,09050
-0,5	0,10653

Maka solusi persamaan eksponensial $f(x) = x + e^x$ dalam range x = [-0.6, -0.5] dengan selang 0,1 adalah x = -0,57

KASUS 4.2

(Sumber : Rinaldi Munir, 2003, hal 66)

Tentukan solusi persamaan non linier $f(x) = e^x - 5x^2$ pada selang [-0.5, 1,4] dengan selang 0,1 !

Penyelesaian :

Temukan selang kecil yang mengandung akar,

x	f(x)
-0,5	-0,643469
-0,4	**-0,129680**
-0,3	**0,290818**
-0,2	0,618731
-0,1	0,854837
0	1,000000
0,1	1,055171
0,2	1,021403
0,3	0,899859
0,4	0,691825
0,5	0,398721
0,6	**0,022119**
0,7	**-0,436247**
0,8	-0,974459
0,9	-1,590397
1	-2,281718
1,1	-3,045834
1,2	-3,879883
1,3	-4,780703
1,4	-5,744800

Ditemukan selang cukup kecil yang mengandung akar yaitu selang x = [-0.4, 0.3] dan selang x = [0.6, 0.7]

Untuk selang x = [-0.4, 0.3]

X	f(x)
-0,4	-0,129680

-0,39	-0,083443
-0,38	-0,038139
-0,37	**0,006234**
-0,36	0,049676
-0,35	0,092188
-0,34	0,133770
-0,33	0,174424
-0,32	0,214149
-0,31	0,252947
-0,3	0,290818

selang x = [0.6, 0.7]

X	f(x)
0,6	0,022119
0,61	**-0,020069**
0,62	-0,063072
0,63	-0,106889
0,64	-0,151519
0,65	-0,196959
0,66	-0,243208
0,67	-0,290263
0,68	-0,338122
0,69	-0,386784
0,7	-0,436247

Solusi persamaan non linier untuk linier $f(x) = e^x - 5x^2$ pada selang [-0.5, 1,4] dengan selang 0,1 adalah x = -0,37

METODE BAGI DUA

Metode bagi dua atau metode biseksi dilakukan dengan cara

1) Membagi range [a,b] menjadi 2 bagian,

$$x = \frac{a+b}{2}$$

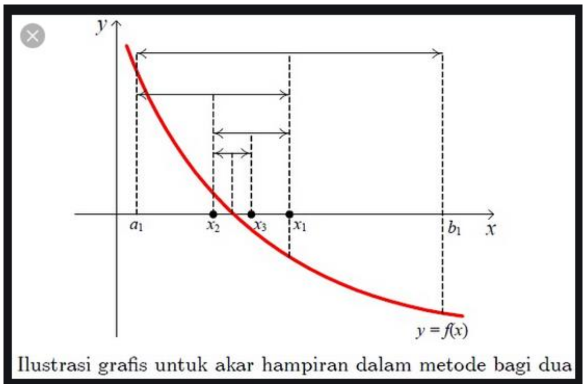
2) Tentukan bagian yang mengandung akar dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang. Bagian yang mengandung akar apabila f(a) dan f(b) berlawanan arah.

$$f(a).f(b) < 0$$

3) Perbaharui batas atas dan batas bawah sesuai range yang baru.
4) Lakukan berulang-ulang sampai diperoleh akar persamaan non linier.

Kondisi pengulangan berhenti apabila : (Rinaldi Munir, 2013, hal 67)

1) Lebar selang baru |a-b|< Ɛ, dimana Ɛ adalah nilai toleransi lebar selang yang mengandung akar.
2) Nilai fungsi di hampiran akar : f(c) = 0. Menguji kesamaan f(c) = 0 dapat kita hampiri dengan f(c) < epsilon mesin.
3) Galat relatif hampiran akar : $|(c_{baru} - c_{lama})/ c_{baru}| < \delta$, dimana δ adalah galat relatif hampiran yang diinginkan.



Gambar 4.1 Ilustrasi mencari nilai hampiran dengan metode bagi dua

(Sumber : https://perguruanfarhan.wordpress.com/2012/03/29/mari-memahami-metode-bagi-dua-bisection-method/)

KASUS 4.3

Catatan : e = 2,718281828

Tentukan solusi untuk persamaan eksponensial $f(x) = x + e^x$ dalam range x = [-1,0] !

Penyelesaian :

Iterasi 1 :

Range x = [-1, 0] sehingga a = -1 dan b = 0 maka

X = (-1+0) = -0,5

-1	**Terdapat Akar**	-0,5	0

F(a) = -1 + e^{-1} = -0,63212 dan f(x) = -0,5 + $e^{-0,5}$ = 0,106531 (tanda f(a) dan f(b) berlawanan sehingga ada akar di selang ini, sehingga selang selanjutnya adalah [-1,-0.5]

Iterasi 2 :

Range x = [-1, 0.5] sehingga a = -1 dan b = -0,5 maka

X = (-1+-0,5)/2 = -0,25

-1	**Terdapat Akar**	-0,25	-0,5

F(a) = -1 + e^{-1} = -0,63212 dan f(x) = -0,25 + $e^{-0,25}$ = 0,528801 (tanda f(a) dan f(b) berlawanan sehingga ada akar di selang ini, sehingga selang selanjutnya adalah [-1,-0.25]

Iterasi ke 3 :

Range x = [-1, -0.25] sehingga a = -1 dan b = -0,25 maka

X = (-1+-0,25)/2 = -0,625

-1 **tidak ada akar** -0,625 -0,25

F(a) = -1 + e^{-1} = -0,63212 dan f(x) = -0,625 + $e^{-0,625}$ = -0,08974 (tanda f(a) dan f(b) tidak berlawanan sehingga tidak ada akar di selang ini, sehingga selang selanjutnya adalah [-0,625, -0.25]

Iterasi ke 4 :

Range x = [-0,625, -0.25] sehingga a = -0,625 dan b = -0,25 maka

X = (-0,625+-0,25)/2 = -0,4375

-0,625 **terdapat akar** -0,4375 -0,25

F(a) = --0,625 + $e^{-0,625}$ = -0,08974 dan f(x) = -0,25 + $e^{-0,25}$= -0,208149 (tanda f(a) dan f(b) berlawanan sehingga tidak ada akar di selang ini, sehingga selang selanjutnya adalah [-0,625, -0.4375]

Dilanjutkan sampai iterasi ke 10, hasil keseluruhan iterasi ditampilkan pada tabel berikut ini :

iterasi	**A**	**b**	**X**	**f(a)**	**f(x)**	
1	-1	0	-0,5	-0,63212	0,106531	berlawanan arah
2	-1	0,5	-0,25	-0,63212	0,528801	berlawanan arah
3	-1	-0,25	-0,625	-0,63212	-0,08974	
4	-0,625	-0,25	-0,4375	-0,08974	0,208149	berlawanan arah
5	-0,625	-0,4375	-0,53125	-0,08974	0,05662	berlawanan arah
6	-0,625	-0,53125	-0,57813	-0,08974	-0,01718	
7	-0,57813	-0,53125	-0,55469	-0,01718	0,01956	berlawanan arah
8	-0,57813	-0,55469	**-0,56641**	-0,01718	**0,001149**	berlawanan arah
9	-0,57813	-0,56641	-0,57227	-0,01718	-0,00803	
10	-0,56641	-0,55469	-0,56055	0,001149	0,010345	

pada iterasi ke 9 dan 10 tidak tanda f(a) dan f(b) tidak berlawanan artinya tidak ada akar di selang tersebut. sehingga nilai akar x = -0,56641 akan menghasilkan f(x) = 0,001149.. pada kasus 4.1. dengan persamaan yang sama diselesaikan dengan metode tabel dihasilkan x = 0,57 dengan nilai f(x) =0,00447.

Kelemahan dalam metode bagi dua adalah : (Rinaldi Munir, 2003)

1) apabila jumlah akar yang ditemukan pada selang lebih dari satu maka hanya satu buah akar yang dapat ditemukan, cara mengatasinya adalah dengan menggunakan selang [a,b] yang cukup kecil yang memuat hanya satu buah akar
2) metode bagi dua tidak berhasil untuk menemukan akar ganda. Contoh pada kasus f(x) = $(x-3)^2$ yang memiliki dua akar yang sama.

METODE REGULA FALSI

Metode regula falsi atau metode posisi palsu *(false position method).* Pada prinsipnya metode regula falsi mirip dengan metode bagi dua. Yang menjadi pembedanya adalah rumus untuk menghitung nilai x :

$$x = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$$

KASUS 4.4.

Catatan : e = 2,718281828

Tentukan solusi untuk persamaan eksponensial $f(x) = x + e^x$ dalam range x = [-1,0] menggunakan metode regula falsi !

Penyelesaian :

Iterasi 1 :

Range x = [-1, 0] sehingga a = -1,0000 dan b = 0,0000 maka

Tentukan nilai f(a) = $-1+e^{-1}$ = -0,63212 dan f(b)= $0+e^{0}$ = 1,0000 lalu tentukan nilai x,

$$\mathrm{x} = 0 - \frac{1(0-(-1))}{1-(-0{,}63212)} = -0{,}07081$$

f(x) = $-0{,}63212+e^{-0{,}63212}$ = -0,07081,

nilai f(a) dan f(x) tidak berlawanan (sama-sama negatif) dan nilai f(x) dan f(b) berlawanan (f(x) negatif dan f(b) positif)) sehingga terdapat akar di selang tersebut sehingga selang selanjutnya adalah [x,b] = [-0.61270, 0.000)

Iterasi 2 :

Range x = [-0,61270, 0.00] sehingga a = -0,61270 dan b = 0,0000 maka

Tentukan nilai f(a) = -0,61270+$e^{-0,61270}$ = -0,07081 dan f(b)= 0+e^{0} = 1,0000 lalu tentukan nilai x,

$$x = 0 - \frac{1\big(0-(-0,61270)\big)}{1-(-0,07081))} = -0,57218$$

f(x) = -0,57218+$e^{-0,57218}$ = -0,00789

nilai f(a) dan f(x) tidak berlawanan (sama-sama negatif) dan nilai f(x) dan f(b) berlawanan (f(x) negatif dan f(b) positif)) sehingga terdapat akar di selang tersebut sehingga selang selanjutnya adalah [x,b] = [-0,57218, 0,0000

Iterasi 3 : dilakukan dengan cara yang sama, hingga hasil diringkas pada tabel berikut ini :

Iterasi	a	X	b	f(a)	f(x)	f(b)	Selang selanjutnya
1	-1,00000	-0,61270	0,00000	-0,63212	**-0,07081**	**1,00000**	[x,b]
2	-0,61270	-0,57218	0,00000	-0,07081	**-0,00789**	**1,00000**	[x,b]
3	-0,57218	-0,56770	0,00000	-0,00789	**-0,00088**	**1,00000**	[x,b]
4	-0,56770	-0,56721	0,00000	-0,00087	**-0,00010**	**1,00000**	[x,b]
5	-0,56721	-0,56715	0,00000	-0,00010	- **0,000012**	**1,00000**	[x,b]
6	-0,56715	-0,56714	0,00000	-0,00001	- **0,000001**	**1,00000**	{x,b]

Pada iterasi ke 6 diperoleh nilai x = -0,56714 dengan nilai f(x) = 0,000001

Kesimpulan : hasil ketiga metode ini menghasilkan nilai yang hampir sama, yang membedakan adalah kecepatan konvergensi. Konvergensi metode regula falsi lebih cepat daripada metode bagi dua.