BAB I

ANALISIS NUMERIK DAN ANALISIS GALAT

Analisis numerik merupakan suatu studi tentang algoritma untuk memecahkan masalah matematika kontinu. Matematika kontinu merupakan kebalikan dari matematika diskrit yang mempelajari tentang bilangan diskrit / bilangan bulat.

A. METODE ANALITIK DAN METODE NUMERIK

Perbedaan metode analitik dan metode numerik adalah :

Perbedaan	
Motode Analitik	Metode Numerik
1. Menghasilkan solusi sejati *(exact solution)* 2. Solusi dalam bentuk fungsi matematika, selanjutnya fungsi tersebut dianalisis untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka 3. Hanya unggul untuk persoalan terbatas dan sederhana	1. Menghasilkan solusi hampiran *(approximation solution)* 2. Solusi selalu dalam bentuk angka 3. Bisa menyelesaikan persoalan yang lebih besar dan rumit

Selisih antara solusi sejati dan solusi hampiran disebut dengan galat *(error)*.

Ilustrasi penyelesaian masalah integral dengan metode analitik dan metode numerik (Rinaldi Munie, 2003)

KASUS 1.1 tentukan nilai integral di bawah ini.

Catatan penting bahwa penyelesaian integral adalah menentukan luas grafik.

$$f(x) = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)dx$$

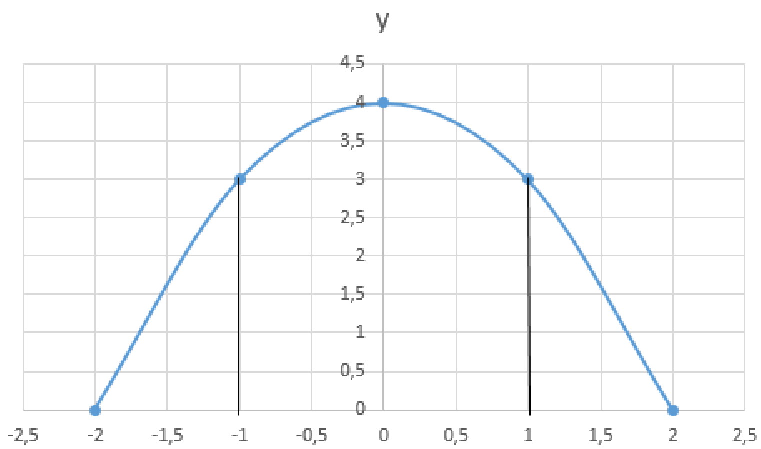
Pada **metode analitik** kita menyelesaikan persoalan integral diatas dengan menggunakan rumus :

$$\int ax^n dx = \frac{1}{n} ax^{n+1} + c$$

Sehingga kita akan memperoleh :

$$Luas = \int_{-1}^{1} (4 - x^2)dx = \left\{4(1) - \left(\frac{1}{3}\right)\right\} - \left\{4(-1) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\} = 22/3$$

Pada **metode numerik** kita menyelesaikan persoalan integral diatas dengan menggunakan pendekatan. Catatan penting bahwa penyelesaian integral adalah interpretasi geometri integral f(x) dari x = a sampai x = b



Gambar 1.1. Integral $f(x) = \int_{-1}^{1}(4 - x^2)dx$ Secara Numerik

Luas = {f[(-1)+f(-1/2)]x0.5/2} + {[f(-1/2)+f(0)]x0.5/2} + {f(0)+f(1/2)x0.5/2} + {[f(1/2+f(1)x0.5/2]}

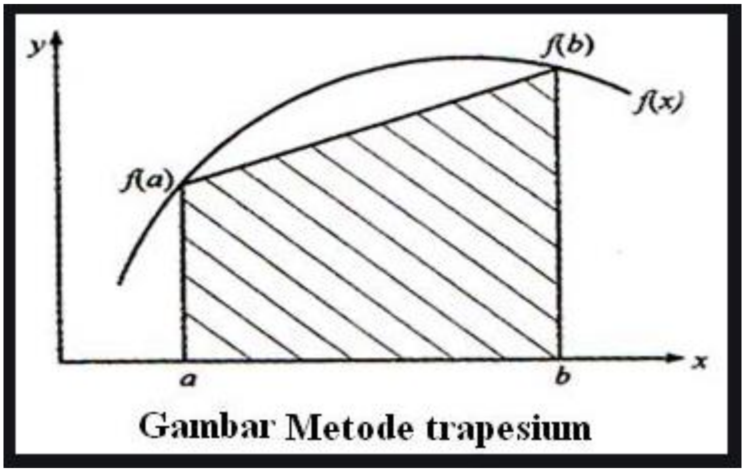
Luas = 0.5/2 x {f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)}

Luas = 0.5/2 x {(4x-1^2) + 2(4-1/2^2) + 2(4-0^2) + 2(4-1/2^2) + (4-1^2)}

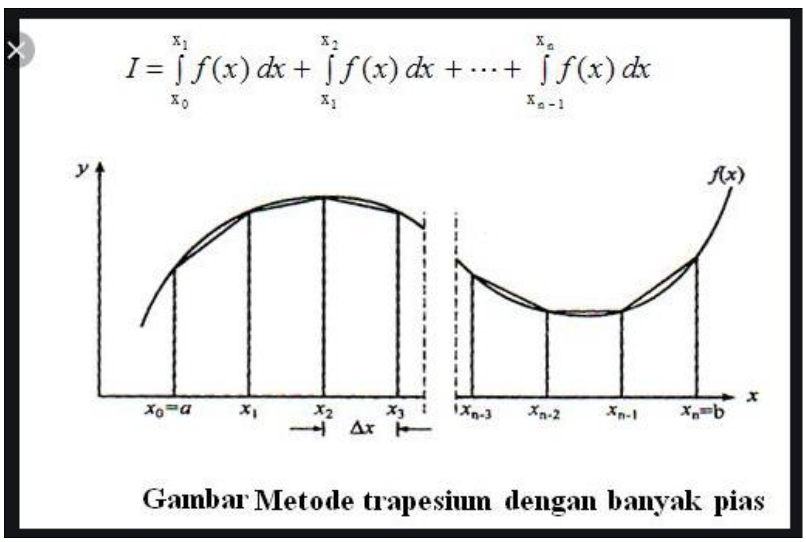
Luas = 0.5/2 {3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3 } =7.25

\

Beberapa contoh untuk grafik lainnya



Gambar Metode trapesium



Gambar Metode trapesium dengan banyak pias

B. TAHAPAN MEMECAHKAN MASALAH DENGAN METODE NUMERIK

Rinaldi Munir, 2003 ada enam tahap penyelesaian dunia nyata dengan metode numerik, yaitu :

1) Pemodelan.
   Persoalan dunia nyata dimodelkan ke dalam persamaan matematika.
2) Penyederhanaan model.
   Model matematika yang dihasilkan pada tahap 1 disederhanakan dengan membuat beberapa pengandaian sehingga beberapa parameter dapat diabaikan.

3) Formulasi numerik

   Memformulasikan secara numerik untuk model yang telah disederhanakan dengan cara menentukan metode numerik yang akan dipakai dengan analisis galat awal (taksiran galat, penentuan ukuran langkah dan sebagainya) lalu menyusun algoritma dari metode numerik yang dipilih

4) Pemrograman

   Menerjemahkan algoritma ke dalam program komputer dengan menggunakan salah satu bahasa pemrograman yang dikuasai.

5) Operasional

   Melakukan ujicoba dengan data sebenarnya.

6) Evaluasi

   Menginterpretasikan hasil ujicoba data untuk menaksik kualitas solusi yang telah dihasilkan.

C. METODE NUMERIK DAN ANALISIS NUMERIK

Metode numerik merupakan algoritma yakni langkah – langkah penyelesaian masalah secara numerik. Analisis numerik merupakan terapan ilmu matematika untuk menganalisis suatu metode.

Ada 2 hal yang dianalisis pada analisis numerik yaitu :

1) Analisis galat
2) Analisis konvergensi suatu metode

D. ANALISIS GALAT

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik, dimana semakin kecil galat semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Ada beberapa jenis galat yaitu :

1) Galat Mutlak

   Galat mutlak adalah galat yang tidak mempertimbangkan tanda negatif, artinya nilai -0,01 sama dengan nilai 0,01, setiap nilai negatif akan dijadikan nilai positif.

$$|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$$

Kekurangan dari nilai galat mutlak ini adalah tidak memberikan informasi seberapa besar nilai hampiran dibandingkan dengan nilai sejatinya.

Misalkan : A menyatakan ukuran sebuah kain adalah 99 cm dan panjang sebenarnya adalah 100 cm, B menyatakan ukuran sebuah pensil adalah 9 m dan panjang sebenarnya adalah 10 cm. Galat ukuran yang dilakukan A dan B sama-sama 1 cm, namun galat yang dilakukan oleh B pada saat mengukur pensil lebih berarti daripada galat yang dilakukan A.

2) Galat Relatif Sejati

Untuk menjawab kekurangan pada galat mutlak, dirumuskan galat relatif dimana galat ini diperoleh dengan normalisasi nilai sejati.

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a}$$

Atau dalam persentase

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{a}*100\%$$

3) Galat Relatif Hampiran

Galat dinormalkan terdapat solusi hampiran kita akan menganggap kedua galat tersebut sama saja, untuk itu diperlukan galat relatif.

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{\hat{a}}$$

4) Galat pendekatan iterasi

Informasi tentang solusi sejati jarang diketahui. Dan timbul pertanyaan kalau sudah diketahui solusi sejati kenapa harus mencari solusi hampiran ? karena hal ini diperlukan suatu pendekatan lain untuk menentukan nilai hampiran. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan iterasi atau pengulangan. Galat relatif hampiran dihitung dengan persamaan :

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}$$

Keterangan : a_{r+1} adalah nilai hampiran saat ini dan a_r adalah nilai hampiran sebelumnya. Proses iterasi berhenti saat $|\varepsilon_{RA} < \varepsilon_S|$. Nilai ε_S adalah toleransi galat yang ditentukan, semakin kecil nilai ε_S semakin teliti solusinya, namun semakin banyak proses iterasi yang dilakukan.

KASUS 1.1.

Misalkan nilai solusi sejati adalah 9/2 dan nilai solusi hampiran adalah 4,449. Tentukan galat mutlak, galat relatif sejati dan galat relatif hampiran !

Penyelesaian :

Diketahui a = 9/2 dan $\hat{a}$ = 4,449

$$Galat\ mutlak = \left|\frac{9}{2} - 4{,}449\right| = \left|\frac{9}{2} - \frac{4449}{1000}\right| = \left|\frac{9000 - 8898}{2000}\right| = \left|\frac{102}{2000}\right| = 0{,}051$$

$$\text{G}alat\ relatif\ sejati = \frac{\frac{102}{2000}}{\frac{9}{2}} = \frac{102}{2000} x \frac{2}{9} = \frac{204}{1800} = 0{,}011333$$

$$Galat\ relatif\ hampiran = \frac{\frac{102}{2000}}{\frac{4449}{1000}} = \frac{102}{2000}\ x \frac{1000}{4449} = \frac{102000}{8898000} = 0{,}011463$$

KASUS 1.2.

Rinaldi Munir, 2003. Misalkan ada prosedur iterasi sebagai berikut :

$$x_{i+1} = (-x_r{}^3 + 3)/6$$

Iterasi akan berhenti pada saat $|\varepsilon_{RA}| < \varepsilon_S$. Misalkan kita tentukan nilai ε_S = 0,0001 maka kita dapat melakukan iterasi sebagai berikut

E. ASAL USUL GALAT

Sumber utama galat dalam perhitungan numerik adalah :

1) Galat Pemotongan *(truncation error)*

   Galat pemotongan terjadi karena penyederhanaan model matematika dari model yang komplek diganti dengan model yang sederhana.

2) Galat Pembulatan *(round oof error)*

   Galat pembulatan terjadi karena keterbatasan komputer untuk menyajikan bilangan rill secara tepat karena komputer hanya mampu menpresentasikan sejumlah digit atau bit dalam bilangan biner. Misalkan 1/6 = 0,16666666....

   Komputer menyajikan bilangan rill dengan 2 cara yaitu :

   - Bilangan titik tetap *(fixed point)*

     Disajikan dalam bentuk desimal tetap misalkan 62.345 atau 3.232 atau 6.566 dan sebagainnya
   - Bilangan titik kambang *(floating point)*

     Disajikan dalam bentuk jumlah digit berarti (angka bena) yang sudah tetap misalkan 0.638 x 10^3 atau 0,638E+03

   Angka bena adalah angka penting, angkat bermakna. Contoh

43.123	memiliki 5 angka bena, yaitu 4, 3, 1, 2, 3
0,1768	memiliki 4 angka bena, yaitu 1, 7, 6, 8
0,000023	memiliki 2 angka bena, yaitu 2 dan 3
279.300	memiliki 6 angka bena, yaitu 2, 7, 9, 3, 0 dan 0

   Komputer hanya menyimpan sejumlah tertentu angka bena. Pengabaian angka bena sisanya menimbulkan galat pembulatan.

3) Galat eksprimental
4) Galat pemrograman

Sumber :

Rinaldi Munir, 2003, Metode Numerik, Penerbit Informatika, Bandung