MATRIKS

Tujuan : Memahami operasi matriks

DEFINISI : Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan tersebut dinamakan entri.

Jika ***A*** adalah suatu matriks, maka entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dapat dinyatakan sebagai a_{ij}.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Selanjutnya ukuran suatu matriks dinyatakan sebagai banyaknya baris dan kolom, sebagai contoh matriks ***A*** di atas berukuran 2 × 3.

MATRIKS PERSEGI

Suatu matriks yang memiliki kolom dan baris yang banyaknya sama dinamakan **matriks persegi**.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

MATRIKS DIAGONAL

Matriks ***D*** dikatakan matriks diagonal jika matriks tersebut merupakan matriks persegi dengan entri-entri $d_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

MATRIKS SATUAN /IDENTITAS

Matriks ***I*** dikatakan matriks satuan jika matriks ***I*** merupakan matriks diagonal dengan entri-entri $\boldsymbol{I_{ii}} = 1$ untuk setiap i (entri diagonalnya = 1).

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OPERASI PADA MATRIKS

1. **Penjumlahan**

   Dua buah matriks dapat dijumlahkan jika mempunyai ukuran yang sama

   Penjumlahan dua matriks didefinisikan sebagai berikut :

   Jika $A = \left[a_{ij} \right]_{2\times3}$ dan $A = \left[b_{ij} \right]_{2\times3}$, maka $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij} \right]_{2\times3}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

diperoleh $A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 & 3+1 \\ 4+2 & 5+0 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

2. **Perkalian Matriks**

   Untuk mendefinisikan perkalian matriks, terlebih dahulu diberikan sebuah contoh sebagai berikut :

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(4)+3(0) & 1(2)+2(5)+3(1) \\ 4(1)+5(4)+6(0) & 4(2)+5(5)+6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas, dapat dilihat bahwa dalam menghitung perkalian dua matriks, kita mengalikan elemen-elemen pada setiap **baris** dengan elemen-elemen pada setiap **kolom.**

Jika $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times r}$ dan $A = \left[b_{ij}\right]_{r\times m}$, maka $AB = \left[a_{kh}\right]_{m\times n}$ dengan

$$a_{ik} = \sum_{r} a_{ir} b_{rk}$$

3. Perkalian scalar

Jika ***A*** adalah suatu matriks dan *k* adalah scalar, maka ***kA*** adalah suatu matriks yang entri-entrinya merupakan hasil kali entri matriks ***A*** dengan *k*.

Contoh :

k =2 dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Transpose matriks

Jika A matriks berukuran m × n, maka transpose matriks A, dinotasikan dengan A^t, merupakan matriks berukuran n × m dengan baris ke-i nya merupakan kolom ke-i dari A.

Jadi $A^t = \left[a_{ji}\right], a_{ji} \in A$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

LATIHAN :

1. $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai *a*,*b*, *c* dan *d*.

2. Jika diketahui matriks-matriks sebagai berikut :

   $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   Hitung : *AB*, *AC*, *BC*, *CA*.

SIFAT-SIFAT OPERASI MATRIKS

Berikut beberapa sifat yang berlaku pada operasi matriks:

1. *A*+ *B* = *B* + *A* (*komutatif terhadap penjumlahan*)
2. *A* + (*B* + *C*) = (*A*+*B*) + *C* (*assosiatif terhadap penjumlahan*)
3. *A*(*BC*) = (*AB*) *C* (*assosiatif terhadap perkalian*)
4. *A*(*B*+*C*) = *AB* + *AC* (*distributif*)

Selanjutnya akan dibuktikan untuk sifat (3) sebagai berikut :

Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . a_{1r} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots . b_{1k} \\ & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} \ldots b_{rk} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots . c_{1n} \\ & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} \ldots c_{kn} \end{bmatrix}$.

$$BC = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots . b_{1k} \\ & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} \ldots b_{rk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots . c_{1n} \\ & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} \ldots c_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum b_{1k} c_{k1} & \sum b_{1k} c_{k2} \ldots \ldots \sum b_{1k} c_{kn} \\ & \vdots \\ \sum b_{rk} c_{k1} & \sum b_{rk} c_{k2} \ldots \ldots \sum b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . a_{1r} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum b_{1k} c_{k1} & \sum b_{1k} c_{k2} \ldots \ldots \sum b_{1k} c_{kn} \\ & \vdots \\ \sum b_{rk} c_{k1} & \sum b_{rk} c_{k2} \ldots \ldots \sum b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\sum b_{1k}c_{k1} + a_{12}\sum b_{2k}c_{k1} + \ldots + a_{1r}\sum b_{rk}c_{k1} \;\ldots\ldots\ldots\; a_{11}\sum b_{1k}c_{kn} + a_{12}\sum b_{2k}c_{kn} + \ldots + a_{1r}\sum b_{rk}c_{kn} \\ \vdots \\ a_{m1}\sum b_{1k}c_{k1} + a_{m2}\sum b_{2k}c_{k1} + \ldots + a_{mr}\sum b_{rk}c_{k1} \ldots\ldots\ldots\; a_{m1}\sum b_{1k}c_{kn} + a_{m2}\sum b_{2k}c_{kn} + \ldots + a_{mr}\sum b_{rk}c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum a_{11}b_{1k}c_{k1} + \sum a_{12}b_{2k}c_{k1} + \ldots + \sum a_{1r}b_{rk}c_{k1} \;\ldots\ldots\ldots\; \sum a_{11}b_{1k}c_{kn} + \sum a_{12}b_{2k}c_{kn} + \ldots + \sum a_{1r}b_{rk}c_{kn} \\ \vdots \\ \sum a_{m1}b_{1k}c_{k1} + \sum a_{m2}b_{2k}c_{k1} + \ldots + \sum a_{mr}b_{rk}c_{k1} \ldots\ldots\ldots\; \sum a_{m1}b_{1k}c_{kn} + \sum a_{m2}b_{2k}c_{kn} + \ldots + \sum a_{mr}b_{rk}c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \ldots & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{kn} \\ & \vdots & & \\ \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k2} & \ldots & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k2} & \ldots & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{kn} \\ & \vdots & & \\ \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k2} & \ldots & \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{kn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari bentuk dari (*AB*) *C* sebagai berikut :

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1r} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots b_{1k} \\ & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2}\ldots b_{rk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & \ldots & \sum_r a_{1r}b_{rk} \\ & & \vdots & \\ \sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & \ldots & \sum_r a_{mr}b_{rk} \end{bmatrix}$$

$$(AB)C=\begin{bmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & \ldots & \sum_r a_{1r}b_{rk} \\ & & \vdots & \\ \sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & \ldots & \sum_r a_{mr}b_{rk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\ldots c_{1n} \\ & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2}\ldots c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_r a_{1r}b_{r1}c_{11} + \sum_r a_{1r}b_{r2}c_{21} + \ldots + \sum_r a_{1r}b_{rk}c_{k1} \;\ldots\ldots\; \sum_r a_{1r}b_{r1}c_{1n} + \sum_r a_{1r}b_{r2}c_{2n} + \ldots + \sum_r a_{1r}b_{rk}c_{kn} \\ \vdots \\ \sum_r a_{mr}b_{r1}c_{11} + \sum_r a_{mr}b_{r2}c_{21} + \ldots + \sum_r a_{mr}b_{rk}c_{k1} \;\ldots\; \sum_r a_{mr}b_{r1}c_{1n} + \sum_r a_{mr}b_{r2}c_{2n} + \ldots + \sum_r a_{mr}b_{rk}c_{2k} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k2} & \cdots & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{kn} \\ & & \vdots & \\ \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k2} & \cdots & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)C = A(BC)$.

Selanjutnya dengan menerapkan sifat-sifat pada operasi pada matriks, maka diperoleh suatu ketentuan yang ditulis dalam teorema berikut :

Teorema 2.1: *Setiap sistem persamaan linear pasti memenuhi salah satu kondisi berikut:*

tidak memiliki solusi, memiliki solusi tunggal, atau memiliki banyak solusi.

Bukti :

Misal sistem persamaan linear $AX=B$ memiliki solusi dan solusi tersebut adalah X_1 dan X_2. Diperoleh $AX_1 = B$ dan $AX_2 = B$, sehingga $AX_1 = AX_2$. Akibatnya $A(X_1\text{-}X_2) = 0$.

Jika $X_0 = X_1 - X_2$, maka

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k\,A(X_0) \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas, terlihat bahwa $X_1 + kX_0$ juga merupakan solusi. Karena terdapat tak hingga banyak untuk scalar k, maka sistem persamaan linear tersebut memiliki takhingga banyak solusi.

MATRIKS YANG MEMILIKI INVERS (INVERTIBEL)