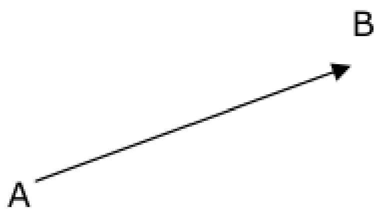
Vektor

Pendahuluan

Dalam bidang sains kita telah mengenal istilah besaran yang tidak mempunyai arah dan besaran yang mempunyai arah. Umumnya, besaran yang tidak mempunyai arah dikenal dengan istilah besaran skalar. Sedangkan besaran yang mempunyai arah disebut besaran vektor atau vektor.

A. **Definisi Vektor**

Vektor adalah besaran yang mempunyai nilai dan arah. Vektor dinotasikan sebagai ruas garis berarah. contoh: kecepatan, percepatan, gaya, momen gaya, dsb. Suatu partikel bergerak dari titik A ke titik B, maka dapat dikatakan bahwa partikel itu mengalami perpindahan.



Secara geometri, vector adalah ruas garis berarah. Karena vector merupak ruas garis maka vector memiliki ukuran panjang dank arena vector memiliki arah maka vector memiliki sudut terhadap sumbu x positif. Sebuah vector bisa dinyatakan dalam bentuk geometri yang digambarkan sebagai sebuah ruas garis dengan arah tertentu diamana salah satunya merupakan pangkal dan satunya lagi merupakan ujungnya. Vektor juga dapat dinyatakan dalam bentuk aljabar.

Komponen Vektor

Vektor dibentuk dari dua buah titik dimana satu tutuk sebagai pangkal dan satu titik lainya sebagai ujung. Vector yang berpangkal di titik $A(a_1,a_2)$ dan berujung di titik $B(b_1,b_2)$ memiliki koponen sebagai berikut:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Jika suatu vector berpangkal di titik pusat O(0,0) dan berujung di titik A**(a_1,a_2) maka** vector tersebut cukup dituliskan dalam satu huruf sesuai huruf titiknya dan ditulis huruf kecilnya. Vektor yang berpangkal di titik pusat O dan berujung di suatu titik disebut vector posisi. Vektor OA dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Notasi Vektor

Sebuah vector dapat dituliskan dalam beberapa bentuk notasi. Berikut ini adalah penulisan notasi vector.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

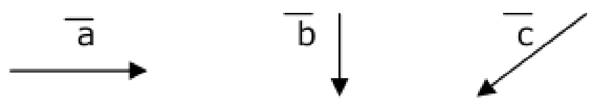
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$

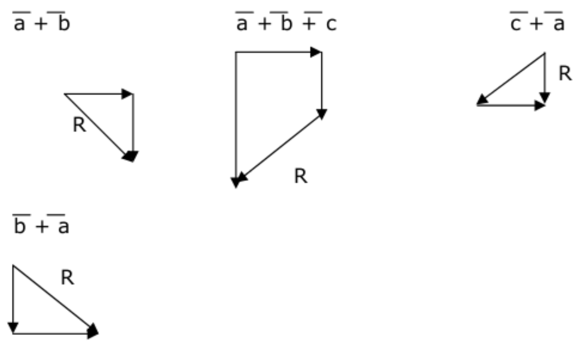
Ketiga memiliki arti yang sama, yaitu vector komponen v_1 dan v_2.

B. Operasi Vektor

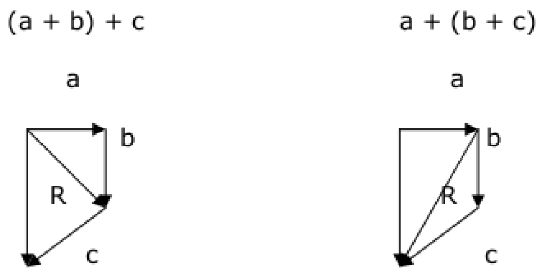
1. Penjumlahan vector secara geometris



Dari ketiga vector tersebut dapat dijumlahkan dengan cara sebagai berikut:



Pada penjumlahan vector berlaku hukum **a + b = b + a**



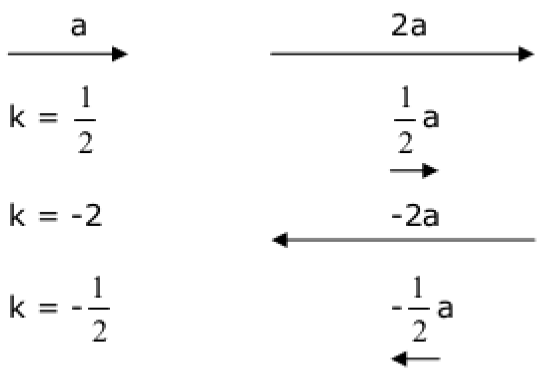
Pada vector berlaku sifat **ASOSIATIF (a + b) + c = a + (b + c)**

2. Pengurangan Vektor secara geomatris

Pengurangan vector dapat dilakuakan dengan menjumlahkan vector 1 dengan lawan vector 2.

C. Perkalian Vektor

1. Perkalian sebuah konstanta dengan sebuah vektor



- "Jika k positif maka arahnya sama dengan arah vector a"
- "Jika k negatif maka arahnya berlawanan dengan vector a"

2. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa skalar

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = |a||b| \cos\theta}$$

Operasi di atas disebut juga "dot product"

Keterangan:

a = vector a

b = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

3. Perkalian dua buah vector dengan hasil berupa vector lain

$$\boxed{\vec{a}x\vec{b} = |a||b| \sin\theta}$$

Keterangan:

a = vector a

b = vector b

θ = sudut yang dibentuk antara vector a dan vector b

Sifat - Sifat Operasi Hitung dalam Vektor

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} + 0 = 0 + \vec{a} = \vec{a}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

$k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} \pm k\vec{b}$

$(k \pm l)\vec{a} = k\vec{a} \pm l\vec{a}$

Contoh :

1. Diketahui vektor $\vec{a}$ = (-1, 2, 3), $\vec{b}$ = (-2, 0, 1) dan $\vec{c}$ = (3, -1, -2). Hitunglah :

   a. $2\vec{a} + \vec{b}$

   b. $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$

Jawab :

a. $2\vec{a} + \vec{b} = 2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\5\end{pmatrix}$

Jadi $2\vec{a} + \vec{b}$ = (-4, 4, 5)

b. $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} = 3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\-4\\-8\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$ = (13, 2, 3)

2. Buktikan bahwa vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2).

Jawab :

Agar dapat membuktikan bahwa vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2), maka harus mencari *k*(bilangan real) sehingga $\vec{a}$= **k**$\vec{b}$

$\vec{a}$= **k**$\vec{b}$ → $\vec{a}$- **k**$\vec{b}$ = 0

(-3, 0, 6) - k(1, 0, -2) = (0, 0, 0)

(-3, 0, 6) - (k, 0, 2k) = (0, 0, 0)

(-3 - k, 0, 6 + 2k) = (0, 0, 0)

Diperoleh k = 3 sehingga vektor $\vec{a}$= **3**$\vec{b}$

Jadi, vektor $\vec{a}$= (-3, 0, 6) sejajar dengan vektor $\vec{b}$= (1, 0, -2)

D. Vektor Khusus

1. Vektor Nol (0) adalah suatu vector dimana titik awal dan titik ujungnya berimpit. Elemen-elemen vector semuanya nol. $\underline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Vektor Satuan adalah vector yang panjangnya saja satuan vector. Vektor satuan dari vector $\underline{a}$ adalah: $\underline{e} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$

3. Vektor posisi adalah vector yang titik pangkalnya adalah O. Pentingnya untuk diingat, bahwa setiap vector dapat diganti dengan vector posisi, dengan menggunakan prinsip kesamaan dua vector. Jika A(a1,a20 suatu titik, maka titik tersebut juga bisa dituliskan sebagai vector posisi, sebagai $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

   Jika A=(a_1,a_2,a_3) dan B=(b_1,b_2,b_3) adalah: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix}$

4. Panjang Vektor

   Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ maka panjang dari vector adalah;

   $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

   Jika $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ maka panjang dari vector a adalah:

   $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

   Jika a dan b dua buah vektor maka:

   $$|\underline{a}+\underline{b}|^2 = 2|\underline{a}|^2 + 2|\underline{b}|^2 - |\underline{a}-\underline{b}|^2$$

   $$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\alpha}$$
   $$|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\alpha}$$

Latihan Soal dan Pembahasan:

1. Jika vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Maka vector $\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = ...?$

Jawab

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 10 - 2 \\ 2 + 8 - (-3) \\ 3 - 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Tunjukkan bahwa bidang $x + y - 2z = 1$ dan bidang $x + 3y - z = 4$ berpotongan membentuk garis dan tentukan persamaan garis tersebut !

Jawab:

Dengan menggunakan eliminasi Gauss-Yordan, SPL:

$x + y - 2z = 1$

$x + 3y - z = 4$

Diselesaikan dan menghasilkan penyelesaian:

$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}z, \quad y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z$ dan z bernilai sembarang.

Dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}t$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$$

$$z = t$$

Persamaan garis tersebut melalui titik A(-1/2, 3/2, 0) dan mempunyai vektor arah $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Diketahui vektor **a** = 2i – 6j – 3k dan **b** = 4i + 2j – 4k . Panjang proyeksi vektor **a** pada **b** adalah.....

   Jawab :

   Panjang masing-masing vektor, jika nanti diperlukan datanya:

$$|a| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$|b| = \sqrt{4^2 + (2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

   Proyeksi vektor a pada vektor b, namakan c:

$$|\mathbf{c}| = \frac{a \cdot b}{|\mathbf{b}|}$$

$$|\mathbf{c}| = \frac{(2i - 6j - 3k)(4i + 2j - 4k)}{6}$$

$$|\mathbf{c}| = \frac{8 - 12 + 12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Daftar Pustaka

1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. *file.upi.edu/Direktori/FPMIPA/PRODI.../BAB_1___**VEKTOR**.pdf*
4. http://klompokku.blogspot.co.id/2013/09/makalah.html diakses pada tanggal 09 maret 2016
5. https://matikzone.files.wordpress.com/2011/02/rumus-cepat-matematika-vektor.pdf diakses pada tanggal 09 maret 2016
6. http://pujiyanto-matematika.blogspot.co.id/2012/11/operasi-operasi-pada-vektor.html diakses pada tanggal 09 maret 2016
7. http://pandaimatematika.com/12ipa/mod/page/view.php?id=42 diakses pada tanggal 09 maret 2016
8. http://wahyunugroho219.blogspot.co.id/2013/06/latihan-soal-matematika-kelas-11.html diakses pada tanggal 09 maret 2016