Ukuran matriks	2 x 2	2 x 1	1 x 4
Jumlah baris	2	2	1
Jumlah kolom	2	1	4

Matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut MATRIKS BARIS, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut MATRIKS KOLOM. Dua buah matriks A dan B dikatakan SAMA jika ukurannya sama (mxn) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j

Contoh

Matriks $A_{3X4} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Notasi matriks, Menggunakan huruf besar (kapital).

B. Jenis-Jenis Matriks

Berikut ini diberikan beberapa jenis matriks selain matriks kolom dan matriks baris

a) MATRIKS NOL, adalah matriks yang semua elemennya nol

Sifat-sifat :

1. A+0=A, jika ukuran matriks A = ukuran matriks 0
2. A*0=0, begitu juga 0*A=0.

b) MATRIKS BUJURSANGKAR, adalah matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Barisan elemen a_{11}, a_{22}, a_{33}, ….a_{nn} disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A tersebut.

Contoh : Matriks berukuran 2x2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) MATRIKS BUJURSANGKAR ISTIMEWA

a. Bila A dan B merupakan matriks-matriks bujursangkar sedemikian sehingga AB=BA maka A dan B disebut COMMUTE (saing).

b. Bila A dan B sedemikian sehingga AB=-BA maka A dan B disebut ANTI COMMUTE.

c. Mtriks M dimana $M^{k+1}=M$ untuk k bilangan bulat positif disebut matriks PERIODIK.

d. Jika k bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $M^{k+1}=M$ maka M disebut PERIODIK dengan PERIODE k.

e. Jika k=1 sehingga $M^2=M$ maka M disebut IDEMPOTEN.

f. Matriks A dimana $A^p=0$ untuk p bilangan bulat positif disebut dengan matriks NILPOTEN.

g. Jika p bilangan positif bulat terkecil sedemikian hingga $A^p=0$ maka A disebut NILPOTEN dari indeks p.

d) MATRIKS DIAGONAL, adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen diluar diagonal utamanya nol.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e) MATRIKS SATUAN/IDENTITY, adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonalnya adalah 1.

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat matriks identitas :

1. A*I=A
2. I*A=A

f) MATRIKS SKALAR, adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama tetapi bukan nol atau satu.

Contoh :

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

g) MATRIKS SEGITIGA ATAS (UPPER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen dibawah diagonal elemennya = 0.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

h) MATRIKS SEGITIGA BAWAH (LOWER TRIANGULAR), adalah matriks bujursangkar yang semua elemen diatas diagonal elemennya = 0.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

i) MATRIKS SIMETRIS, adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan } A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

j) MATRIKS ANTISIMETRIS, adalah matriks yang trnsposenya adalah negatif dari matriks tersebut. Maka A^T=-A dan a_{ij}=-a_{ij}, elemen diagonal utamanya = 0

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{maka } A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k) MATRIKS TRIDIAGONAL, adalah matriks bujursangkar yang semua elemen-elemennya = 0 kecuali elemen-elemen pada diagonal utama serta samping kanan dan kirinya.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

l) MATRIKS JODOH Ā, adalah jika A matriks dengan elemen-elemen bilangan kompleks maka matriks jodoh Ā dari A didapat dengan mengambil kompleks jodoh (CONJUGATE) dari semua elemen-elemnya.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 2+3i & 2i \\ 5 & 3-i \end{pmatrix} \quad \text{maka } \bar{A}=\begin{pmatrix} 2-3i & -2i \\ 5 & 3+i \end{pmatrix}$$

m) MATRIKS HERMITIAN. Matriks bujursangkar $A=(a_{ij})$ dengan elemen-elemen bilangan kompleks dinamakan MATRIKS HERMITIAN jika $(\bar{A})'=A$ atau matriks bujursangkar A disebut hermitian jika $a_{ij} = \bar{a}_{ij}$. dengan demikian jelas bahwa elemen-elemen diagonal dari matriks hermitian adalah bilangan-bilangan riil.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5+i \\ 5-i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{maka} \begin{pmatrix} 2 & 5-i \\ 5+i & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan } \bar{A}'=\begin{pmatrix} 2 & 5+i \\ 5-i & 3 \end{pmatrix}$$

C. Operasi Matriks

a) Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika $A=(a_{ij})$ dan $B=(b_{ij})$ adalah matriks-matriks berukuran sama, maka A+B adalah suatu matriks $C=(c_{ij})$ dimana $(c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij})$ atau [A]+[B] = [C] mempunyai ukuran yang sama dan elemennya $(c_{ij}) = (a_{ij}) +(b_{ij})$

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1+2 \\ 4+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A+C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A+C tidak terdefinisi (tidak dapat dicari hasilnya) karena matriks A dan B mempunyai ukuran yang tidak sama.

b) Pengurangan Matriks

Sama seperti pada penjumlahan matriks, pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks-matriks yang mempunyai ukuran yang sama. Jika ukurannya berlainan maka matriks hasil tidak terdefinisikan.

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{maka}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 4-2 \\ 4-3 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Perkalian Matriks Dengan Skalar

Jika k adalah suatu bilangan skalar dan A=(a_{ij}) maka matriks kA=(ka_{ij}) yaitu suatu matriks kA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan k. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau dibelakang matriks. Misalnya [C]=k[A]=[A]k dan (c_{ij}) = (ka_{ij})

Contoh :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{maka } 2A=\begin{pmatrix} 2*1 & 2*2 & 2*3 \\ 2*0 & 2*-1 & 2*5 \end{pmatrix}$$

Pada perkalian skalar berlaku hukum distributif dimana k(A+B)=kA+kB.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dengan } k=2\text{, maka}$$

K(A+B) = 2(A+B) = 2A+2B

$$2(A+B) = 2\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A+2B = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

d) PERKALIAN MATRIKS DENGAN MATRIKS

Beberapa hal yang perlu diperhatikan :

1. Perkalian matriks dengan matriks umumnya tidak komutatif.
2. Syarat perkalian adalah jumlah banyaknya kolom pertama matriks sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.
3. Jika matriks A berukuran mxp dan matriks pxn maka perkalian A*B adalah suatu matriks C=(c_{ij}) berukuran mxn dimana

   $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{ip}b_{pj}$

Contoh : 1) A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

A x B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

2) A= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

A x B = $\begin{pmatrix} (3*3) + (2*1) + (1*0) \\ (1*3) + (2*1) + (1*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

Beberapa Hukum Perkalian Matriks :

1. Hukum Distributif, A*(B+C) = AB + AC
2. Hukum Assosiatif, A*(B*C) = (A*B)*C
3. Tidak Komutatif, A*B $\neq$ B*A
4. Jika A*B = 0, maka beberapa kemungkinan
   (i) A=0 dan B=0
   (ii) A=0 atau B=0
   (iii) A$\neq$0 dan B$\neq$0
5. Bila A*B = A*C, belum tentu B = C

D. Matriks Transpose

Jika diketahui suatu matriks $A=a_{ij}$ berukuran mxn maka transpose dari A adalah matriks A^T =nxm yang didapat dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A sebagai kolom ke-i dari A^T.

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

1. $(A^T) = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $k(A^T) = (kA)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Buktikan sifat-sifat transpose diatas !

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B^t \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal.

1. Diketahui $\begin{bmatrix} x & -2 \\ -4 & y \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ Tentukan x?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{bmatrix}$$

2. $$B = \begin{bmatrix} a-1 & -c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika $A+B^t=C^2$ maka tentukan d?

Daftar Pustaka

1. Mukhtar, ghozali sumanang. 2010. Aljabar Liniear. Bandung
2. Gazali,wikaria.2005.MATRIKS DAN Transformasi Linear. Yogyakarta. Graha Ilmu
3. http://hmmusu.blogspot.co.id/2010/07/jenis-jenis-matriks.html diakses pada tanggal 07 maret 2016