

MATRIKS AUGMENTASI

Jika diperhatikan dengan seksama, maka untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, cukup diperhatikan koefisien dari masing-masing variable. Oleh karena itu untuk menyelesaikan sistem persamaan linear seperti di atas, dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Bentuk seperti ini dinamakan **matriks augmentasi** (*augmented matrix form*).

ELIMINASI GAUSS

Misal akan dicari penyelesaian dari sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ 2x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 10 \end{aligned}$$

Matriks augmentasi dari sistem persamaan linear di atas adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

Selanjutnya, dengan melakukan OBE, diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{array} \right] 3R_3 - 4R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right] \Rightarrow \text{disebut } \mathbf{bentuk\ eselon\ baris}.$$

Setelah matriks augmentasi menjadi matriks dalam bentuk eselon baris, maka kita dapat memperoleh solusi sistem persamaan linear tersebut dengan melakukan substitusi dimulai dari baris terakhir. Pada sistem persamaan linear di atas :

$$6z = 18 \Rightarrow z = 3$$

$$z = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 2 \Rightarrow x = 1$$

Akhirnya diperoleh solusi $x = 1$; $y = 2$ dan $z = 3$.

Definisi: Elemen tak nol pertama dari setiap baris pada matriks dinamakan **elemen pivot**. Suatu matriks dikatakan dalam **bentuk eselon baris** jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. Semua bilangan pada kolom di bawah elemen pivot adalah nol.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian bawah dari matriks.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan metode eliminasi Gauss, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan matriks augmentasi
2. Melakukan OBE untuk memperoleh bentuk eselon baris .
3. Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan substitusi

LATIHAN :

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi gauss:

$$\begin{array}{l} x + 2y + z + 2w = 9 \\ 2x + y - z + w = 3 \\ 1. \quad 3x + 2y + z - w = 5 \\ \quad 2x - 3y + 2z + 3w = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z + w = 3 \\ 2. \quad 2x + 5y - z + 3w = 8 \\ \quad 3x + 2y + z - 2w = 0 \\ \quad 2x - y + z + 2w = 1 \end{array}$$

ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Metode ini hampir sama dengan metode eliminasi gauss. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode ini, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan matriks augmentasi
2. Melakukan OBE sehingga matriks augmentasinya menjadi **bentuk eselon baris tereduksi**.

Suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi jika :

1. Elemen pivot = 1
2. Semua bilangan pada kolom di bawah elemen pivot adalah nol.
3. Jika terdapat baris yang seluruhnya nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian bawah dari matriks.
4. Setiap kolom yang mempunyai elemen pivot mempunyai nol ditempat lain

Misal akan diselesaikan sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 8 \\2x + y - z &= 1 \\3x + 2y + z &= 10\end{aligned}$$

Langkah –langkah penyelesaian dengan metode eliminasi gauss-jordan adalah sebagai berikut :

1. **Matriks augmentasi** dari sistem persamaan linear di atas adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right]$$

2. Menerapkan OBE sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2 \\ 3R_3 - 4R_2 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right] \frac{1}{6}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \end{array}$$

Matriks terakhir ini dikatakan dalam **bentuk eselon baris tereduksi**.

Jadi penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah :

$z = 3$, $y = 2$, dan $x + 2y = 5$, sehingga $x = 1$.

LATIHAN

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan eliminasi gauss-jordan :

$$x + y + 2z = 8$$

$$1. \quad -x - 2y + 3z = 1$$

$$3x - 7y + 4z = 10$$

$$2x + y + 3z = 5$$

$$2. \quad -2y + 7z = 7$$

$$3x + 4y + 5z = 8$$

KONSISTENSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Misal akan diselesaikan suatu sistem persamaan linear :

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 4y = 2$$

Dengan menerapkan eliminasi gauss, diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right] R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{array} \right]$$

Menurut hasil di atas, diperoleh persamaan $0 \cdot x + 0 \cdot y = -8$. Dari sini, tidak mungkin ada nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu sistem persamaan linear di atas dikatakan **tidak konsisten**.

Definisi : *suatu sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi dinamakan tidak konsisten.*

Selanjutnya perhatikan sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x - 6y + 3z &= 4 \\ -x + 3y - z &= -1 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan eliminasi gauss, diperoleh bentuk eselon baris sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 + R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Berdasarkan hasil di atas, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned} \Rightarrow x - 3y = -1.$$

Akibatnya sistem persamaan linear tersebut memiliki banyak solusi, misal $(-1, 0, 2)$, $(0, 1/3, 2)$, $(2, 1, 2)$, dll.

LATIHAN

Selidiki diantara sistem persamaan linear berikut, manakah yang tidak konsisten dan manakah yang memiliki banyak solusi.

$$\begin{array}{lll} x + y + 2z = 0 & x + 2z = 0 & x + 2z = 0 \\ 1. \quad x + 2y + 3z = 2 & 2. \quad x + 2y + 2z = 1 & 3. \quad y - z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 5 & x + 4y + 2z = 2 & x + y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}x - y - 2z &= 3 \\x + 2y - z &= 0 \\4. \quad 2x - y + z &= 5 \\x - y - z &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\5. \quad x - y + z &= 1 \\2x + 2z &= 4\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil latihan di atas, apakah ciri-ciri suatu sistem persamaan linear **tidak konsisten** dan apakah ciri-ciri suatu sistem persamaan linear memiliki **banyak solusi**?