

Invers matriks



INVERS MATRIKS

- Definisi :

Jika A dan B adalah sebarang matriks bujur sangkar sedemikian sehingga $AB=BA=I$. Maka B merupakan invers dari A atau A^{-1} dan sebaliknya. Matriks yang mempunyai invers disebut invertible atau non singular.

- Untuk mendapatkan A^{-1} , dapat dilakukan dengan cara :

1. Metode Matriks Adjoint / Determinan
2. Metode Operasi Baris Elementer (OBE)
atau Operasi Kolom Elementer (OKE)



Mencari Invers dengan Matriks Adjoint

Ingat kembali sifat matriks adjoint, yaitu :

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = |A| I$$

Jika $|A| \neq 0$, maka :

$$A \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} A = I$$

Menurut definisi matriks invers :

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

Ini berarti bahwa :

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|} \quad \text{dengan } |A| \neq 0$$



Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solusi :

$$C_{11} = M_{11} = d$$

$$C_{21} = -M_{21} = -b$$

$$C_{12} = -M_{12} = -c$$

$$C_{22} = M_{22} = a$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



Carilah invers dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Solusi :

$$\begin{array}{lll} C_{11} = M_{11} = -5 & C_{21} = -M_{21} = 4 & C_{31} = M_{31} = -4 \\ C_{12} = -M_{12} = 1 & C_{22} = M_{22} = -2 & C_{32} = -M_{32} = 0 \\ C_{13} = M_{13} = 1 & C_{23} = -M_{23} = 0 & C_{33} = M_{33} = 2 \end{array}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(-5) + (4)(1) + (4)(1) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Mencari invers dengan OBE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OBE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

$$P A = I$$

dengan P hasil penggandaan matriks elementer (baris).

$$\begin{aligned} \text{Selanjutnya,} \quad P A &= I \\ P^{-1} P A &= P^{-1} I \\ I A &= P^{-1} \\ A &= P^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Ini berarti} \quad A^{-1} = P$$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (baris) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OBE :

$$(A \mid I) \quad \sim \quad (I \mid A^{-1})$$



Mencari invers dengan OKE

Jika A matriks persegi non singular, dengan OKE terhadap A dapat direduksi menjadi bentuk normal I sedemikian hingga :

$$A Q = I$$

dengan Q hasil penggandaan matriks elementer (kolom).

$$\begin{aligned} \text{Selanjutnya,} \quad A Q &= I \\ A Q Q^{-1} &= I Q^{-1} \\ A I &= Q^{-1} \\ A &= Q^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Ini berarti} \quad A^{-1} = Q$$

Dengan demikian hasil penggandaan matriks elementer (kolom) ini pada hakekatnya adalah invers dari matriks A.

Teknis pencarian invers dengan OKE :

$$\left(\begin{array}{c} A \\ I \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} I \\ A^{-1} \end{array} \right)$$



Carilah invers dari $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OBE !

Solusi :

$$(B | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{13}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{21(1)}, H_{31(2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{1(-1)}, H_{3(-1/2)}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{13(-3)}, H_{23(1)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{H_{12(-2)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$= (I | B^{-1})$$

$$\text{Jadi } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Carilah invers dari $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ dengan melakukan OKE !

Solusi :

$$\left(\begin{array}{c} B \\ \hline I \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} K_{21(-2)} \\ \\ \\ \\ K_{31(-2)} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} K_{12(-1)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} K_{13(-1)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 5 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} K_{1(1/2)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} K_{3(-1)} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} I \\ \hline B^{-1} \end{array} \right)$$

Jadi $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$



Sifat-sifat Matriks Invers

(1) Matriks invers (jika ada) adalah tunggal (*unique*)

Andaikan B dan C adalah invers dari matriks A, maka berlaku :

$$AB = BA = I, \text{ dan juga}$$

$$AC = CA = I$$

$$\text{Tetapi untuk : } BAC = B(AC) = BI = B \quad \dots\dots\dots(*)$$

$$BAC = (BA)C = IC = C \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (*) dan (**) haruslah $B = C$.

(2) Invers dari *matriks invers* adalah matriks itu sendiri.

Andaikan matriks $C = A^{-1}$, berarti berlaku :

$$AC = CA = I \quad \dots\dots\dots(*)$$

$$\text{Tetapi juga berlaku } C C^{-1} = C^{-1} C = I \quad \dots\dots\dots(**)$$

Dari (*) dan (**) berarti :

$$C^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$



Sifat-sifat Matriks Invers

(3) Matriks invers bersifat nonsingular (determinannya tidak nol)

$$\det (A A^{-1}) = \det (A) \det (A^{-1})$$

$$\det (I) = \det (A) \det (A^{-1})$$

$1 = \det (A) \det (A^{-1})$; karena $\det (A) \neq 0$, maka :

$$\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

ini berarti bahwa $\det (A^{-1})$ adalah tidak nol dan kebalikan dari $\det (A)$.

(4) Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi berdimensi n , dan berturut-turut A^{-1} dan B^{-1} adalah invers dari A dan B, maka berlaku hubungan : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$$(AB) (AB)^{-1} = (AB)^{-1} (AB) = I \quad (*)$$

di sisi lain :

$$(AB) (B^{-1} A^{-1}) = A(BB^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} A^{-1}) (AB) = B^{-1}(A^{-1}A) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I \quad (**)$$

Menurut sifat (1) di atas matriks invers bersifat unigue (tunggal), karena itu dari (*) dan (**) dapatlah disimpulkan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.



Sifat-sifat Matriks Invers

(5) Jika matriks persegi A berdimensi n adalah non singular, maka berlaku $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Menurut sifat determinan : $|A^T| = |A| \neq 0$, oleh sebab itu $(A^T)^{-1}$ ada, dan haruslah :

$$(A^T)^{-1} A^T = A^T (A^T)^{-1} = I \quad (*)$$

Di sisi lain menurut sifat transpose matriks :

$$(A A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

$$I^T = (A^{-1})^T A^T$$

$(A^{-1})^T A^T = I$, hubungan ini berarti bahwa $(A^{-1})^T$ adalah juga invers dari A^T .

Padahal invers matriks bersifat tunggal, oleh karena itu memperhatikan (*), haruslah :

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} .$$

