Materi-5

DUALITAS DAN ANALISIS SENSITIVITAS

Review - Interpretasi Ekonomis dari Simbol Dalam Simplex

Simbol	Interpretasi ekonmis
X_j	Tingkat Aktivitas (j = 1, 2, ……, n)
C_j	Laba per satuan aktivitas j
Z	Laba total dari seluruh aktivitas
b_i	Jumlah sumber I yang tersedia (i = 1, 2, ………, m)
a_{ij}	Jumlah sumber I yang ‘dipakai’ oleh setiap satuan aktivitas j

Asumsi dasarnya adalah : masalah asli/simplex/primal-nya dalam bentuk standar.

- Bentuk Standar masalah asli/simplex/primal adalah :
- Fungsi Tujuannya :
- Maksimumkan $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
- Batasan-batasan : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$, untuk i = 1, 2, ….. m

dan $X_j \geq 0$; untuk j = 1, 2, ……..n

Universitas Bina Darma

Dasar Teori Dualitas

Tabel Simplex

Variabel Dasar	Z	X_1 X_2 ………….. X_n X_{n+1}………. X_{n+m}	NK
Z	1	(Z1-C1) (Z2-C2) ……. (Zn-Cn) Y1 ……… Ym	Y0

- **Kondisi Optimal tercapai apabila :**

  $Z_j - C_j \geq 0$, untuk j = 1, 2, ……. n.

  $Yi \geq 0$, untuk i = 1, 2, …….m

- **Bentuk Dual-nya adalah :**

- **Maksimumkan Yo** $= \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$

- **Batasan-batasan :** $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \geq C_j$ **, untuk j = 1, 2, ….. n**

dan $Y_i \geq 0$**; untuk i = 1, 2, ……..m**

Hubungan Simplex/Primal – Dual

(1) Parameter batasan-batasan primal (atau dual) merupakan koefisien variabel dual (atau primal); (2) koefisien fungsi tujuan primal (atau dual) merupakan nilai kanan dua (atau primalnya).

Primal (atau Dual)	Dual (atau Primal)
Batasan I	Variabel I
Fungsi Tujuan	Nilai kanan

Tabel Primal-Dual Linier Programing

PRIMAL		DUAL
1. Fungsi Tujuan : Maksimasi Minimasi	→	Fungsi Tujuan : Minimasi Maksimasi
1. Konstanta Ruas kanan	→	Koefisien Fungsi Tujuan
1. Koefisien Fungsi Tujuan	→	Konstanta Ruas kanan
1. Pembatas 2. Fungsi Tujuan Maksimasi ❖ Pembatas ≥ ❖ Pembatas ≤ ❖ Pembatas = 3. Fungsi Tujuan Minimasi ❖ Pembatas ≥ ❖ Pembatas ≤ ❖ Pembatas =	→ → → → → → →	Non Negative Constraint Non negative constraint $y_i \le 0$ Non negative constraint $y_i \ge 0$ Non negative constraint tidak terbatas dalam tanda Non negative constraint $y_i \ge 0$ Non negative constraint $y_i \le 0$ Non negative constraint tidak terbatas dalam tanda
1. Non negative constraint 2. Fungsi Tujuan Maksimasi ❖ Non negative constraint $x_i \ge 0$ ❖ Non negative constraint $x_i \le 0$ ❖ Non negative constraint Tidak terbatas dalam tanda 3. Fungsi Tujuan Minimasi ❖ Non negative constraint $x_i \ge 0$ ❖ Non negative constraint $x_i \le 0$ ❖ Non negative constraint Tidak terbatas dalam tanda	→ → → → → → →	Pembatas Pembatas ≥ Pembatas ≤ Pembatas = Pembatas ≤ Pembatas ≥ Pembatas =

Contoh Soal :

- Perusahaan sepatu ‘IDEAL’ membuat 2 macam sepatu. Yang pertama adalah sepatu dengan sol karet (X_1), dan yang kedua adalah sepatu dengan sol dari kulit (x_2). Untuk memproduksi kedua macam sepatu tersebut perusahaan menggunakan 3 jenis mesin. Mesin 1 = Khusus untuk membuat sepatu dari karet, dng kapasitas max. = 8 jam. Mesin 2 = Khusus untuk membuat sepatu dari kulit, dng kapasitas max. = 15 jam. Mesin 3 = Khusus untuk asemblim kedua macam sepatu tsb., dng kapasitas max. =30 jam

- Setiap lusin X_1 mula-mula dikerjakan di mesin 1 selam 2 jam, dan selanjutnya menuju mesin 3 selama 6 jam. Sedangkan x_2 dikerjakan oleh mesin 2 selama 3 jam dan langsung ke mesin 3 selama 5 jam.

- Sumbangan terhadap laba untuk setiap sepatu X_1 = Rp 30.000,-, sedangkan sepatu x_2 = Rp 50.000,-

- Untuk mendapatkan hasil yang optimal, berapakah Sepatu X_1 dan x_2 yang harus diproduksi ?

Tabel Primal-Dual Untuk Contoh di Atas

	X_1	X_2	
Y_1 Y_2 Y_3	2 0 6	0 3 5	≤ 8 ≤ 15 ≤ 30
	≥ 3	≥ 5	

Penyajian dalam persamaan Primal – Dual

Maksimumkan : $Z = 3X_1 + 5X_2$

Batasan-batasan :

$2X_1 \leq 8$

$3X2 \leq 15$

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$

dan $X_1, X_2 \geq 0$

Minimumkan : $Yo = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

$2Y_1 + 6Y_3 \geq 3$

$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

Tabel Optimal Simplex-nya :

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	NK
Z	1	0	0	0	5/6	½	27 ½
X3	0	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X2	0	0	1	0	1/3	0	5
X_1	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6

Solusi Optimalnya - Simplexnya :

X1 = 5/6

X2 = 5

Laba = 27 ½

Dengan cara sama, solusi optimal masalah Dual-nya adalah :

Y1 = 0

Y2 = 5/6

Y3 = ½

Penjelasan :

- Perhatikan ! Ketiga nilai tersebut sama dengan koefisien slack variabel pada baris pertama (Z)
- Nilai ini juga menunjukkan kontribusi per satuan sumber I (produk) terhadap laba

  Contoh : untuk Y3 = ½ → kendala 3

  Bila kapasitas mesin 3 (batasan ke-3) dapat dinaikkan dari $6X1 + 5X2 \leq 30$ menjadi $6X1 + 5X2 \leq 31$, maka X1, X2, dan laba akan berubah menjadi :

  $6X_1 + 5X_2 = 31 \rightarrow x\ 3$
  $3X_2 = 15 \rightarrow x\ 5$

  $18X_1 + 15X_2 = 93$
  $15X_2 = 75$

  $18X_1 = 18$

  $X_1 = 1$
  $X_2 = 5$

- Sehingga nilai Z-nya adalah : Z* = 3(1) + 5(5) = 28, naik ½ dibanding sebelumnya.

Tetapi kenaikan ada batasnya (dalam contoh, max. 19), Bagaimana kalau naik 50 ?

$6X1 + 5X2 = 50 \rightarrow x\ 3$

$3X2 = 15 \rightarrow x\ 5$

$18X1 + 15X2 = 93$

$15X2 = 75$

$18X1 = 75$

$X1 = 4\ 1/6 \rightarrow$ ini sudah melanggar batasan ke-1, dimana :

$2X1 \leq 8$, sehingga $X1 \leq 4$

Begitu pula dengan kenaikan-kenaikan kapasitas pada batasan lainnya.

ANALISIS SENSITIVITAS

Manfaat utama : menghindari perhitungan ulang yang dapat terjadi bila ternyata terjadi perubahan-perubahan pada masalah awal, seperti perubahan :

- Perubahan pada nilai kanan fungsi batasan
- Perubahan pada koefisien fungsi tujuan
- Penambahan variabel baru
- Penambahan batasan baru
- Perubahan pada koefisien yang menunjukkan berapa bagian kapasitas sumber yang di-‘konsumsi’ oleh satu satuan kegiatan
- Perubahan-perubahan tsb. Akan mengakibatkan salah satu dibawah ini :
- Penyelesaian optimal tidak berubah
- Variabel-variabel dasar mengalami perubahan, tapi nilainya tidak berubah

Kaidah Primal-Dual

Kaidah 1 :

Pada setiap iterasi dalam simplex (baik primal maupun dual), matriks yang berisi variabel-variabel ‘starting point’ (tidak termasuk baris tujuan) dapat dipakai untuk menghitung koefisien-koefisien baris tujuan yang berhubungan dengan matriks tersebut.

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	NK
Z	1	0	0	0	5/6	½	27 ½
X3	0	0	0	1	5/9	-1/3	6 1/3
X_2	0	0	1	0	1/3	0	5
X_1	0	1	0	0	-5/18	1/6	5/6

$$(0, 5, 3)\begin{vmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{vmatrix} = (0, 5/6, ½)$$

Koefisien fs. Tujuan

Perhatikan baris 1 pada tabel optimal

Kaidah 2 :

Pada setiap iterasi dalam simplex (baik primal maupun dual), nilai kanan (kecuali untuk baris tujuan) dapat dihitung dengan mengalikan matriks yang dimaksud dalam kaidah 1, dengan vektor kolom yang berisi nilai kanan dari fungsi-fungsi batasan mula-mula.

$$\left|\begin{matrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} 8 \\ 15 \\ 30 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 6\ 1/3 \\ 5 \\ 5/6 \end{matrix}\right|$$

Perubahan Pada Fungsi Tujuan

Misalkan kontribusi laba per satuan produk menjadi X1 = Rp 40.000,- dan X2 = Rp 60.000,-, maka output optimal yang baru adalah :

$$(0,\ 5,\ 4)\begin{vmatrix} 1 & 5/9 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -5/18 & 1/6 \end{vmatrix} = (\ 0,\ 8/9,\ 2/3\ )$$

Perubahan Koefisien-koefisien Teknis Fs. Tujuan. Misalnya dengan contoh Dual :

Minmumkan : $Z = 60.000Y1 + 75.000Y2 + 45.000Y3$

Batasan-batasan :

$4Y1 + 4Y2 + 2Y3 \geq 30$

$5Y1 + 6Y2 + 5Y3 \geq 40$

$6Y1 + 8Y2 + 5y3 \geq 60$

$Y1, Y2, Y3 \geq 0$

Misalkan terjadi perubahan koefisien teknis pada X2 (Batasan 2 di Dual-nya), dari :

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ menjadi } \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ maka :}$$

Fungsi batasan 2 - Dualnya menjadi :

$3Y1 + 4Y2 + 6Y3 \geq 40$, dan nilai X2 pada baris X4, X1, dan X3 pada tabel optimal simpleksnya akan menjadi :

$$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ menjadi } \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} \text{ maka : } \begin{vmatrix} 1 & -3/2 & 6/5 \\ 0 & 5/4 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\ 1/5 \\ -17 \\ 4 \end{vmatrix}$$