Barisan, Deret Aritmatika dan Geometri

Barisan aritmatika

Perhatikan barisan-barisan bilangan berikut !

I). 2, 8, 14, 20, …

Ii). 3, 5, 7, 9, …

Iii). 25, 20, 15, 10, …

Barisan diatas merupakan contoh barisan aritmatika.

Secara umum dapat dikatakan bahwa :

$$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n \text{ disebut barisan aritmatika jika}$$

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta.}$$

Konstanta dalam hal ini disebut dengan beda (b).

Untuk barisan pada contoh diatas :

I). 8 – 2 = 14 – 8 = 20 – 14 = . . . = 6. Jadi , bedanya adalah 6

Ii). 5 – 3 = 7 – 5 = 9 – 7 = . . . = 2. Jadi , bedanya adalah 2

Iii). 20 – 25 = 15 – 20 = 10 – 15 = . . . = -5. Jadi , bedanya adalah -5

Barisan aritmatika ialah suatu barisan bilangan-bilangan dimana beda (selisih) di antara dua suku berurutan merupakan bilangan tetap.

Rumus umum suku ke – *n* barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda *b* dapat diturunkan seperti berikut :

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = a + 2b$

$U_4 = a + 3b$

Dimana :
a adalah suku pertama / nilai awal
b adalah beda (selisih)

Jadi: $$U_n = a + (n - 1)\,b$$

Contoh :

Carilah suku ke-20 dari barisan aritmatika : -3, 2, 7, . . .

Jawab :

$a = -3,\ b = 7 - 2 = 5,\ n = 20$

$U_n = a + (n - 1)\,b$

$U_n = -3 + (20 - 1)\,5$

$U_n = -3 + (19)\,5$

$U_n = -3 + 95$

$U_n = 92$

Deret Aritmatika

Dari barisan aritmatika 4, 7, 10, 13, 16, . . . dapat dibentuk suatu deret yang merupakan penjumlahan dari suku barisan tersebut, yaitu $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \ldots$

Karena suku-suku yang dijumlahakan merupakan suku-suku dari barisan aritmatika, maka deret yang terbentuk disebut **deret aritmatika**.

Definisi :

Jika diketahui $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan suku-suku dari barisan aritmatika, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut deret aritmatika , dengan $U_n = a + (n - 1)\,b$.

Jika S_n merupakan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmatika, maka rumus umum untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$$

Maka

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + \ldots + (a + (n-1)b) \\ S_n & = & U_n + (U_n + b) + (U_n + 2b) + (U_n + 3b) + \ldots + a \quad + \\ \hline 2S_n & = & \underbrace{(a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ldots + (a + U_n)}_{\text{Penjumlahan sebanyak n suku}} \end{array}$$

$$2S_n = n\,(a + U_n) \quad \rightarrow \quad S_n = \frac{1}{2} n\,(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2} n\,[a + (a + (n - 1)\,b)]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)\,b]$$

Jadi rumus umum jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah :

$$\mathbf{S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n - 1)\,b]}$$

Contoh :

Carilah jumlah 100 suku pertama deret $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

Jawab :

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$

Dalam hal ini : a = 1 , b = 3 – 1 = 2 , dan n = 100

$$S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n-1) b]$$

$$S_n = \frac{1}{2} 100 [2 . 1 + (100-1) 2]$$

$$S_n = 50 [2 + (99) 2]$$

$$S_n = 50 [200] = 10.000$$

SISIPAN DAN SUKU TENGAH

Sisipan

Jika diantara dua suku yang berurutan dalam suatu barisan aritmatika dimasukkan satu atau lebih suku yang lain sehingga menjadi barisan aritmatika baru, maka proses ini disebut menyisipkan atau interpolasi.

Misalkan : diantara dua suku U_1 dan U_2 disisipkan *k* bilangan, sehingga terjadi barisan aritmatika baru dan apabila beda barisan aritmatika baru dimiskalkan **b'**. Maka $\mathbf{U_1}$ **,** $\mathbf{(U_1 + b')}$ **,** $\mathbf{(U_1 + 2b')}$ **,** $\mathbf{(U_1 + 3b')}$ **, . . . ,** $\mathbf{(U_1 + k\,b')}$ **,** $\mathbf{U_2}$

Dimana $(U_1 + k\,b') + b' = U_2$

$$\Leftrightarrow U_1 + (k+1)\,b' = U_2$$

$$\Leftrightarrow b' = \frac{U_2 - U_1}{k+1} \quad \text{atau} \quad b' = \frac{b}{k+1}$$

Contoh :

Diketahui barisan aritmatika 1 , 7, 13, 19. jika di anatar dua suku berurutan disisipkan dua bilangan sehingga terjadi barisan aritmatika baru, tentukan barisan aritmatika baru itu !

Jawab :

1, 7, 13, 19

Dalam hal ini : n = 4, b = 7 – 1 = 13 – 7 = 19 – 13 = 6 dan k = 2, maka

$$b' = \frac{b}{k+1} = \frac{6}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Sehingga barisan aritmatika baru adalah : **1**, 3, 5, **7**, 9, 11, **13**, 15, 17, **19**

Suku Tengah $\mathbf{U_t}$

Apabila banyak suku suatu barisan aritmatika ganjil, maka terdapat sebuah suku tengah yang disebut U_t .

$$\mathbf{a, \ldots, U_t, \ldots, U_n \rightarrow \text{untuk n ganjil}}$$

maka : $\mathbf{2U_t = a + U_n}$ **atau** $\mathbf{U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)}$

misalkan : 1, 5, 9, 13, 17, $\rightarrow$ n = 5 dan suku tengah U_t

$$U_t = \frac{1}{2}(1 + 17) = 9$$

Setiap suku barisan aritmatika sama dengan setengah jumlah kedua suku tetangganya.

$$U_k - b,\ U_k,\ U_k + b$$

$$U_k = \frac{1}{2}\{(U_k - b) + (U_k + b)\}$$

Barisan dan Deret Geometri

Barisan geometri

Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ merupakan contoh barisan geometri. Contoh barisan geometri yang lainnya adalah :

I). 2, 6, 18, 54, …

Ii). 5, -10, 20, -40, …

Iii). 27, 9, 3, 1, …

Secara umum dapat dikatakan bahwa barisan

$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n$ disebut barisan geometri jika

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \text{konstanta.}$$

Konstanta dalam hal ini disebut dengan rasio (r).

Untuk barisan pada contoh diatas :

I). rasio = $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \ldots = 3$

Ii). rasio = $\frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \ldots = -2$

Iii). rasio = $\frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \ldots = \frac{1}{3}$

Barisan geometri ialah suatu barisan bilangan-bilangan dimana rasio di antara dua suku berurutan merupakan bilangan tetap.

Rumus umum suku ke – *n* barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio *r* dapat ditemukan seperti berikut :

$U_1 = a$

$U_2 = ar$

$U_3 = ar^2$

$U_4 = ar^3$

Dimana :
a adalah suku pertama / nilai awal
r adalah rasio

Jadi: $$U_n = ar^{n-1}$$

Contoh :

Manakah kedua barisan in yang merupakan barisan geometri ?

a. 1, $\frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{1}{27} ...$

b. 2, 4, 12, 48, . . .

Jawab :

a. rasio = $\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = ... = \frac{1}{3}$ karena memiliki konstanta yang sama (rasio)

maka **barisan geometri**

b. rasio = $= \frac{4}{2} \neq \frac{12}{4} \neq \frac{48}{12} \neq ...$ karena tidak memiliki konstanta yang sama (rasio)

$= 2 \neq 3 \neq 2 \neq ...$

maka **bukan barisan geometri**

DERET GEOMETRI DAN DERET TAK HINGGA

Deret Geometri

Seperti halnya dengan deret aritmatika, jika kita memilikki suatu barisan geometri maka dapat dibentuk suatu deret yang merupakan penjumlahan berurut dari suku-suku barisan tersebut, yang disebut **deret geometri**.

Definisi :

Jika diketahui U_1, U_2, U_3, . . . , U_n merupakan suku-suku dari

barisan geometri, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ disebut

deret geometri , dengan $U_n = a\,r^{n-1}$.

Jika S_n merupakan jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri, maka rumus umum untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ maka

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

Kalikan S_n dengan r

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$

Kurangkan rS_n dengan S_n

$$
\begin{array}{rl}
S_n = & U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \\
rS_n = & ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n \\
\hline
S_n - rS_n = & a - ar^n
\end{array}
\quad -
$$

$S_n (1 - r) = a\,(1 - r^n)$

$$S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

Jadi rumus umum jumlah n suku pertama deret geometri adalah :

$$\mathbf{S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r}} \quad \textbf{untuk } \mathbf{r < 1}$$

$$\mathbf{S_n = a\,\frac{(r^n - 1)}{r - 1}} \quad \textbf{untuk } \mathbf{r > 1}$$

Contoh :

Hitunglah jumlah 7 suku pertama deret geometri $-2 + 1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - \ldots$

Jawab :

$-2 + 1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} - \ldots$

Dalam hal ini : a = **-2** , $r = -\frac{1}{2}$, dan n = 7

Oleh karena $r = -\frac{1}{2} < 1$, maka gunakan rumus $S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r}$

$$S_7 = -2\,\frac{\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-2\left(1+\frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{-4\left(\frac{129}{128}\right)}{3}$$

$$S_7 = -4\left(\frac{129}{128}\right)\frac{1}{3} = -\frac{43}{32}$$

Deret Geometri Tak Hingga

Perhatikan deret geometri berikut !

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}+\ldots$$

Jika deret tersebut diteruskan maka tidak terhitung banyak seluruh deret geometri tersebut. Deret geometri tersebut disebut **deret geometri tak hingga**.

Dengan rumus deret geometri kita juga dapat menentukan jumlah deret geometri tak hingga tersebut, yaitu :

$$S_n = 1\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}$$

Untuk $n \to \infty$, maka $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$

Jika suatu deret geometri tak hngga dapat ditentukan pendekatan jumlahnya, maka deret tersebut disebut **deret yang konvergen**.

Contoh deret konvergen :

$(i)\,1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$

$(ii)\,100-50+25-12\frac{1}{2}+\ldots$

$(iii)\,1000+100+10+1+0{,}1+\ldots$

Rasio pada masing-masing deret tersebut adaalh $(i)\frac{1}{3},(ii)-\frac{1}{2}\,dan\,(iii)\,0{,}1$.

Perhatikan pula deret geometri tak hingga berikut ini.

$(i) 1+4+16+64+\ldots$

$(ii) 2-6+18-54+\ldots$

$(iii) 3+6+12+24+\ldots$

Rasio pada masing-masing deret tersebut adalah 4, -3 dan 2. Jika deret tersebut diteruskan, maka nilainya akan semakin besar dan tidak terbatas. Deret yang demikian disebut deret **geometri divergen**.

Dengan memperhatikan beberapa contoh deret geometri diatas, maka dapat diambil kesimpulan :

Deret geometri tak hingga mempunyai jmalh tertentu (konvergen) juka rasio deret tersebut terletak pada interval $-1 < r < 1$ atau $|r| < 1$

Rumus Jumlah Deret Geometri Tak Hingga

Jumlah n suku pertama deret geometri dengan suku pertama a dan rasio *r* adalah :

$$S_n = a\,\frac{(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$$S_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$$

Untuk $n \to \infty$ dan $|r| < 1$, maka $r^n \to 0$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} - 0 = \frac{a}{1-r}$$

Jadi rumus jumlah deret geometri tak hingga ialah ;

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \quad \textbf{dimana } |r| < 1 \quad \textbf{atau } -1<r<1$$

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABANNYA HARUS DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN

1. Tentukan jumlah dari deret geometri berikut.
   a. 2 + 4 + 8 + 16 + ... (8 suku)
   b. 12 + 6 + 3 + 1,5 + ... (6 suku)

2. Suku pertama suatu deret geometri adalah 2 dan jumlah sampai tak berhingga adalah 4.Carilah rasionya.

3. Carilah n terkecil sehingga Sn > 1.000 pada deret geometri 1 + 4 + 16 + 64 + ...

4. Diketahui deret : 3 + 5 + 7 + 9 + ... Jumlah 5 suku yang pertama adalah....
5. Diketahui barisan aritmatika suku ke-4 = 17 dan suku ke-9 = 39. Suku ke-41 adalah....
6. Suku-suku suatu barisan geometri takhingga adalah positif, jumlah suku $U_1 + U_2 = 45$ dan $U_3 + U_4 = 20$, maka jumlah suku-suku barisan itu adalah .....