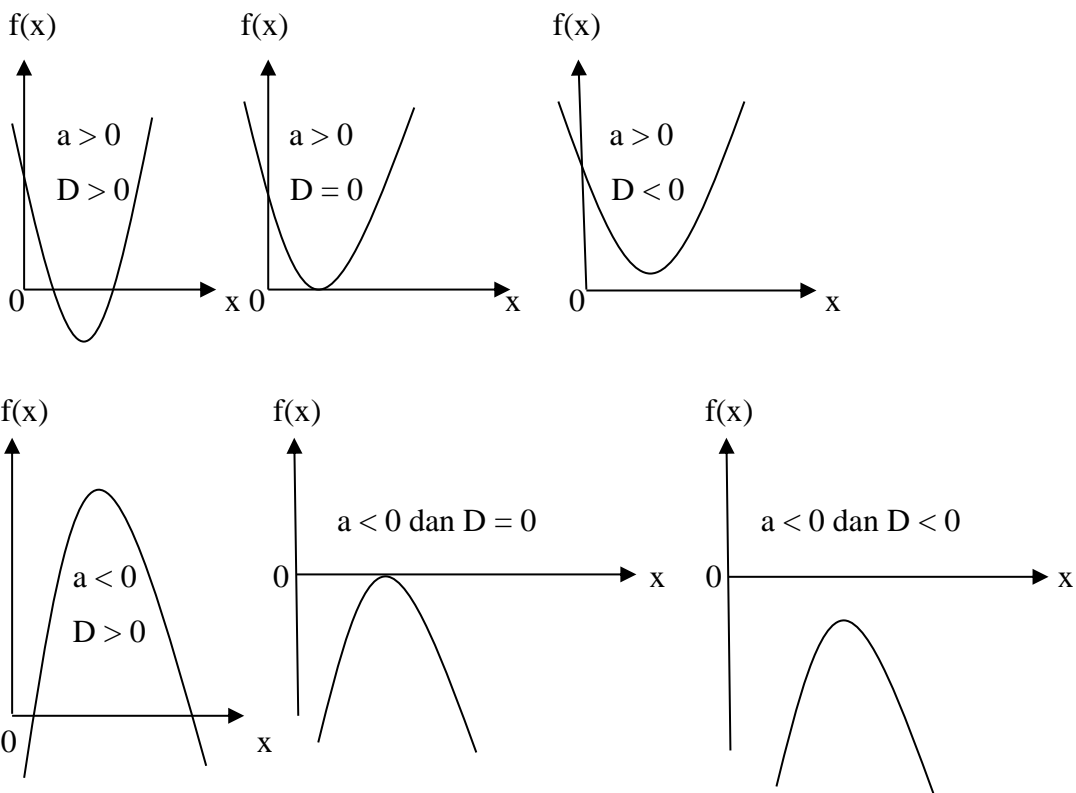


## FUNGSI KUADRAT(Jemakmun)

- Fungsi kuadrat merupakan fungsi polinom berderajat dua dengan kurvanya berbentuk parabola atau kurva kuadratik (quadratic curve). Dalam bentuk persamaan, secara umum persamaan kuadrat dituliskan sebagai  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , supaya persamaan kuadrat memiliki grafik tertentu, maka haruslah paling sedikit parameter A dan C tidak sama dengan nol.
  - Jika  $B = 0, A \neq 0$ , dan  $C \neq 0$ , maka kurvanya berupa lingkaran
  - Jika  $B^2 - 4AC < 0$ , maka kurvanya berupa ellips
  - Jika  $B^2 - 4AC = 0$ , maka kurva parabola
  - Jika  $B^2 - 4AC > 0$ , maka kurvanya berbentuk hiperbola

### PERSAMAAN KUADRAT (KURVA PARABOLA)

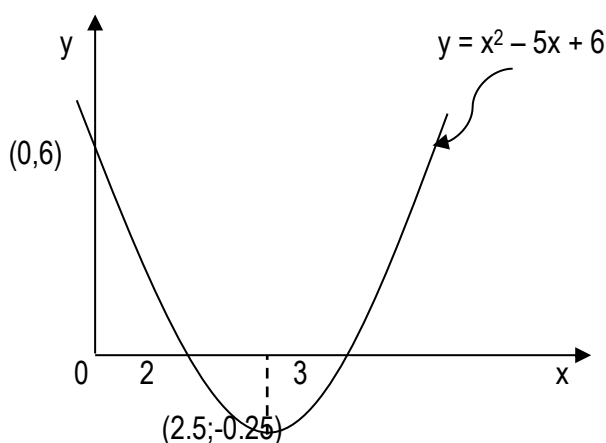
- Secara umum, persamaan kuadrat dituliskan sebagai  $ax^2 + bx + c = 0$  atau dalam bentuk fungsi dituliskan sebagai  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Sifat matematis dari persamaan kuadrat yang menentukan bentuk kurva parabolanya adalah koefisien a dan diskriminan  $D = b^2 - 4ac$ .
  - Jika  $a > 0$ , maka kurva parabola terbuka ke atas, sedangkan jika  $a < 0$ , maka kurva parabolanya terbuka ke bawah. Jadi jika  $a > 0$  akan ada titik ekstrim minimum dan jika  $a < 0$  akan ada titik ekstrim maksimum.
  - Jika  $D > 0$ , maka kurva parabola memotong sumbu-x di dua titik, jika  $D = 0$ , maka kurva parabola akan memotong sumbu-x di satu titik, dan jika  $D < 0$ , maka kurva parabola tidak memotong sumbu-x.



- Kurva parabola adalah kurva untuk fungsi kuadrat, sedangkan fungsi kuadrat adalah salah satu fungsi non linear, dimana variabel bebas (x) berpangkat paling tinggi dua.
- Untuk menggambarkan kurva parabola suatu fungsi kuadrat dapat ditempuh dua cara, yaitu:
  1. Tracing process curve, yaitu dengan menentukan lebih dulu nilai x, kemudian disubstitusikan ke dalam fungsinya sehingga diperoleh nilai y. Cara ini kurang efisien, karena diperlukan beberapa pasangan x dan y yang cukup banyak, paling sedikit 8 pasangan x dan y. Misalkan untuk menggambarkan kurva parabola dari fungsi kuadrat:  $y = x^2 - 5x + 6$  digunakan pasangan x dan y sebagai berikut:

x	-2	-1	0	1	2.5	2	3	4	5
y	20	12	6	2	-0.25	0	0	2	6

Sehingga bila koordinat (x,y) diplot ke dalam koordinat kartesian akan diperoleh kurva sebagai berikut:



2. Dengan menggunakan sifat-sifat matematis fungsi kuadrat, sebagai berikut
  - 1) Tentukan tipot kurva dengan sb-y dengan memisalkan  $x = 0$
  - 2) Tentukan tipot kurva dengan sb-x dengan memisalkan  $y = 0$ , sehingga  $ax^2 + bx + c = 0$  akan memiliki tiga kemungkinan solusi, yaitu:
    - Bila diskriminan  $D = b^2 - 4ac > 0$ , maka akan terdapat dua tipot kurva dengan sb-x yang diperoleh dengan rumus berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Bila  $D = 0$ , maka akan ada satu tipot kurva dengan sb-x, yaitu:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Bila  $D < 0$ , maka tidak akan ada tipot kurva dengan sb-x

- 3) Titik ekstrim kurva parabola diperoleh dengan rumus:

$$\left( \frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a} \right)$$

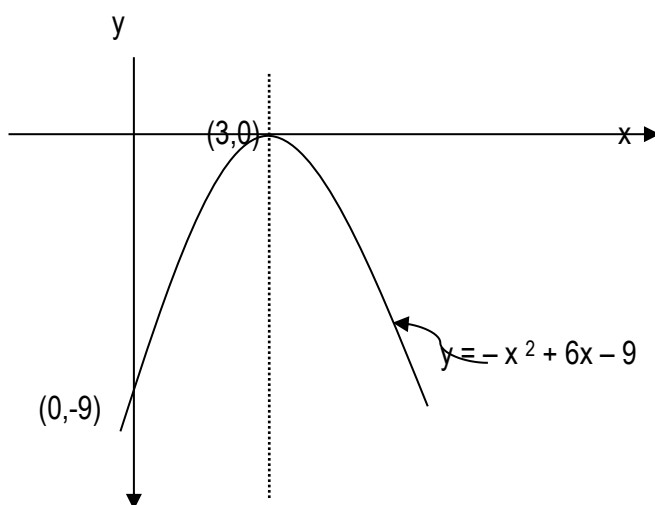
4) Tentukan sumbu simetris yang membagi kurva parabola menjadi dua bagian yang sama.

Garis sumbu simetris ini melewati titik ekstrim, persamaan garis simetris ini adalah:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

▪ Diketahui fungsi kuadrat  $y = -x^2 + 6x - 9$ , gambarkan kurva fungsi kuadrat tersebut dengan menggunakan sifat-sifat matematis.

- 1) Tipot kurva dengan sb-y, misalkan  $x = 0 \rightarrow y = -9$ , sehingga tipotnya  $(0, -9)$
- 2) Tipot kurva dengan sb-x, misalkan  $y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 9 = 0$  karena  $D = b^2 - 4ac$  D  
 $= 36 - 4(-1)(-9) = 0$ , maka hanya ada satu tipot yaitu  $x_1 = x_2 = (-6/-2) = 3 \rightarrow (3, 0)$
- 3) Titik ekstrimnya merupakan titik ekstrim maksimum  $\rightarrow (3, 0)$
- 4) Sumbu simetrisnya adalah  $x = 3$



#### APLIKASI KURVA PARABOLA (FUNGSI KUADRAT) DALAM EKONOMI

- Aplikasi fungsi kuadrat dalam bisnis dan ekonomi diantaranya:
  - Fungsi permintaan
  - Fungsi penawaran
  - Keseimbangan pasar
  - Kurva transformasi produk atau kurva kemungkinan produksi

#### FUNGSI PERMINTAAN

▪ **Contoh 1:**

Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah  $y = x^2 - 7x + 12$  dimana  $y$  adalah harga ( $P$ ) dan  $x$  adalah kuantitas ( $Q$ ). Gambarkan kurvanya.

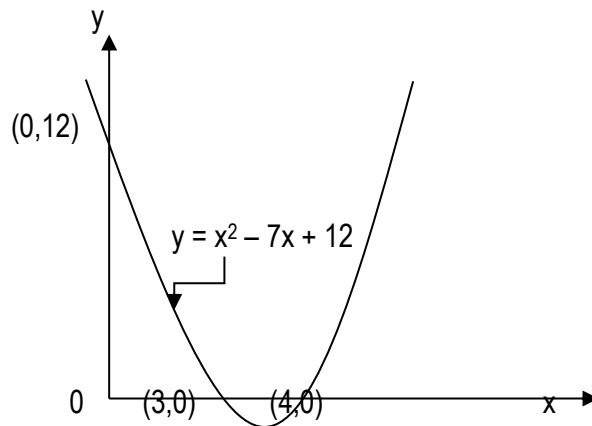
- Tipot dengan sb-y: Misalkan  $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$  tipot  $(0, 12)$
- Tipot dengan sb-x: Misalkan  $y = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

Karena  $D = 49 - 4(1)(12) = 1 \rightarrow D > 0$ , maka ada dua tipot dengan sb-x, yaitu:

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 3 \text{ dan } x_2 = 4 \rightarrow \text{tipot } (3, 0) \text{ dan } (4, 0)$$

- Karena  $a > 0$ , maka kurva parabola terbuka ke atas  $\rightarrow$  Titik ekstrim minimum

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan  $y = x^2 - 7x + 12$  berlaku untuk interval jumlah permintaan  $0 \leq x \leq 3$  dan harga permintaan  $0 \leq y \leq 12$

Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$$P = Q^2 - 7Q + 12 \text{ untuk } 0 \leq Q \leq 3 \text{ dan } 0 \leq P \leq 12$$

### Contoh 2:

Diketahui fungsi permintaan suatu barang  $y = -x^2 - x + 12$ , dimana  $y$  adalah harga ( $P$ ) dan  $x$  adalah kuantitas ( $Q$ ). Gambarkan kurvanya.

- Titik dengan sb-y: Misalkan  $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$  titik  $(0, 12)$

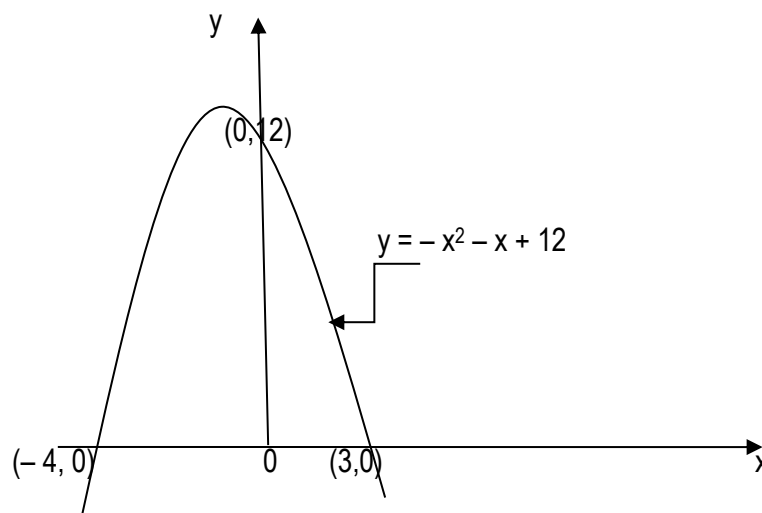
- Titik dengan sb-x: Misalkan  $y = 0 \rightarrow -x^2 - x + 12 = 0$

Karena  $D = 1 - 4(-1)(12) = 49 \rightarrow D > 0$ , maka terdapat dua titik dengan sb-x, yaitu:

$$-x^2 - x + 12 = 0 \rightarrow (x + 4)(-x + 3) = 0 \rightarrow x_1 = -4 \text{ dan } x_2 = 3 \rightarrow \text{titik } (-4, 0) \text{ dan } (3, 0)$$

- Karena  $a < 0$ , maka kurva parabola terbuka ke bawah  $\rightarrow$  titik ekstrim maksimum

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$$



Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan  $y = -x^2 - x + 12$  berlaku untuk interval jumlah permintaan  $0 \leq x \leq 3$  dan harga permintaan  $0 \leq y \leq 12$

Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$$P = -Q^2 - Q + 12 \text{ untuk } 0 \leq Q \leq 3 \text{ dan } 0 \leq P \leq 12$$

### FUNGSI PENAWARAN

Diketahui fungsi penawaran sejenis barang adalah  $y = x^2 + 3x + 2$ , dimana  $y$  adalah harga ( $P$ ) dan  $x$  adalah kuantitas ( $Q$ ). Gambarkan kurvanya.

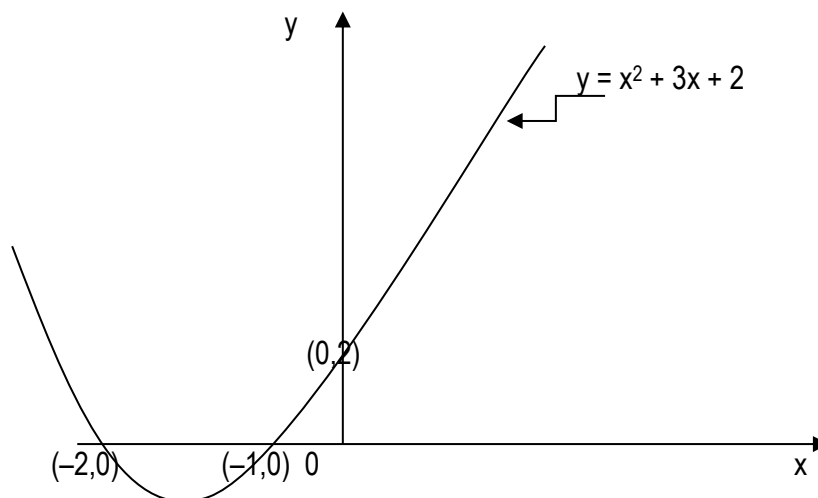
- Tipot dengan sb-y: Misalkan  $x = 0 \rightarrow y = 2$
- Tipot dengan sb-x: Misalkan  $y = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

Karena  $D = 9 - 4(1)(2) = 1 \rightarrow D > 0$ , maka terdapat dua tipot dengan sb-x, yaitu:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow (x + 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x_1 = -1 \text{ dan } x_2 = -2 \rightarrow \text{tipot } (-1, 0) \text{ dan } (-2, 0)$$

- Karena  $a > 0$ , maka kurva parabola terbuka ke atas  $\rightarrow$  titik ekstrim minimum

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Berdasarkan kurva penawaran di atas, tampak bahwa fungsi penawaran  $y = x^2 + 3x + 2$  berlaku untuk interval jumlah penawaran  $x \geq 0$  dan harga permintaan  $y \geq 2$

atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$$P = Q^2 + 3Q + 2 \text{ untuk } Q \geq 0 \text{ dan } P \geq 2$$

### KESEIMBANGAN PASAR (MARKET EQUILIBRIUM)

- Keseimbangan pasar terjadi ketika jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran atau  $Q_d = Q_s$ , harga yang tercipta pada keseimbangan pasar merupakan harga keseimbangan ( $P_e$ ).
- Diketahui fungsi permintaan dan fungsi penawaran sejenis barang adalah:

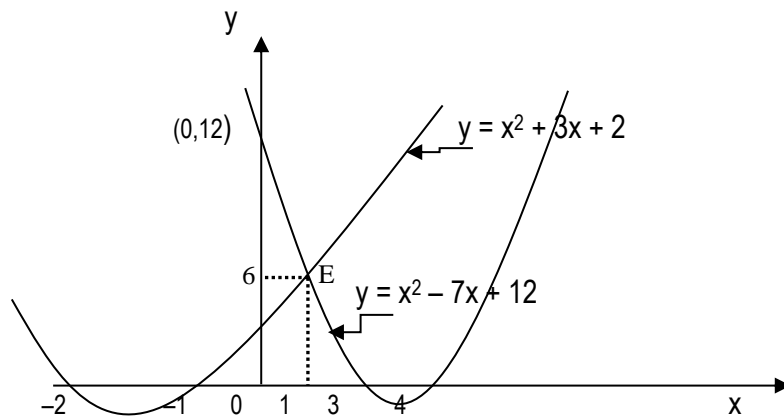
$$D: y = x^2 - 7x + 12$$

$$S: y = x^2 + 3x + 2$$

Tentukan keseimbangan pasarnya dan gambarkan kurvanya.

- Jawab: Pada keseimbangan pasar berlaku  $Q_d = Q_s$  atau  $P_d = P_s$ , sehingga keseimbangan pasar dapat diselesaikan dengan substitusi:

$x^2 - 7x + 12 = x^2 + 3x + 2 \rightarrow 10x = 10 \rightarrow x = 1$  dan  $y$  dapat dicari dengan mensubstitusikan nilai  $x = 1$  ke dalam fungsi permintaan atau fungsi penawaran, sehingga diperoleh nilai  $y$  sebagai  $y = (1)^2 + 3(1) + 2 = 6$ . Jadi keseimbangan pasar tercapai pada  $E(1,6)$ .



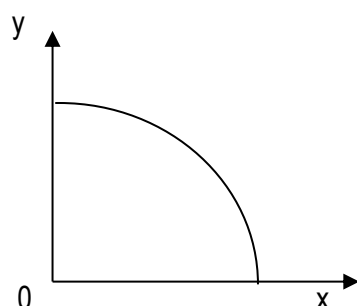
- PR:

Tentukan keseimbangan pasarnya dan gambarkan kurvanya, jika diketahui fungsi permintaan dan penawarannya adalah:

1. D:  $2Q + P - 10 = 0$  dan S:  $P^2 - 8Q - 4 = 0$
2. D:  $Q^2 + 5Q - P + 1 = 0$  dan S:  $2Q^2 + P - 9 = 0$
3. D:  $P^2 + P + Q - 20 = 0$  dan S:  $2P^2 - Q - 3P - 4 = 0$

#### KURVA TRANSFORMASI PRODUK (PRODUCT TRANSFORMATION CURVE)

- Kurva transformasi produk menunjukkan bagaimana suatu perusahaan berdasarkan proses produksinya menetapkan kombinasi jumlah setiap jenis barang yang dihasilkannya, sesuai dengan sumber daya (kapital, tenaga kerja, bahan baku, energi, manajemen, teknologi, dan sebagainya) yang dimilikinya.
- Jika suatu perusahaan memproduksi dua jenis barang, misalnya  $x$  dan  $y$ , dengan menggunakan bahan baku dan tenaga kerja tertentu, maka hubungan kuantitas atau kombinasi kuantitas kedua jenis barang tersebut akan membentuk kurva transformasi produk atau disebut juga sebagai kurva kemungkinan produksi (*production possibility curve*).
- Hubungan  $x$  dan  $y$  atau kombinasi  $x$  dan  $y$  yang diproduksi digambarkan sebagai curve cembung (*concave curve*), yaitu curve yang terbuka ke bawah mengarah ke titik origin (titik 0).



- Berdasarkan kurva tersebut tampak bahwa jika jumlah produksi x ditambah, maka jumlah produksi y akan berkurang, demikian sebaliknya.

- Contoh soal:

Suatu perusahaan melamine memproduksi dua jenis barang yaitu piring (P) dan gelas (G), jika diketahui kurva transformasi produk untuk perusahaan tersebut:  $P^2 + 3P + 5G = 130$ .

Tentukanlah:

1. Jumlah maksimum piring yang dapat diproduksi
2. Jumlah maksimum gelas yang dapat diproduksi
3. Jumlah maksimum piring yang diproduksi, jika diproduksi 18 gelas
4. Jumlah maksimum gelas yang diproduksi, jika diproduksi 7 piring
5. Gambarkan kurva transformasi produk tersebut

- Jawab :

1. Perusahaan tersebut akan memproduksi piring dalam jumlah maksimum bila  $G = 0$  (gelas tidak diproduksi, sehingga  $P^2 + 3P + 5(0) = 130 \rightarrow P^2 + 3P - 130 = 0$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-130)}}{2(1)}$$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2} \rightarrow P_{1,2} = \frac{-3 \pm 23}{2} \rightarrow P_1 = 10 \text{ dan } P_2 = -13$$

Jadi jumlah maksimum piring yang diproduksi sebanyak 10 unit

2. Produksi gelas maksimum akan tercapai bila  $P = 0$  (piring tidak diproduksi), sehingga:

$$P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow 0 + 0 + 5G = 130 \rightarrow G = 26$$

Jadi jumlah maksimum gelas yang diproduksi sebanyak 26 unit

3. Bila diproduksi gelas  $G = 18$ , maka:

$$P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow P^2 + 3P + 5(18) = 130 \rightarrow P^2 + 3P - 40 = 0$$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-40)}}{2(1)}$$

$$P_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} \rightarrow P_{1,2} = \frac{-3 \pm 13}{2} \rightarrow P_1 = 5 \text{ dan } P_2 = -8$$

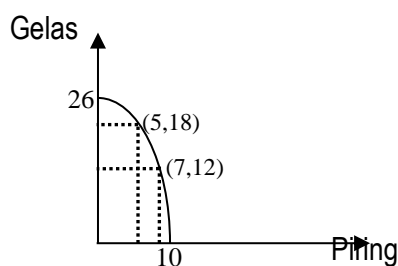
Jadi jumlah maksimum piring yang diproduksi bila  $G = 18$  adalah 5 unit

4. Bila diproduksi  $P = 7$ , maka:

$$P^2 + 3P + 5G = 130 \rightarrow 7^2 + 3(7) + 5G = 130 \rightarrow 5G = 60 \rightarrow G = 12$$

Jadi jumlah maksimum gelas yang diproduksi bila  $P = 7$  adalah 12 unit

5. Gambar kurvanya:



## APLIKASI FUNGSI KUADRAT

- Diketahui fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah:

$$D: 2Q + P - 10 = 0$$

$$S: P^2 - 8Q - 4 = 0$$

Jika pemerintah membebankan pajak proporsional  $t = 20\%$ , maka tentukan:

1. Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak.
2. Besarnya pajak per unit dan total pajak yang ditanggung masing-masing oleh konsumen maupun produsen.
3. Gambarkan kurvanya.

**Jawab:**

1. Keseimbangan pasar sebelum pajak

$$2Q + P - 10 = 0 \rightarrow Q = -\frac{1}{2}P + 5$$

$$P^2 - 8Q - 4 = 0 \rightarrow Q = \frac{1}{8}P^2 - \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}P + 5 = \frac{1}{8}P^2 - \frac{1}{2} \rightarrow -4P + 40 = P^2 - 4 \rightarrow -P^2 - 4P + 44 = 0$$

$$\text{Dengan rumus abc diperoleh: } P_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-1)(44)}}{2(-1)} \rightarrow P_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{192}}{2(-1)}$$

$$P_1 = \frac{4 + \sqrt{192}}{2(-1)} = -8.92820323 \approx P_1 = -8.93$$

$$P_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{192}}{2(-1)} = 4.92820323 \approx P_2 = 4.93 \rightarrow P = 4.93$$

Untuk mendapatkan Q, substitusikan  $P = 4.92820323$  ke  $Q = -\frac{1}{2}P + 5$  sehingga diperoleh:

$$Q = -\frac{1}{2}(4.92820323) + 5 = 2.535898385 \approx Q = 2.54$$

Jadi keseimbangan sebelum pajak tercapai pada  $P = 4.93$  dan  $Q = 2.54$  atau titik keseimbangan pasar sebelum pajak adalah:  $E(2.54; 4.93)$ .

### Keseimbangan sesudah pajak

Adanya pajak akan mengubah fungsi penawaran menjadi:

$$P^2 - 8Q - 4 = 0 \rightarrow P = \sqrt{8Q + 4} \rightarrow P = 1.2\sqrt{8Q + 4}$$

$$P^2 = 1.44(8Q + 4) \rightarrow P^2 - 11.52Q - 5.76 = 0$$

$$\text{Fungsi permintaan } 2Q + P - 10 = 0 \rightarrow P = -2Q + 10$$

Keseimbangan pasar sesudah pajak diperoleh dengan mensubstitusi persamaan  $P = -2Q + 10$  ke dalam persamaan  $P^2 - 11.52Q - 5.76 = 0$  sehingga diperoleh:

$$(-2Q + 10)^2 - 11.52Q - 5.76 = 0 \rightarrow 4Q^2 - 40Q + 100 - 11.52Q - 5.76 = 0$$

$$4Q^2 - 51.52Q + 94.24 = 0 \rightarrow Q^2 - 12.88Q + 23.56 = 0$$

$$\text{dengan rumus abc diperoleh: } Q_{1,2} = \frac{12.88 \pm \sqrt{(-12.88)^2 - 4(1)(23.56)}}{2(1)}$$



$$Q_{1,2} = \frac{12.88 \pm \sqrt{71.6544}}{2} \rightarrow Q_1 = \frac{12.88 + \sqrt{71.6544}}{2} = 10.6724461$$

Kemudian substitusikan  $Q = 10.6724461$  ke persamaan  $P = -2Q + 10$

$$P = -2(10.6724461) + 10 \rightarrow P = -11.3448922$$

Karena  $P$  bernilai negatif, maka  $Q = 10.6724461$  tidak diambil, selanjutnya dihitung

$$Q_2 = \frac{12.88 - \sqrt{71.6544}}{2} = 2.207553899 \rightarrow Q = 2.207553899$$

Kemudian substitusikan  $Q = 2.207553899$  ke persamaan  $P = -2Q + 10$

$$P = -2(2.207553899) + 10 \rightarrow P = 5.584892202$$

Jadi keseimbangan pasar sesudah pajak tercapai pada saat  $P = 5.58$  dan  $Q = 2.21$  atau titik keseimbangan pasar sesudah pajak  $E'(2.21; 5.58)$

2. Lihat gambar kurvanya,  $Q = 2.207553899$  substitusikan ke dalam persamaan fungsi penawaran  $P^2 - 8Q - 4 = 0$ , sehingga diperoleh:

$$P^2 - 8(2.207553899) - 4 = 0 \rightarrow P = \pm \sqrt{21.66043119} = 4.654076836 \approx P = 4.65$$

$$\text{Pajak per unit: } t = \frac{0.2}{1.2} (5.584892202) = 0.930815367 \approx t = 0.93$$

Pajak per unit yang ditanggung konsumen tercermin dari adanya kenaikan harga sebesar:  $t_k = 5.584892202 - 4.92820323 = 0.656688972 \approx t_k = 0.66$ .

Pajak per unit yang ditanggung produsen tercermin dari perbedaan:

$$t_p = 4.92820323 - 4.654076836 = 0.274126394 \approx t_p = 0.27$$

$$\text{atau } t_p = 0.93 - 0.66 = 0.27$$

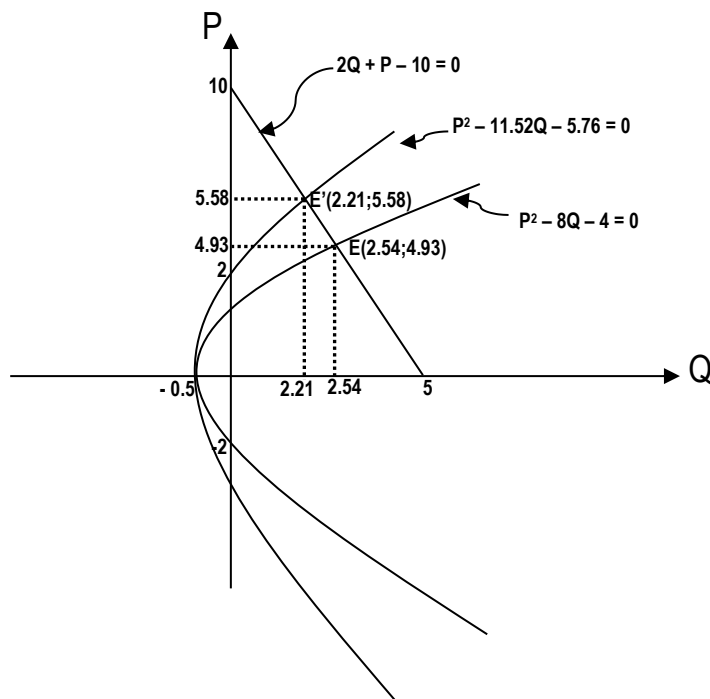
Total pajak yang ditanggung konsumen:  $T_k = 0.656688972(2.207553899)$

$$T_k = 1.449676301 \approx T_k = 1.45$$

Total pajak yang ditanggung produsen:  $T_p = 0.274126394(2.207553899)$

$$T_p = 0.605148789 \approx T_p = 0.61$$

3. Gambar kurvanya:



Kurva fungsi permintaan:

$2Q + P - 10 = 0 \rightarrow$  perpotongan dengan sb-P misalkan  $Q = 0 \rightarrow P = 10$  dan perpotongan dengan sb-Q misalkan  $P = 0 \rightarrow Q = 5$

Kurva fungsi penawaran sebelum pajak:

$P^2 - 8Q - 4 = 0 \rightarrow$  perpotongan dengan sb-P misalkan  $Q = 0 \rightarrow P^2 = 4 \rightarrow P = \pm 2$  dan perpotongan dengan sb-Q misalkan  $P = 0 \rightarrow Q = -\frac{1}{2}$

Kurva fungsi penawaran sesudah pajak:

$P^2 - 11.52Q - 5.76 = 0 \rightarrow$  perpotongan dengan sb-P misalkan  $Q = 0$   
 $P^2 = 5.76 \rightarrow P = \pm 2.4$  dan perpotongan dengan sb-Q misalkan  $P = 0 \rightarrow Q = -\frac{1}{2}$

**SOAL-SOAL YANG HARUS DIKERJAKAN DAN JAWABAN HARUS  
DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN**

**1. Carilah titik potong dan gambarkan grafik kedua fungsi berikut;**

- a.  $Y = -2X^2 + 8X + 6$  dan  $Y = 2X^2 + 10X$
- b.  $X = 2X^2 + 8Y + 69$  dan  $X = 80Y - Y^2$
- c.  $X = -Y^2 + 6X - 5$  dan  $X = Y^2 - 2Y - 15$

**2. Gambarkan grafik kurva berikut:**

- a.  $(X+2)(Y+3) = 12$
- b.  $(X-4)(Y-5) = 60$
- c.  $y = \frac{6}{x+1}$
- d.  $Y = 5 + \frac{30}{x}$

