DETERMINAN MATRIKS

Definisi Determinan Matriks

Determinan matriks adalah bilangan tunggal yang diperoleh dari semua permutasi n^2 elemen matriks bujur sangkar.Jika subskrip permutasi elemen matriks adalah genap (inversi genap) diberi tanda positif (+) sebaliknya jika subskrip permutasi elemen matriks adalah ganjil (inversi ganjil) diberi tanda negative (-).Inversi terjadi jika bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil dalam urutan subskrip permutasi elemen matriks.

Determinan matriks hanya didefinisikan pada matriks bujursangkar (matriks kuadrat).

Notasi determinan matriks A:

$\det(A) = |A| \text{atau} \det A = |A|$

Jika diketahui matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Makadeterminandarimatriks A:

$$\det A = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Atau

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujursangkar yaitu:

1. Metode Sarrus
2. Metode Minor dan Kofaktor

1. Metode Sarrus

Perhitungan determinan matriks dengan metode Sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks ukuran 2 x 2 dan 3 x 3.Determinan matriks yang ukurannya lebih besar dari 3 x 3 tidak bisa dihitung menggunakan metode Sarrus.

Metode Sarrus (disebut juga metode *Spaghetti*) menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (*dari kiri atas kekanan bawah*) diberitanda *positif* (+) sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (*dari kiri bawah kekanan atas*) diberitanda *negative* (-).

a. Determinan matriks ukuran 2 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Atau jika diketahui matriks:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Contoh:

1. Tentukan determinan dari matriks: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   Solusi:

   $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-3) = 8 - (-3) = 11$

2. Tentukan determinan dari matriks : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

   Solusi:

   $\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -1 \times (-4) - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$

b. Determinan matriks ukuran 3 x 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} \end{matrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$$

Atau jika diketahui matriks:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = \mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{cdh} - \mathrm{gec} - \mathrm{hfa} - \mathrm{idb}$$

Contoh :

1. Tentukan determinan dari matriks: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   Solusi:

$$\det A = \left| \begin{matrix} 1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}\det A &= 1\times 0\times 2+5\times 2\times 3+(-3)\times 1\times(-1)\\ &\quad -3\times 0\times(-3)-(-1)\times 2\times 1-2\times 1\times 5\\ &= 0+30+3-0-(-2)-10=25\end{aligned}$$

2. Metode Minor-Kofaktor

Perhitungan determinan matriks dengan metode Minor dan Kofaktor dapat diterapkan pada semua ukuran matriks bujur sangkar. Determinan matriks dapat dihitung dari minor dan kofaktor pada salah satu baris atau kolom matriks.

2.1. Penentuan Determinan Berbasis *Baris* Matriks

Menghitung determinan suatu matriks menggunakan salah satu baris matriks.

Jika diketahui suatu matriks A berukuran $n\chi n$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks A:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,.\,(-1)^{k+j}M_{kj}$$

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,.\,K_{kj},\qquad j=indek\ kolom$$

Atau

$$\boxed{\begin{aligned}&\det(A)=a_{k1}K_{k1}+a_{k2}K_{k2}+a_{k2}K_{k2}+\cdots+a_{kj}K_{kj}\\ &k=\text{salah satu baris matriks}\end{aligned}}$$

Contoh:

1. Tentukan determinan matriks berikut menggunakan minor dan kofaktor pada baris ke-1.

   $$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

   Solusi:

$$\det A = (1).(-1)^{1+1}M_{11} + (5).(-1)^{1+2}M_{12} + (0).(-1)^{1+3}M_{13}$$
$$\det A = (1).(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (5).(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (0).(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (1)(1)(0-2) + (5)(-1)(0-0) + (0)(1)(-4-0)$$
$$= -2 + 0 + 0 = -2$$

2.2.Penentuan Determinan Berbasis *Kolom* Matriks

Menghitung determinan suatu matriks menggunakan salah satu kolom matriks.

Jika diketahui matriks A berukuran $n\chi n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks A:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il}\,.\,(-1)^{i+l}M_{il}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il}\,.\,K_{il}, \qquad i = indek\ baris$$

Atau

$$\det(A) = a_{1l}K_{1l} + a_{2l}K_{2l} + a_{3l}K_{3l} + \cdots + a_{il}K_{il}$$

$l = \text{salah satu kolom matriks}$

Pemilihan kolom (atau baris) matriks untuk menghitung determinan suatu matriks usahakan pilih kolom atau baris yang elemennya banyak bernilai 0 atau 1 supaya mudah dalam penghitungannya.

Contoh:

1. Tentukan determinan matriks berikut, $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

Solusi:

$$\det A = 1\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= 1\left(6\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix}\right) - 2\left(5\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}\right)$$

$$+3\left(5\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 13 & 16 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}\right) - 4\left(5\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1\big(6(11.16 - 15.12) - 7(10.16 - 14.12) + 8(10.15 - 14.11)\big)$$
$$-2\big(5(11.16 - 15.12) - 7(9.16 - 13.12) + 8(9.15 - 13.11)\big)$$
$$+3\big(5(10.16 - 14.12) - 6(9.16 - 13.12) + 8(9.14 - 13.10)\big)$$
$$-4\big(5(10.16 - 14.11) - 6(9.15 - 13.11) + 8(9.14 - 13.10)\big)$$
$$= 1\big(6(-4) - 7(-8) + 8(-4)\big) - 2\big(5(-4) - 7(-12) + 8(-8)\big)$$
$$+3\big(5(-8) - 6(-12) + 8(-4)\big) - 4\big(5(-4) - 6(-8) + 7(-4)\big)$$
$$= 1(0) - 2(0) + 3(0) - 4(0) = 0$$

3. Mencari Invers Matriks dengan minor-kofaktor

Cara Mencari Invers Matriks ordo 3x3 ~ Pada kesempatan ini saya ingin mencoba mengreview kembali bagaimana cara mencari nilai dari matriks yang mempunyai ordo 3x3 . Untuk Mendapatkan matriks unsur invers 3x3 kita perlu memahami matriks - matriks berikut :

1. **Matriks Kofaktor**
2. **Adjoin**
3. **Nilai elemen**
4. **rumus invers Matriks ordo 3 x 3**

Keterangan :

- **Matriks Kofaktor** adalah matriks yang unsurnya diganti dengan nilai determinan yang unsurnya tidak sebaris dan tidak sekolom dengan unsur asal. Untuk tandanya digunakan tanda positif negatif saling bergantian.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Adjoin adalah ***matriks kofaktor*** yang di Transposkan (baris jadi kolom , kolom jadi baris)

Contoh;

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Carilah Invers matriks dari A diatas !!

Langkah pertama maka kita harus mencari kofaktor dari A , dengan cara sbb:

$$\text{Kof } A = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&1\\6&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&1\\6&2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&0\\6&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&1\\6&2\end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\text{Kof } A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Langkah kedua, Setelah hasil dari Kofaktor A ditemukan , maka kita mencari ADJOIN nya =

$$\text{Matriks Kof } A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Jadi,
$$\text{matriks Adjoin } A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

* baris jadi Kolom , kolom jadi baris

Langkah ketiga , Mencari nilai determinan A :

$$\text{Det } A = \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{matrix}\Bigg|$$

$$= 3.1.2 + 1.1.6 + 0.2.2 - 6.1.0 - 2.1.3 - 2.2.1$$

$$= 2$$

* biru ditambah , merah di kurangi

Langkah terakhir adalah mencari invers matriks A dengan rumus :

Invers Matriks nxn = 1 / nilai determinan . Matriks Adjoinnya

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

jadi matriks invers A adalah =

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 3 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$

SILAKAN KERJAKAN SOSL-SOAL BERIKUT, KEMUDIAN JAWABAN DIKIRIMKAN SEBELUM BATAS WAKTU YANG SUDAH DITENTUKAN.

1. Tentukan determinan dan Invers matriks berikut.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Tentukan determinan dan invers matriks berikut menggunakan metode Minor dan Kofaktor.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$