Tentang Penulis

Ir. Renilaili, M.T.

Ir. Renilaili, M.T., lahir di Baturaja pada tanggal 20 Maret 1961. Ayah bernama Selamin (Almarhum) adalah Pensiunan Mayor Polisi yang bertugas di Baturaja Sumatera Selatan dan berasal dari Muaradua Kisam Ogan Komering Ulu, sedangkan ibu bernama Saipah (Almarhum) adalah seorang ibu rumah tangga biasa yang berasal dari Mentok Bangka.

Merupakan anak ke-4, dari 4 bersaudara yang semasa kecil tinggal dan bersekolah di Baturaja, TK Bhayangkari (hanya 1 tahun), kemudian melanjutkan di SD Negeri 14 Baturaja dan lulus tahun 1973, setelah itu melanjutkan di SMP Negeri I Baturaja dan lulus tahun 1976. Selanjutnya, bersekolah di SMA Negeri I Baturaja dan lulus tahun 1980.

Pada pertengahan tahun 1980, mengikuti test SNMPTN dan lulus di Unsri mengambil Jurusan Teknik Kimia. Menyelesaikan S-1 Teknik Kimia tahun 1986, kemudian mencoba mengabdikan diri menjadi dosen honorer di Sekolah Tinggi Teknologi Industri 282 Kalkulus (APRIN) Palembang mulai tahun 1988. Pada tahun 1990, menjadi PNS di Kopertis Wilayah II sebagai tenaga Edukatif dan tetap mengabdikan diri sebagai dosen di STTI-APRIN. Karier jabatan fungsional dosen dimulai dari Asisten Ahli Madya pada tahun 1991, kemudian menjadi Asisten Ahli pada tahun 1993, dan dilanjutkan Lektor Muda pada tahun 1995. Pernah menjadi ketua jurusan Teknik Industri di STTI-APRIN dari tahun 1993-1996.

Pada awal September tahun 1996, dipindahkan di STMIK Bina Darma Palembang untuk mengajar mata kuliah Kalkulus dan Aljabar Linear serta mata kuliah Kimia Dasar. Pada tahun 1999 mendapat jabatan Lektor Madya. Pada tahun 2002 mengambil S-2 di Unsri dengan Program Studi Teknik Kimia dan Konsentrasi Teknologi Energi yang lulus pada Februari 2006. Selain mengajar mata kuliah tersebut, juga mengajar mata kuliah Statistik serta mata kuliah Industri Kimia. Pada 1 September 2006 mendapat jabatan Fungsional Lektor Kepala (IV/b) dan tetap bertugas sebagai dosen di Universitas Bina Darma Palembang sampai dengan sekarang.

awfamedia

PT. Awfa Smart Media
Jl. Letkol Iskandar No. 316
Palembang Sumatera Selatan
Kode Pos 30124 Telp. 0711 363699
http://awfamedia.com | awfagrafika@gmail.com

ISBN 978-623-94550-9-5
9 786239 455095

Ir. Renilaili, M.T.

Kalkulus UNTUK TEKNIK INDUSTRI

awfamedia

awfamedia

Kalkulus
UNTUK TEKNIK INDUSTRI

Ir. Renilaili, M.T.

KALKULUS
Untuk Teknik Industri

Penulis
Ir. Renilaili, M.T.

ISBN : 978-623-94550-9-5

Editor :
Giovanny

Desain Cover :
Sarwanto

Setting pra cetak :
Tim Produksi Awfa

Cetakan perdana, Februari 2021

Penerbit
PT Awfa Smart Media
Jl Letkol Iskandar No 316 Palembang
Sumatera Selatan Kode Pos 30124
Telp 0711 363699

http://awfamedia.com | awfagrafika@gmail.com

KALKULUS

Ir. Renilaili, M.T.

Diterbitkan atas Kerja Sama:

PENERBIT ANDI®

Universitas Bina Darma

KALKULUS

Oleh: Ir. Renilaili, M.T.

Editor : Giovanny
Setting : Yulius Basuki
Desain Cover : Dany Novianto
Korektor : Dian Arum

Diterbitkan oleh Penerbit ANDI (Anggota IKAPI)
Jl. Beo 38-40, telp (0274) 561881, Fax (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Percetakan CV. ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, telp (0274) 561881, Fax (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Renilaili

KALKULUS / Renilaili
– Ed. I. – Yogyakarta: ANDI;

27 – 26 – 25 – 24 – 23 – 22 – 21 – 20 – 19 –18
xii + 282 hlm; 16 x 23 cm.
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
ISBN: 978 - 979 - 29 - xxxx - x

I. Judul
1. Calculus

DDC’23 : 515

KATA PENGANTAR

Buku ini ditujukan untuk mempelajari mata kuliah kalkulus, terutama untuk mahasiswa Teknik dan mahasiswa yang setara pada umumnya. Tujuan pembuatan buku ini adalah agar mahasiswa dapat memperoleh keterampilan matematika yang mantap, memiliki pengetahuan, serta pemahaman terhadap konsep–konsep dasar yang terlibat di dalamnya. Di samping itu, buku ini dapat digunakan untuk belajar sendiri baik di kampus maupun di rumah karena di dalam buku ini banyak contoh-contoh soal beserta penyelesaiannya serta berisi soal-soal sebagai latihan.

Akhir kata, penulis mengucapkan selamat belajar. Penulis juga mengharapkan saran beserta kritik demi lebih sempurnanya buku ini.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
SISTEM BILANGAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan agar mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang sistem bilangan; pengertian dari basis 2, basis 3, basis 4, dan seterusnya; cara menentukan basis 2, basis 3, basis 4, dan seterusnya; dan cara mengubah basis, misalnya dari basis 10 ke basis 2, ke basis 3, dan seterusnya.

1.1 PENGERTIAN SISTEM BILANGAN

Sistem Bilangan adalah suatu cara untuk mewakili besaran dari suatu objek fisik yang di dalam sistem bilangan menggunakan suatu bilangan dasar atau basis tertentu. “Himpunan bilangan real yang disertai dengan operasi seperti penjumlahan, pengurangan, dan perkalian harus memenuhi aksioma tertentu yang pada umumnya diperlukan 3 aksioma yang mana lebih dikenal dengan aksioma lapangan, aksioma urutan, dan aksioma kelengkapan” (Martono, 1999:2).

Dalam Aksioma lapangan, diatur tentang ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian; sifat komutatif, asosiatif, dan distributif; terdapatnya 0 dan 1; serta terdapatnya unsur inversi terhadap penjumlahan dan perkalian. Dari operasi dasar ini, operasi pengurangan dan pembagian dari aksioma dapat dibuktikan oleh berbagai sifat yang mendasari operasi aljabar atas berbagai objek kalkulus, yaitu peubah, konstanta, dan parameter.

Dalam aksioma urutan, diatur tentang kemunculan bilangan positif dan negatif. Berdasarkan cara ini, setiap bilangan real dapat diurutkan dari kecil sampai besar. Dari aksioma ini, diturunkan berbagai sifat yang mendasari penyelesaian suatu pertidaksamaan. Selanjutnya, dirancang konsep nilai mutlak sebagai ukuran jarak dua bilangan real dan suatu alat untuk menyelesaikan pertidaksamaan yang berkaitan dengan limit.

Dalam aksioma kelengkapan, diatur tentang perbedaan antara bilangan rasional dan bilangan real. Kita mengenal adanya korespondensi satu-satu di antara bilangan real dan titik pada garis, tetapi sifat ini tidak dipenuhi bilangan rasional. "Setiap bilangan real dapat digambarkan sebagai titik pada garis dan setiap titik pada garis dapat dinyatakan sebagai bilangan real. Di antara setiap dua bilangan real, terdapat tak hingga banyaknya bilangan rasional dan irasional, kemudian diperkenalkan konsep selang hingga dan selang tak hingga yang akan berperan dalam kalkulus" (Martono, 1999:2).

1.2 KOMPONEN BILANGAN

a. Bilangan Asli : 1, 2, 3, 4, 5, ..., dan -1, -2, -3, ...

b. Bilangan Prima : 2, 3, 5, 7, 11, 13,17,19, ...

c. Bilangan Komposit : 4, 6, 8, 9, 10, ..., bilangan asli yang mempunyai lebih dari 2 faktor.

d. Bilangan Cacah : 0, 1, 2, 3, ... dimulai dari 0.

e. Bilangan Bulat : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

f. Bilangan Genap : -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...

g. Bilangan Ganjil : -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, ...

h. Bilangan Pecahan : 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...

i. Bilangan Rasional : 1/2 = 0,50000 = 0,4999999
7/11 = 0,63636363 (desimal berulang)

j. Bilangan Irasional : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt[4]{16}$

k. Bilangan Imajiner adalah suatu bilangan yang jika kita kalikan dengan bilangan itu sendiri akan menghasilkan bilangan negatif. Bilangan Imajiner dinyatakan dengan huruf i .

Contoh : $i = \sqrt{-1}$ menjadi $i^2 = -1$

$i = \sqrt{-5}$ menjadi $i^2 = -5$

l. Bilangan Kompleks adalah kombinasi bilangan Imajiner dan bilangan real.

Contoh : $4 + 3i$

$-4\sqrt{2} + 2i$

$7 + 3i$

1.3 BILANGAN DASAR SEPULUH (BASIS SEPULUH)

Bilangan Dasar atau yang dikenal dengan istilah basis dapat berupa basis 2 (dikenal dengan istilah bilangan biner), basis 3, basis 4, basis 5, basis 6, basis 7, basis 8, basis 9, dan basis 10. Akan tetapi, untuk basis 10 biasanya tidak ditulis indeksnya.

Menurut Stroud (2003: 49), sistem ini merupakan sistem dasar yang mana pada sistem ini kuantitas yang besar atau kecil dapat disajikan dengan menggunakan simbol-simbol 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 bersama dengan nilai tempat sesuai dengan aslinya. Basis 10 sering disebut dengan sistem denari atau desimal, di sini akan dikelompokkan bilangan tersebut berdasarkan 10 dan pangkatnya dimulai dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dan seterusnya.

Untuk menyelesaikan soal basis 10, perlu diperhatikan dengan jelas soal tersebut karena biasanya untuk basis 10 tidak ditulis indeksnya, seperti contoh berikut ini yang merupakan penyelesaian soal pertama (Stroud, 2003:49).

$2765,321 = 2.10^3 + 7.10^2 + 6.10^1 + 5.10^0 + 3.10^{-1} + 2.10^{-2} + 1.10^{-3}$

Contoh lainnya adalah sebagai berikut:

$8339 = 8.10^3 + 3.10^2 + 3.10^1 + 9.10^0$

$= 8000 + 300 + 30 + 9$

$= 8339$

$4614 = 4.10^3 + 6.10^2 + 1.10^1 + 4.10^0$

$= 4000 + 600 + 10 + 4$

$= 4614$

$7963{,}216 = 7.10^3 + 9.10^2 + 6.10^1 + 3.10^0 + 2.10^{-1} + 1.10^{-2} + 6.10^{-3}$

1.4 BILANGAN DASAR BUKAN SEPULUH (BASIS NONSEPULUH)

Basis nonsepuluh adalah bilangan dasar yang kurang dari 10 atau lebih dari 10, seperti basis 2, basis 3, basis 4, basis 5, basis 11, basis 12, dan seterusnya.

1.4.1 PENGERTIAN BILANGAN DASAR 2

Basis 2 disebut bilangan biner yang mana bilangan biner adalah bilangan yang terdiri dari angka 1 dan angka 0. Pada basis 2 ini, bilangan yang ada dikelompokkan berdasarkan kelompok angka 2 dengan bilangan pangkat dimulai dari 0, 1, 2, 3, 4, dan seterusnya. Berikut ini adalah contoh basis 2:

$5472_2 = 5.2^3 + 4.2^2 + 7.2^1 + 2.2^0$

$= 40 + 16 + 14 + 2$

$= 72$

$17260_2 \quad = 1.2^4 + 7.2^3 + 2.2^2 + 6.2^1 + 0.2^0$

$= 16 + 56 + 8 + 12$

$= 98$

$245{,}673_2 \quad = 2.2^2 + 4.2^1 + 5.2^0 + 6.2^{-1} + 7.2^{-2} + 3.2^{-3}$

$= 8 + 8 + 5 + 1{,}2 + 0{,}14 + 0{,}006$

$= 22{,}346$

1.4.2 Pengertian Bilangan Dasar 3

Contoh-contoh bilangan dasar 3 sebagai berikut:

$2507_3 \quad = 2.3^3 + 5.3^2 + 0.3^1 + 7.3^0$

$= 54 + 45 + 0 + 7$

$= 106$

$7114_3 \quad = 7.3^3 + 1.3^2 + 1.3^1 + 4.3^0$

$= 189 + 9 + 3 + 4$

$= 205$

$689{,}43 = 6.3^2 + 8.3^1 + 9.3^0 + 4.3^{-1} + 3.3\text{-}^2$

$= 54 + 24 + 9 + 1{,}332 + 0{,}333$

$= 88{,}665$

1.4.3 Pengertian Bilangan Dasar 4

Contoh-contoh basis 4 sebagai berikut:

$231214_4 \quad = 2.4^5 + 3.4^4 + 1.4^3 + 2.4^2 + 1.4^1 + 4.4^o$

$= 2048 + 768 + 64 + 32 + 4 + 4$

$= 2920$

$250796_4 \quad = 2.4^5 + 5.4^4 + 0.4^3 + 7.4^2 + 9.4^1 + 6.4^0$

$= 2048 + 1280 + 0 + 112 + 36 + 6$

$= 3482$

$974{,}237_4$ $= 9.4^2 + 7.4^1 + 4.4^0 + 2.4^{-1} + 3.4^{-2} + 7.4^{-3}$

$= 144 + 28 + 4 + 0{,}5 + 0{,}1875 + 0{,}109375$

$= 176{,}796875$

1.4.4 Pengertian Basis 5

Contohnya, antara lain:

281114_5 $= 2.5^5 + 8.5^4 + 1.5^3 + 1.5^2 + 1.5^1 + 4.5^0$

$= 6250 + 5000 + 125 + 25 + 5 + 4$

$= 11409$

240613_5 $= 2.5^5 + 4.5^4 + 0.5^3 + 6.5^2 + 1.5^1 + 3.5^0$

$= 6250 + 2500 + 0 + 150 + 5 + 3$

$= 8908$

1258,751 $= 1.5^3 + 2.5^2 + 5.5^1 + 8.5^0 + 7.5^{-1} + 5.5^{-2} + 1.5^{-3}$

$= 125 + 50 + 25 + 8 + 1{,}4 + 0{,}2 + 0{,}008$

$= 209{,}608$

1.4.5 Pengertian Basis 6

Contohnya:

260913_6 $= 2.6^5 + 6.6^4 + 0.6^3 + 9.6^2 + 1.6^1 + 3.6^0$

$= 15552 + 7776 + 0 + 324 + 6 + 3$

$= 23661$

101013_6 $= 1.6^5 + 0.6^4 + 1.6^3 + 0.6^2 + 1.6^1 + 3.6^0$

$= 7776 + 0 + 216 + 0 + 6 + 3$

$= 80.6001$

$8675{,}901 \quad = 8.6^3 + 6.6^2 + 7.6^1 + 5.6^0 + 9.6^{-1} + 0.6^{-2} + 1.6^{-3}$

$= 1728 + 216 + 42 + 5 + 0{,}50003 + 0 + 0{,}004659466$

$= 1992{,}50466$

1.4.6 Pengertian Basis 7

Basis tujuh adalah bilangan yang terdiri dari 7 simbol, yaitu 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Contohnya sebagai berikut:

$141299_7 \quad = 1.7^5 + 4.7^4 + 1.7^3 + 2.7^2 + 9.7^1 + 9.7^0$

$= 16807 + 9604 + 343 + 98 + 63 + 9$

$= 26924$

$151295_7 \quad = 1.7^5 + 5.7^4 + 1.7^3 + 2.7^2 + 9.7^1 + 5.7^0$

$= 16807 + 120005 + 343 + 98 + 63 + 5$

$= 29321$

$673{,}890_7 \quad = 6.7^2 + 7.7^1 + 3.7^0 + 8.7^{-1} + 9.7^{-2} + 0.7^{-3}$

$= 294 + 49 + 3 + 0{,}142857 + 0{,}183673467$

$= 346{,}3265305$

1.4.7 Pengertian Basis 8 (oktal)

Contohnya sebagai berikut:

$141299_8 \quad = 1.8^5 + 4.8^4 + 1.8^3 + 2.8^2 + 9.8^1 + 9.8^0$

$= 32768 + 16384 + 512 + 128 + 72 + 9$

$= 49873$

$151295_8 \quad = 1.8^5 + 5.8^4 + 1.8^3 + 2.8^2 + 9.8^1 + 5.8^0$

$= 32768 + 20480 + 512 + 128 + 72 + 5$

$= 53965$

$5647,0621_8 = 5.8^3 + 6.8^2 + 4.8^1 + 7.8^0 + 0.8^{-1} + 6.8^{-2}$
$+2.8^{-3} + 1.8^{-4}$
$= 2560 + 384 + 32 + 7 + 0 + 6(0,015625) +$
$2(0,001953125) + 1(0,000244140625)$
$= 2983,0979$

1.4.8 Pengertian Basis 9

Contohnya sebagai berikut:

$180798_9 = 1.9^5 + 8.9^4 + 0.9^3 + 7.9^2 + 9.9^1 + 8.9^0$
$= 59049 + 52488 + 0 + 567 + 81 + 8$
$= 112193$

$060896_9 = 0.9^5 + 6.9^4 + 0.9^3 + 8.9^2 + 9.9^1 + 6.9^0$
$= 0 + 39366 + 0 + 648 + 81 + 6$
$= 40101$

$568,963_9 = 5.9^2 + 6.9^1 + 8.9^0 + 9.9^{-1} + 6.9^{-2} + 3.9^{-3}$
$= 405 + 54 + 8 + 0,99999999 +$
$0,074074074 + 0,004115226$
$= 468,0781893$

1.5 MENGUBAH BASIS

Untuk mengubah bilangan desimal atau basis 10 menjadi basis lainnya digunakan operasi pembagian basis sambil memperhatikan sisanya, kemudian dari sisanya ditentukan bilangan mulai dari bawah ke atas.

1.5.1 Bilangan Desimal ke Basis 2 (Bilangan Dasar 2)

Mengubah dari basis 10 ke basis 2 atau mengubah bilangan desimal menjadi basis 2, yaitu dengan mengelompokkan bilangan-bilangan tersebut dengan 2 dan dimulai dari pangkat 0, pangkat 1, pangkat 2, dan seterusnya, serta menentukan sisa bilangan tersebut. Selanjutnya, dibuktikan dengan cara mengulangi bilangan hasilnya maka akan didapatkan kembali bilangan asalnya. Di bawah ini diberikan cara-cara yang bisa digunakan untuk mengubah dari bilangan dasar 10 (atau basis 10) menjadi bilangan dengan basis 2 (atau disebut dengan bilangan biner), contohnya sebagai berikut:

$$484 = \ldots\ldots_2$$

2	484	sisa 0
2	242	sisa 0
2	121	sisa 0
2	60	sisa 0
2	30	sisa 0
2	15	sisa 0
2	7	sisa 1
2	3	sisa 1
2	1	sisa 1
	0	

$$\begin{aligned} 484 &= 111100100_2 \\ &= 1.2^8 + 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 \\ &= 256 + 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 \\ &= 484 \end{aligned}$$

948 = ... 2

2	948	sisa 0
2	474	sisa 0
2	237	sisa 1
2	118	sisa 0
2	59	sisa 1
2	29	sisa 1
2	14	sisa 0
2	7	sisa 1
2	3	sisa 1
2	1	sisa 1
	0	

948 $= 1110110100_2$

$= 1.2^9 + 1.2^8 + 1.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$

$= 512 + 256 + 128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 0$

$= 948$

184 = ... 2

2	184	sisa 0
2	92	sisa 0
2	46	sisa 0
2	23	sisa 1
2	11	sisa 1
2	5	sisa 1
2	2	sisa 0
2	1	sisa 1
	0	

184 $= 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$

$= 128 + 0 + 32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 0$

$= 184$

$852 \quad = \quad ......2$

$$
\begin{array}{r|ll}
2 & 852 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
2 & 412 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
2 & 206 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
2 & 103 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
2 & 51 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
2 & 25 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
2 & 12 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
2 & 6 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
2 & 3 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
2 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
825 &= 1100111001_2 \\
&= 1.2^9 + 1.2^8 + 0.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + \\
&\quad 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 \\
&= 512 + 256 + 0 + 0 + 32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 \\
&= 825
\end{aligned}
$$

1.5.2 Bilangan Desimal ke Basis 3 (Bilangan Dasar 3)

Mengubah dari basis 10 ke basis 3 atau mengubah bilangan desimal menjadi basis 3, yaitu dengan mengelompokkan dan membagi bilangan–bilangan tersebut dengan 3 dan dimulai dari pangkat 0, pangkat 1, pangkat 2, dan seterusnya, serta menentukan sisa bilangan tersebut. Selanjutnya, dibuktikan dengan cara mengulangi bilangan hasilnya maka akan didapatkan kembali bilangan asalnya. Di bawah ini diberikan cara-cara yang bisa digunakan untuk mengubah dari bilangan dasar 10 (atau basis 10) menjadi bilangan dengan basis 3. Berikut ini adalah contohnya:

$$344 = ..._3$$

$$\begin{array}{r|l l}
3 & 344 & \text{sisa } 2 \\ \hline
3 & 114 & \text{sisa } 0 \\ \hline
3 & 38 & \text{sisa } 2 \\ \hline
3 & 12 & \text{sisa } 0 \\ \hline
3 & 4 & \text{sisa } 1 \\ \hline
3 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
344 &= 110202_3 \\
&= 1.3^5 + 1.3^4 + 0.3^3 + 2.3^2 + 0.3^1 + 2.3^0 \\
&= 243 + 81 + 0 + 18 + 0 + 2 \\
&=344
\end{aligned}$$

$$254 = ..._3$$

$$\begin{array}{r|l l}
3 & 254 & \text{sisa } 2 \\ \hline
3 & 84 & \text{sisa } 0 \\ \hline
3 & 28 & \text{sisa } 1 \\ \hline
3 & 9 & \text{sisa } 0 \\ \hline
3 & 3 & \text{sisa } 0 \\ \hline
3 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
254 &= 100102_3 \\
&= 1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 1.3^2 + 0.3^1 + 2.3^0 \\
&= 243 + 0 + 0 + 9 + 0 + 2 \\
&= 254
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l l}
\multicolumn{2}{l}{318 \quad = \quad ......_3} & \\
3 & 318 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
3 & 106 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
3 & 35 & \text{sisa } 2 \\ \cline{2-2}
3 & 11 & \text{sisa } 2 \\ \cline{2-2}
3 & 3 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
3 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
318 &= 102210_3 \\
&= 1.3^5 + 0.3^4 + 2.3^3 + 2.3^2 + 1.3^1 + 0.3^0 \\
&= 243 + 0 + 54 + 18 + 3 + 0 \\
&= 318
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l l}
\multicolumn{2}{l}{926 \quad = \quad ......_3} & \\
3 & 926 & \text{sisa } 2 \\ \cline{2-2}
3 & 308 & \text{sisa } 2 \\ \cline{2-2}
3 & 102 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
3 & 34 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
3 & 11 & \text{sisa } 2 \\ \cline{2-2}
3 & 3 & \text{sisa } 0 \\ \cline{2-2}
 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
926 &= 1021022_3 \\
&= 1.3^6 + 0.3^5 + 2.3^4 + 1.3^3 + 0.3^2 + 2.3^1 + 2.3^0 \\
&= 729 + 0 + 162 + 27 + 0 + 6 + 2
\end{aligned}
$$

$= 926$

1.5.3 Bilangan Desimal ke Basis 4 (Bilangan Dasar 4)

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 4, contohnya sebagai berikut:

$817 = \ldots\ldots_4$

4	817	sisa 1
4	204	sisa 0
4	51	sisa 3
4	12	sisa 0
4	3	sisa 3
	0	

$$
\begin{aligned}
817 &= 30301_4 \\
&= 3.4^4 + 0.4^3 + 3.4^2 + 0.4^1 + 1.4^0 \\
&= 768 + 0 + 48 + 0 + 0 + 1 \\
&= 817
\end{aligned}
$$

$969 = \ldots\ldots_4$

4	969	sisa 1
4	242	sisa 2
4	60	sisa 0
4	15	sisa 3
4	3	sisa 3
	0	

$$
\begin{aligned}
969 &= 33021_4 \\
&= 3.4^4 + 3.4^3 + 0.4^2 + 2.4^1 + 1.4^0 \\
&= 768 + 192 + 0 + 8 + 1 \\
&= 969
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
\multicolumn{2}{l}{538 \qquad =} & \ldots\ldots 4 \\
4 & 538 & \text{sisa } 3 \\ \hline
4 & 145 & \text{sisa } 1 \\ \hline
4 & 36 & \text{sisa } 0 \\ \hline
4 & 9 & \text{sisa } 1 \\ \hline
4 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
583 &= 21013_4 \\
&= 2.4^4 + 1.4^3 + 0.4^2 + 1.4^1 + 3.4^0 \\
&= 512 + 64 + 0 + 4 + 3 \\
&= 583
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
\multicolumn{2}{l}{756 \qquad =} & \ldots\ldots 4 \\
4 & 756 & \text{sisa } 0 \\ \hline
4 & 189 & \text{sisa } 1 \\ \hline
4 & 47 & \text{sisa } 3 \\ \hline
4 & 11 & \text{sisa } 3 \\ \hline
4 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
756 &= 23310_4 \\
&= 2.4^4 + 3.4^3 + 3.4^2 + 1.4^1 + 0.4^0 \\
&= 512 + 192 + 48 + 4 + 0 \\
&= 756
\end{aligned}
$$

1.5.4 Bilangan Desimal ke Basis Bilangan 5

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 5, contohnya sebagai berikut:

222 = ... 5

5	222	sisa 2
5	44	sisa 4
5	8	sisa 3
5	1	sisa 1
	0	

$$
\begin{aligned}
222 &= 1342_5 \\
&= 1.5^3 + 3.5^2 + 4.5^1 + 2.5^0 \\
&= 125 + 75 + 20 + 2 \\
&= 222
\end{aligned}
$$

199 = ... 5

5	199	sisa 4
5	39	sisa 4
5	7	sisa 2
5	1	sisa 1
	0	

$$
\begin{aligned}
199 &= 1244_5 \\
&= 1.5^3 + 2.5^2 + 4.5^1 + 4.5^0 \\
&= 125 + 50 + 20 + 4 \\
&= 199
\end{aligned}
$$

781 = ... 5

5	781	sisa 1
5	156	sisa 1
5	31	sisa 1
5	6	sisa 1
5	1	sisa 1
	0	

$$
\begin{aligned}
781 &= 11111_5 \\
&= 1.5^4 + 1.5^3 + 1.5^2 + 1.5^1 + 1.5^0 \\
&= 625 + 125 + 25 + 5 + 1 \\
&= 781
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|r l}
824 & = & \text{......}\ 5 \\
5 & 824 & \text{sisa } 4 \\ \hline
5 & 164 & \text{sisa } 4 \\ \hline
5 & 32 & \text{sisa } 2 \\ \hline
5 & 6 & \text{sisa } 1 \\ \hline
5 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
824 &= 11244_5 \\
&= 1.5^4 + 1.5^3 + 2.5^2 + 4.5^1 + 4.5^0 \\
&= 625 + 125 + 50 + 20 + 4 \\
&= 824
\end{aligned}
$$

1.5.5 Bilangan Desimal ke Basis Bilangan 6

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 6, yaitu:

$$
\begin{array}{r|l l}
548 & = & \text{......}\ 6 \\
6 & 548 & \text{sisa } 2 \\ \hline
6 & 91 & \text{sisa } 1 \\ \hline
6 & 15 & \text{sisa } 3 \\ \hline
6 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
548 &= 2312_6 \\
&= 2.6^3 + 3.6^2 + 1.6^1 + 2.6^0 \\
&= 432 + 108 + 6 + 2 \\
&= 548
\end{aligned}
$$

$170 = \ldots\ldots_6$

$$
\begin{array}{r|ll}
6 & 170 & \text{sisa } 2 \\ \hline
6 & 28 & \text{sisa } 4 \\ \hline
6 & 4 & \text{sisa } 4 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
170 &= 442_6 \\
&= 4.6^2 + 4.6^1 + 2.6^0 \\
&= 144 + 6 + 2 \\
&= 170
\end{aligned}
$$

$144 = \ldots\ldots_6$

$$
\begin{array}{r|ll}
6 & 144 & \text{sisa } 0 \\ \hline
6 & 24 & \text{sisa } 0 \\ \hline
6 & 4 & \text{sisa } 4 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
144 &= 400_6 \\
&= 4.6^2 + 0.6^1 + 0.6^0 \\
&= 144 + 0 + 0 \\
&= 144
\end{aligned}
$$

$999 = \ldots\ldots_6$

$$
\begin{array}{r|rl}
6 & 999 & \text{sisa } 3 \\ \hline
6 & 166 & \text{sisa } 4 \\ \hline
6 & 27 & \text{sisa } 3 \\ \hline
6 & 4 & \text{sisa } 4 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
999 &= 4343_6 \\
&= 4.6^3 + 3.6^2 + 4.6^1 + 3.6^0 \\
&= 864 + 108 + 24 + 3 \\
&= 999
\end{aligned}
$$

1.5.6 Bilangan Desimal ke Basis Bilangan 7

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 7, sebagai contoh:

993 = ... 7

$$
\begin{array}{r|l l}
7 & 993 & \text{sisa } 6 \\ \hline
7 & 141 & \text{sisa } 1 \\ \hline
7 & 20 & \text{sisa } 6 \\ \hline
7 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
993 &= 2616_7 \\
&= 2.7^3 + 6.7^2 + 1.7^1 + 6.7^0 \\
&= 686 + 294 + 7 + 6 \\
&= 993
\end{aligned}
$$

701 = ... 7

$$
\begin{array}{r|r l}
7 & 701 & \text{sisa } 1 \\ \hline
7 & 100 & \text{sisa } 2 \\ \hline
7 & 14 & \text{sisa } 0 \\ \hline
7 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
701 &= 2021_7 \\
&= 2.7^3 + 0.7^2 + 2.7^1 + 1.7^0 \\
&= 686 + 0 + 14 + 1 \\
&= 701
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|r l}
507 & = & \text{...... } 7 \\
7 & 507 & \text{sisa } 3 \\ \hline
7 & 72 & \text{sisa } 2 \\ \hline
7 & 10 & \text{sisa } 3 \\ \hline
7 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
507 &= 1323_7 \\
&= 1.7^3 + 3.7^2 + 2.7^1 + 3.7^0 \\
&= 343 + 147 + 14 + 3 \\
&= 507
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|r l}
896 & = & \text{...... } 7 \\
7 & 896 & \text{sisa } 0 \\ \hline
7 & 128 & \text{sisa } 2 \\ \hline
7 & 18 & \text{sisa } 4 \\ \hline
7 & 2 & \text{sisa } 2 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
896 &= 2420_7 \\
&= 2.7^3 + 4.7^2 + 2.7^1 + 0.7^0 \\
&= 686 + 196 + 14 + 0 \\
&= 896
\end{aligned}
$$

1.5.7 Bilangan Desimal ke Basis Bilangan 8

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 8, yaitu:

752 = ... 8

8	752	sisa 0
8	94	sisa 6
8	11	sisa 3
8	1	sisa 1
	0	

$$
\begin{aligned}
752 &= 1360_8 \\
&= 1.8^3 + 3.8^2 + 6.8^1 + 0.8^0 \\
&= 512 + 192 + 48 + 0 \\
&= 752
\end{aligned}
$$

537 = ... 8

8	537	sisa 1
8	67	sisa 3
8	8	sisa 0
8	1	sisa 1
	0	

$$
\begin{aligned}
537 &= 1031_8 \\
&= 1.8^3 + 0.8^2 + 3.8^1 + 1.8^0 \\
&= 512 + 0 + 0 + 24 + 1 \\
&= 537
\end{aligned}
$$

418 = ... 8

8	418	sisa 2
8	52	sisa 4
8	6	sisa 6
	0	

$418 = 642_8$

$= 6.8^2 + 4.8^1 + 2.8^0$

$= 384 + 32 + 2$

$= 418$

$$922 = \ldots\ldots 8$$

$$\begin{array}{r|ll} 8 & 922 & \text{sisa } 2 \\ \hline 8 & 115 & \text{sisa } 3 \\ \hline 8 & 14 & \text{sisa } 6 \\ \hline 8 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$922 = 1632_8$

$= 1.8^3 + 6.8^2 + 3.8^1 + 2.8^0$

$= 512 + 384 + 24 + 2$

$= 922$

1.5.8 Bilangan Desimal ke Basis Bilangan 9

Dengan cara yang sama seperti cara di atas, dapat dilakukan cara untuk mengubah dari basis 10 menjadi basis 9, sebagai contoh:

$$2396 = \ldots\ldots 9$$

$$\begin{array}{r|ll} 9 & 2396 & \text{sisa } 2 \\ \hline 9 & 266 & \text{sisa } 5 \\ \hline 9 & 29 & \text{sisa } 2 \\ \hline 9 & 3 & \text{sisa } 3 \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
2396 &= 3252_9 \\
&= 3.9^3 + 2.9^2 + 5.9^1 + 2.9^0 \\
&= 2187 + 162 + 45 + 2 \\
&= 2396
\end{aligned}
$$

5411 = ... 9

$$
\begin{array}{r|ll}
9 & 5411 & \text{sisa } 2 \\ \hline
9 & 601 & \text{sisa } 7 \\ \hline
9 & 66 & \text{sisa } 3 \\ \hline
9 & 7 & \text{sisa } 7 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
5411 &= 7372_9 \\
&= 7.9^3 + 3.9^2 + 7.9^1 + 2.9^0 \\
&= 5103 + 243 + 63 + 2 \\
&= 5411
\end{aligned}
$$

3752 = ... 9

$$
\begin{array}{r|ll}
9 & 3752 & \text{sisa } 8 \\ \hline
9 & 439 & \text{sisa } 2 \\ \hline
9 & 48 & \text{sisa } 1 \\ \hline
9 & 5 & \text{sisa } 5 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
3752 &= 5128_9 \\
&= 5.9^3 + 1.9^2 + 2.9^1 + 8.9^0 \\
&= 3645 + 81 + 18 + 8 \\
&= 3752
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r|l l}
6781 & \;\; = & ......\ 9 \\
9 & 6781 & \text{sisa } 4 \\ \hline
9 & 753 & \text{sisa } 6 \\ \hline
9 & 83 & \text{sisa } 2 \\ \hline
9 & 9 & \text{sisa } 0 \\ \hline
9 & 1 & \text{sisa } 1 \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
6781 &= 10264_9 \\
&= 1.9^4 + 0.9^3 + 2.9^2 + 6.9^1 + 4.9^0 \\
&= 6561 + 0 + 162 + 54 + 4 \\
&= 6781
\end{aligned}
$$

1.6 CARA LAIN YANG BISA DIGUNAKAN DALAM SISTEM BILANGAN

1.6.1 Sistem Biner

Ini digunakan secara luas pada semua bentuk pemakaian persaklaran. Hal serupa juga dijelaskan oleh Stroud (2003:49-50), di mana simbol yang digunakan hanya 0 dan 1 serta nilai tempat adalah pangkat dari 2 yaitu sistem mempunyai basis 2. Contohnya adalah sebagai berikut.

Pada sistem linear : $1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \cdot \quad 1 \quad 0 \quad 1_2$ dan mempunyai nilai tempat :

$$2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \quad 2^{-3} \quad 2^{-2} \quad 2^{-1} \text{ atau } 8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$$

Jadi, $1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad \cdot \quad 1 \quad 0 \quad 1$ biner pada sistem desimal:

$$=1\times 8 \quad 0\times 4 \quad 1\times 2 \quad 1\times 1 \quad 1\times\frac{1}{2} \quad 0\times\frac{1}{4} \quad 1\times\frac{1}{8}$$

$$= \quad 8 \qquad 4 \qquad 1 \qquad 1 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8}$$

$=11\frac{5}{8}=11{,}625$. Dalam sistem dinari $\therefore 1011.101_2 = 11.625_{10}$

Indeks 2 dan 10 yang kecil menunjukkan kedua sistem dan dengan cara yang sama ekuivalen dinari dari $1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \cdot \quad 0 \quad 1 \quad 1_2$ adalah :

$$=8+4+0+1+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

$$=13\frac{3}{8}=13.375_{10}$$

1.6.2 Sistem Oktal (Basis 8)

Menurut Stroud (2003: 49-50), sistem ini menggunakan simbol : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 dengan nilai tempat yang ada pangkat 8.

Contoh :

$3 \quad 5 \quad 7 \quad , \quad 3 \quad 2 \quad 1$ pada sistem oktal yang mempunyai nilai tempat $8^2 \quad 8^1 \quad 8^0 \quad 8^{-1} \quad 8^{-2} \quad 8^{-3}$ atau $64 \quad 8 \quad 7 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{512}$. Jadi:

$$\therefore\ 3 \quad 5 \quad 7 \;, \; 3 \quad 2 \quad 1_8$$

$$= 3\times 64 \quad 5\times 8 \quad 7\times 1 \quad 3\times\frac{1}{8} \quad 2\times\frac{1}{64} \quad 1\times\frac{1}{512}$$

$$= 192 + 40 + 7 + \frac{3}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{512}$$

$$= 239\frac{209}{512} = 239{,}4082_{10}$$

$$257{,}321_8 = 239{,}408_{10}$$

Seperti terlihat pada metode sebelumnya, hanya saja perbedaannya pada basis nilai tempat. Dengan cara yang sama, $263{,}452_8$ dinyatakan dalam bentuk dinari adalah ....

Untuk : $2 \quad 6 \quad 3 \;, \; 4 \quad 5 \quad 2_8$

$$= 2\times 8^2 + 6\times 8^1 + 3\times 8^0 + 4\times 8^{-1} + 5\times 8^{-2} + 2\times 8^{-3}$$

$$= 2\times 64 + 6\times 8 + 3\times 1 + 4\times\frac{1}{8} + 5\times\frac{1}{64} + 2\times\frac{1}{512}$$

$$= 128 + 48 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{5}{64} + \frac{1}{256}$$

$$= 179\frac{149}{256} = 179{,}582_{10}$$

Contoh Soal : Selesaikan oktal $357{,}121_8$ ke dalam bentuk dinari!

Penyelesaian : Pertama-tama kita akan memperhatikan bagian bilangan bulat 357_8 mulai dari paling kiri, kalikan kolom pertama dengan basis 8 dan tambahkan hasil ke entri kolom berikutnya (menjadi 29).

$$\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 7 \\ \times\ 8 & 24 & 232 \\ \hline 24 & 29 & 239 \\ & \times\ 8 & \\ \cline{2-2} & 232 & \end{array}$$

Sekarang, ulangi cara tersebut. Kalikan total kolom kedua dengan 8 dan tambahkan hasilnya ke kolom berikut. Hasilnya 239 pada kolom satuan.

$$\therefore\ 375_8 = 239_{10}$$

Selanjutnya, lakukan lagi dengan bagian desimal bagian bilangan oktal $0,121_8$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & , & 1 & 2 & 1 \\ & & x\ \ 8 & 8 & 80 \\ \cline{3-5} & & 8 & 10 & 81 \\ & & & \times\ \ 8 & \\ \cline{4-4} & & & 80 & \end{array}$$

Mulai dari kolom kiri, kemudian titik desimal dikalikan 8 dan ditambahkan hasilnya ke kolom berikutnya. Ulangi proses ini sehingga akhirnya mendapat total 81 di kolom akhir. Akan tetapi, nilai tempat kolom ini adalah 8^{-3}.

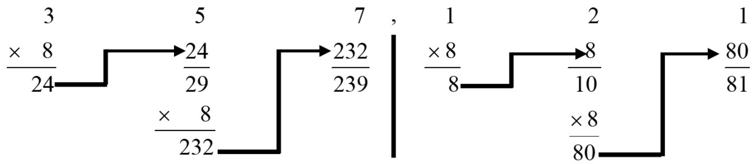
$\therefore$ Nilai dinari $0,121_8$ adalah 18 x 8^{-3} atau

$$81 \times \frac{1}{8^3} = \frac{81}{512} = 0{,}1582_{10}$$

$\therefore$ Menyatukan hasil kedua bagian bersama-sama,

$357{,}121_8 = 239{,}1582_{10}$

Atau, kita dapat menyusun semua bersebelahan agar menghemat tempat menjadi:



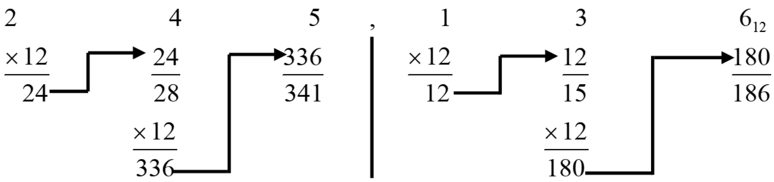
$$81 \times \frac{1}{8^3} = \frac{81}{512} = 0{,}182_{10} \qquad \therefore 357{,}121_8 = 239{,}158_{10}$$

Selanjutnya, dapat menyusun dengan cara yang sama, yakni menunjukkan duodesimal $245{,}136_{12}$ dalam bentuk dinari. Renggangkan spasi digit duodesimal agar tersedia ruang cukup untuk bekerja.

$$2 \quad 4 \quad 5 \quad , \quad 1 \quad 3 \quad 6_{12}$$

Selanjutnya, kerjakan $245{,}136_{12}$= ....

Penyelesaian :



Nilai tempat kolom terakhir adalah 12^{-3}

$$\therefore \quad 0{,}136_{12} = 186 \times 12^{-3} = \frac{186}{1728} = 0{,}1076_{10}.$$

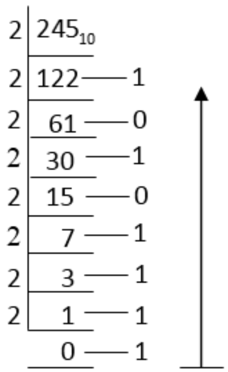
$$\therefore \quad 245{,}236_{12} = 341{,}1076_{10}.$$

1.7 PERUBAHAN BASIS DARI DINARI KE BASIS LAIN

1.7.1 Menyelesaikan Bilangan Dinari ke Bentuk Binari

Metode yang sederhana sudah dijelaskan oleh Stroud (2003:57), dengan membagi berulang dengan 2 (basis baru), meninggalkan sisanya pada setiap tahap, lanjutkan membagi sampai hasil bagi nol yang diperoleh.

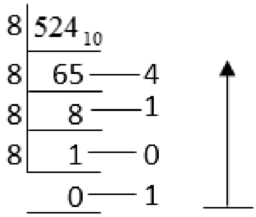
Sekarang, tulis semua sisanya dengan arah berlawanan, yaitu dari bawah ke atas. Ingat, jangan memasukkan hasil bagi nol.



Jadi, $245_{10} = 11110101_2$

1.7.2 Menyelesaikan Bilangan Dinari ke Bentuk Oktal

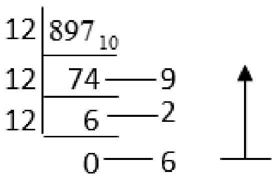
Metode ini oleh Stroud (2003:58), benar-benar sama kecuali membagi berulang dengan 8 (basis baru). Jadi, tanpa kesulitan, ubahlah 524_{10} ke oktal sehingga menghasilkan:



$$\therefore \ 524_{10} = 1014_{8},$$

1.7.3 Menyelesaikan Bilangan Dinari ke Bentuk Duodesimal

Metode Stroud (2003:58), seperti sebelumnya, tetapi sekarang dibagi dengan 12. Jadi, 897_{10} sehingga menghasilkan:



$$\therefore \ 897_{10} = 629_{12},$$

1.7.4 Mengubah Desimal Dinari ke dalam Bentuk Oktal

Untuk mengubah $0{,}526_{10}$ ke bentuk oktal, oleh Stroud (2003:57-59), harus dikalikan desimal dengan basis baru yang dalam kasus ini 8, tetapi pada perkalian kedua dan sebelumnya tidak dikalikan bagian bilangan bulat perkalian sebelumnya.

Sekarang, pengalinya 8, tetapi diperlakukan hanya pada bagian desimal.

$$
\begin{array}{ccr}
0 & \bullet & 526_{10} \\
 & & 8 \\
\hline
4 & \bullet & 208 \\
 & & 8 \\
\hline
1 & \bullet & 664 \\
 & & 8 \\
\hline
5 & \bullet & 312 \\
 & & 8 \\
\hline
2 & \bullet & 496
\end{array}
$$

dan seterusnya

Akhirnya, ditulis angka bilangan bulat ke arah bawah ke bentuk desimal oktal yang diharapkan. Berhati-hatilah untuk tidak memasukkan digit satuan nol pada desimal dinari yang akan lebih aman menulis desimal sebagai $0{,}526_{10}$ pada pekerjaan ini.

Jadi, $0{,}526_{10} = 0{,}4152_8$. Konversi desimal dinari ke basis baru lain diselesaikan dengan cara yang sama, jika ditunjukkan $0{,}306_{10}$ sebagai doudesimal, akan diperoleh:

	•	306_{10}
		12
3	•	672
		12
8	•	064
		12
0	•	768
		12
9	•	216
		12
2	•	592

dan seterusnya

Tidak ada penyimpanan ke dalam kolom satuan sehingga masukkan nol.

$$\therefore \quad 0{,}306_{10} = 0{,}3809_{12}$$

Jika bilangan dinari terdiri dari bilangan bulat dan bagian desimal, kedua bagian dikonversikan terpisah dan digabungkan dalam hasil final.

Contoh : Selesaikan $492{,}731_{10}$ ke dalam bentuk oktal!

Penyelesaian :

8	492_{10}	
8	61	4
8	7	5
	0	7

$$\begin{array}{rcr} & \bullet & 731_{10} \\ & & 8 \\ \hline 5 & \bullet & 848 \\ & & 8 \\ \hline 6 & \bullet & 784 \\ & & 8 \\ \hline 6 & \bullet & 272 \\ & & 8 \\ \hline 2 & \bullet & 176 \end{array}$$

Hingga : $492{,}731_{10} = 754{,}5662_{8}$

Latihan Soal–Soal tentang Basis.

Ubahlah basis bilangan berikut menjadi basis bilangan yang lain

1. 397 $= \ldots_2$
2. 399 $= \ldots_4$
3. 587 $= \ldots_8$
4. 987 $= \ldots_9$
5. 1038 $= \ldots_7$
6. 1597 $= \ldots_7$
7. 9873 $= \ldots_8$
8. 1987 $= \ldots_6$
9. 1967 $= \ldots_5$
10. 1956 $= \ldots_9$

1.8 PERTIDAKSAMAAN DAN NILAI MUTLAK (MARTONO, 1999 : 11-12)

Bentuk umum pertidaksamaan :

$$\frac{A(X)}{B(X)} < \frac{C(X)}{D(X)},\ \text{A,B,C,D suku banyak}$$

Tanda < dapat diganti oleh >, ≤ , atau ≥.

> : Lebih besar

< : Lebih kecil

≥ : Lebih besar atau sama dengan

≤ : Lebih kecil atau sama dengan

Contoh :

a. Tentukan himpunan jawab pertidaksamaan $X^4 - X^2 < 0$

Penyelesaian :

$$X^4 - X^2 < 0$$
$$X^2\left(X^2 - 1\right) < 0$$
$$X^2\left(X + 1\right)\left(X - 1\right) < 0$$

```
+ + + + | - - - - | - - - - | + + + +
        1         0         1
```

Himpunan Jawab $= (-1,0)\ U(0,1) = (-1,1) - (0)$

b. Tentukan himpunan jawab pertidaksamaan $\dfrac{2}{X} \geq X + 1$

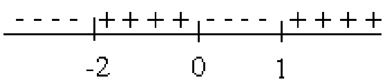
Penyelesaian :

$$\frac{2}{X} \geq X + 1$$

$$X + 1 - \frac{2}{X} \leq 0$$

$$\frac{X^2 + X - 2}{X} \leq 0$$

$$\frac{(X+2)(X-0)}{X} \leq 0$$



Himpunan Jawab : $(-\varsigma, -2) \cup (0, 1)$

c. Tentukan himpunan jawab pertidaksamaan $2 \leq X^2 - X < 6$

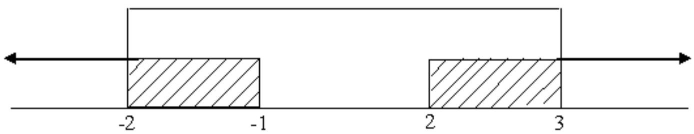
Penyelesaian :

$2 \leq X^2 - X \quad$ dan $\quad X^2 - X < 6$

$X^2 - X - 2 \geq 0 \quad$ dan $\quad X^2 - 2 - 6 < 0$

$(X+1)(X-2) \geq 0 \quad$ dan $\quad (X+2)(X-3) < 0$

$(X \leq 1 \text{ atau } X \geq 2) \quad$ dan $\quad (-2 < X < 3)$



Himpunan Jawab : $((-\varsigma, -1) \cup (2, \varsigma)) \cap ((-2, 3)) = (-2, -1) \cup (2, 3)$

1.9 ATURAN PEMANGKATAN DAN PEMFAKTORAN

1.9.1 Pemangkatan

$$X^4 = X \,.\, X \,.\, X \,.\, X$$

$$5^4 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$$

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n} = \frac{1}{X \,.\, X \,.\, X \,.\, X \cdots Xn}$$

Jika: $n = 0$

$$X^0 = 1$$

Jika X adalah bilangan nyata dan n adalah bilangan pecah positif, misalnya $\frac{2}{3}$, dapat didefinisikan :

$$X^{2/3} = \sqrt[3]{X^2} \quad \rightarrow \quad X^{1/2} = \sqrt{X}$$

$$X^{m/n} = \sqrt[n]{X^m} \quad \rightarrow \quad X^{2/5} = \sqrt[5]{X^2}$$

$$X^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{X^m}} \quad \rightarrow \quad X^{-2/7} = \frac{1}{\sqrt[7]{X^2}}$$

$$X^m . X^n = X^{m+n} \quad \rightarrow \quad X^2 . X^3 = X^5$$

$$\frac{X^m}{X^n} = X^{m-n} \quad \rightarrow \quad \frac{X^5}{X^2} = X^3$$

$$\left(X^m\right)^n = X^{m.n} \quad \rightarrow \quad \left(X^2\right)^3 = X^6$$

$$\left(X.Y\right)^n = X^n . Y^n \quad \rightarrow \quad \left(X.Y\right)^2 = X^2 . Y^2$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)^n = \frac{X^n}{Y^n} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{X}{Y}\right)^3 = \frac{X^3}{Y^3}$$

$X^0 = 1$

$A^0 = 1$

$100^0 = 1$

1.9.2 Pemfaktoran

a) $ab + ac = a(b + c)$

Contoh : $2Y^3 - 3XY^2 + 4Y$

Diubah menjadi : $2Y^3 - 3XY^2 + 4Y = Y(2Y^2 - 3XY + 4)$

b) $Y = (X + a)(X + b)$

Contoh : $Y = X^2 - 9X + 20$

$Y = (X - 4)(X - 5)$

c) $Y = (X - a)(X + b)$

Contoh : $Y = X^2 - 25$

$Y = (X - 5)(X + 5)$

d) $X^3 + a^3 = (X + a)(X^2 - aX + a^2)$

Contoh : $X^3 + 27 = (X + 3)(X^2 - 3X + 9)$

e) $X^3 - a^3 = (X - 3)(X^2 + aX + a^2)$

Contoh : $X^3 - 64 = (X - 4)(X^2 + 4X + 16)$

SOAL-SOAL LATIHAN :

1. $2 \le X^2 - X \le 6$
2. $X - \dfrac{6}{X} \le 1$
3. $-1 < 2X^2 - 5X + 2 \le 5$
4. $\dfrac{X^4}{X^2}$
5. $(27)^{-1/3}$
6. $3^{2/5}$
7. $5^{-7/3}$
8. $Y^2 + 6Y - 16$
9. $Y^2 + 4XY + 3X^2$
10. $5Y^2 - 17Y + 14$

BAB II

FUNGSI DAN GRAFIK

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa bisa memahami dan mengerti apa itu fungsi dan apa itu grafik; pengertian dari fungsi linear dan fungsi kuadrat; serta cara membuat grafik fungsi linear dan membuat grafik fungsi kuadrat.

2.1 GRAFIK PERSAMAAN

Menurut Purcell (1991:38), penggunaan koordinat untuk titik pada bidang akan memungkinkan untuk diberikan suatu kurva (objek geometri) dengan memakai suatu persamaan (objek aljabar). Selanjutnya, memandang proses kebalikannya, yaitu menggambarkan suatu persamaan. Grafik suatu persamaan dalam x dan y terdiri atas titik-titik di bidang yang koordinat (x, y)nya memenuhi persamaan, artinya membuatnya suatu persamaan yang benar.

2.2 FUNGSI LINIER

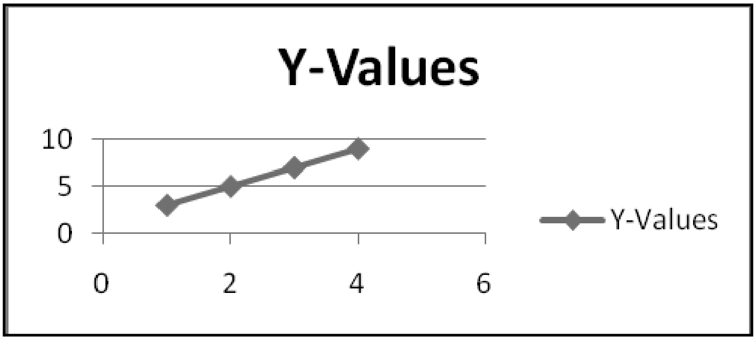
Grafik fungsi linier merupakan grafik garis lurus yang paling sederhana dari semua kurva. Sebuah garis adalah sebuah objek geometri, bila ditempatkan pada suatu koordinat bidang, garis ini tentulah mempunyai persamaan. Untuk mencari persamaan suatu garis, diperlukan pengertian yang mendasar tentang kemiringan.

2.2.1 PERSAMAAN GARIS LURUS

Garis lurus

$y = 2x + 1$

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9



2.2.2 FUNGSI KUADRAT

Grafik pada fungsi kuadrat merupakan grafik yang berbentuk seperti parabola. Prosedur penggambaran grafik untuk menggambar suatu persamaan, misalnya $y - 2x^3 - x + 19$

dapat diikuti prosedur sederhana dalam tiga langkah oleh Purcell (1991, 39:41), yaitu:

a. *Langkah 1*. Dapatkan koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan.
b. *Langkah 2*. Rajah titik-titik tersebut di bidang.
c. *Langkah 3*. Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.

Cara terbaik untuk melakukan langkah 1 adalah membuat sebuah tabel nilai-nilai dan berikan nilai-nilai pada salah satu peubah (variabel), misalnya x dan tentukan nilai-nilai yang berpadanan dari peubah lainnya dengan mendaftarkan hasil-hasil yang tersusun dalam tabel.

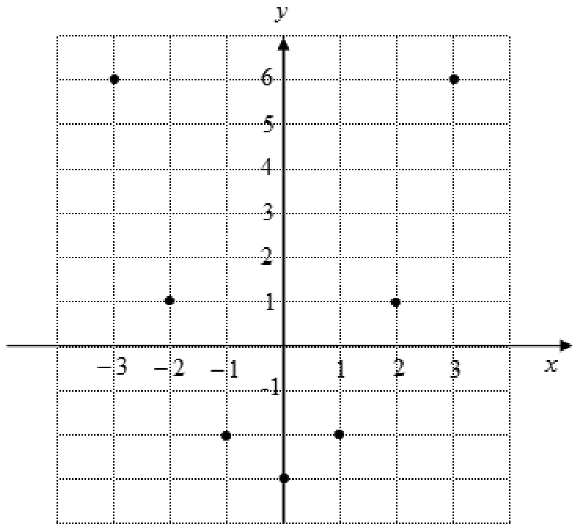
Contoh : Gambar grafik persamaan $y = x^2 - 3$

Penyelesaian : Prosedur tiga langkah diperlihatkan dalam gambar di bawah ini.

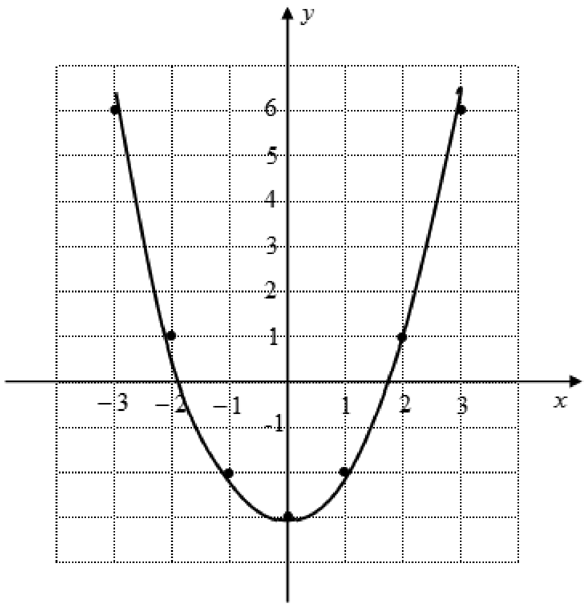
$y = x^2 - 3$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

Gambar 2.1 *Langkah 1* Buat sebuah daftar nilai



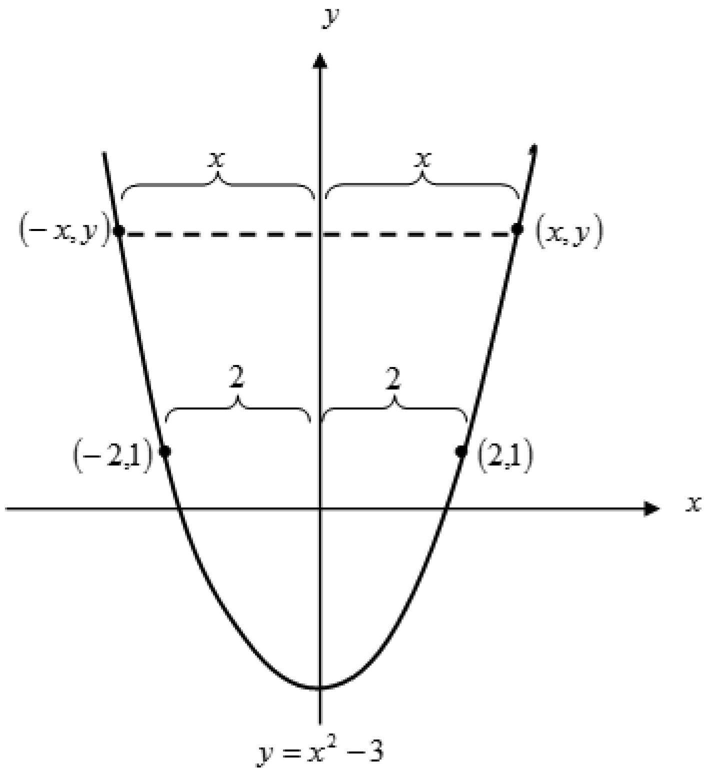
Gambar 2.2 *Langkah 2* Rajah titik-titik tersebut



Gambar 2.3 *Langkah 3* Hubungkan titik-titik itu dengan sebuah kurva mulus

2.2.3 KESIMETRIAN GRAFIK

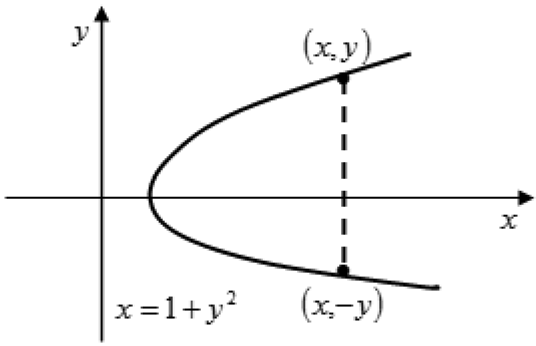
Akan dapat menghemat kerja dan juga menggambarkan grafik yang lebih tepat jika dapat mengenali simetri tertentu dari grafik tersebut dengan memeriksa persamaan yang berpadanan oleh Purcell (1991. 39-41).



Gambar 2.4 Kesimetrian pada grafik $y = x^2 - 3$

Lihat grafik $y = x^2 - 3$ di atas dan gambar dalam Gambar 2.4. Jika bidang koordinat dilipat sepanjang sumbu y, kedua cabang akan berimpit. Misalnya, $(3,6)$ akan berimpit dengan

$(-3,6)$, $(2,1)$ akan berimpit dengan $(-2,1)$, dan secara lebih umum (x, y) akan berimpit dengan $(-x, y)$. Secara aljabar, ini berpadanan dengan kenyataan bahwa penggantian x oleh $-x$ dalam persamaannya $y = x^2 - 3$ menghasilkan persamaan setara.



Gambar 2.5 Kesimetrian pada grafik $x = 1 + y^2$

Pandang suatu persamaan sembarang jika penggantian x oleh $-x$ menghasilkan suatu persamaan yang setara, grafik persamaan adalah **simetri terhadap sumbu y** serupa. Jika penggantian y oleh $-y$ menghasilkan suatu persamaan setara, akan membuat **grafik simetri terhadap sumbu x** . Persamaan $x = 1 + y^2$ adalah dari jenis yang belakangan maka grafiknya diperlihatkan dalam Gambar 2.5.

Tipe simetri yang ketiga adalah **simetri terhadap titik asal**. Simetri yang demikian terjadi bilamana penggantian x oleh $-x$ dan y oleh $-y$ menghasilkan suatu persamaan yang setara. Secara geometri, ini berpadanan terhadap titik-titik (x, y) dan $(-x,-y)$ yang berada pada sebuah garis yang melalui titik asal dan sama jauh dari titik asal. Persamaan $y = x^3$ memberikan contoh yang baik, karena $-y = (-x)^3$ setara terhadap $y = x^3$.

BAB III

LIMIT

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan agar mahasiswa bisa memahami dan mengerti tentang limit; bagaimana cara menyelesaikan limit, limit fungsi aljabar, dan limit fungsi trigonometri; serta bagaimana menyelesaikan diferensial dengan menggunakan limit dan sebagainya.

3.1 PENGERTIAN LIMIT

Menurut Martono (1999:47), limit fungsi di satu titik dan limit fungsi tak hingga merupakan konsep dasar dalam kalkulus diferensial dan integral yang digunakan secara intensif. Konsep esensial dan strategis dalam kalkulus seperti turunan, integral tentu, dan integral tak wajar dikontruksi dengan menggunakan konsep ini. Untuk dapat memahami konsep limit fungsi diperlukan pengetahuan tentang nilai mutlak sebagai ukuran jarak pada garis bilangan, pertidaksamaan sebagai ukuran kedekatan dan berbagai sifat tentang fungsi real sebagai objeknya.

3.2 TEOREMA LIMIT (MARTONO, 1999:51)

1. $f\left(x\right)= k \rightarrow \lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)=k$
2. $f\left(x\right)=k \rightarrow \lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)=c$
3. $\lim\limits_{x\to c} \left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)+\lim\limits_{x\to c} g\left(x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to c}\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]=\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)-\lim\limits_{x\to c} g\left(x\right)$
5. $\lim\limits_{x\to c} k\, f\left(x\right)=k.\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to c} [f\left(x\right).\,g\left(x\right)]=\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right).\ \lim\limits_{x\to c} g\left(x\right)$
7. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$
8. $\lim\limits_{x\to c}\left[f\left(x\right)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to c} f\left(x\right)\right]^n$, n bilangan bulat
9. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, n bilangan asli n ≥ 2
10. $\lim\limits_{x\to c}\left[f\left(x\right)\right]^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^m}$

    $=\left[\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}\right]^m$, m bilangan bulat lim f(x) ε R

Contoh soal – soal dan penyelesaian

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-6x+9\right)=1^2-6.1+9=4$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)\left(x-3\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right).\lim\limits_{x\to 2}\left(x-3\right)$

   $=\left(2^2-1\right)\left(2-3\right)$

$$= (4-1)(-1)$$
$$= -3$$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{5}{4}$

***Catatan**: Pada contoh nomor 3 di atas, dapat langsung ditemukan nilai limitnya dengan cara substitusi, sedangkan untuk contoh nomor 4 di bawah ini tidak bisa dengan cara substitusi langsung karena nilai limit penyebutnya = 0.*

4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = \lim\limits_{x \to 5} (x+5) = 5+5 = 10$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)}{(x^3 + x^2 - 5x + 3)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} (x-1)^2 (x+5)}{\lim\limits_{x \to 2} (x-1)^2 (x+3)}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+5)}{(x+3)}$$

$$= \frac{2+5}{2+3}$$

$$= \frac{7}{5}$$

6. $\lim\limits_{x \to a} = \dfrac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}}, a > 0$

$$= \lim_{x \to a} = \frac{a+2x-3x}{3a+x-4x} \cdot \frac{\sqrt{3a+x}}{\sqrt{a+2a}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x^2-7}{10x^3-11x^2+5x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{3+5}{x-7}x^3}{\dfrac{10-11}{x+5}x} = \dfrac{3}{10}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)\frac{1}{x} = \ln\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$= \ln e = 1$$

9. $\lim\limits_{x\to 4} 3x^4 = 3\lim\limits_{x\to 2} x^4 = 3.(16) = 48$

10. $\lim\limits_{x\to 3} x^2+2x-5 = \lim\limits_{x\to 3} x^2 + 2\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 5$

$$= (3)^2 + 2(3) - 5 = 10$$

11. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{(x+5)}}{\lim\limits_{x\to 4} x}$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 5}}{\lim\limits_{x\to 4} x}$$

$$= \frac{\sqrt{4+5}}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2-4\right)}{\left(x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(x+2\right)$

$=2+2$

$=4$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-2\right)^{2\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-2\right)^{\frac{5}{2}}=\left[\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}2x-2}\right]^5$

$=\left[\sqrt{3\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}2}\right]^5=\left[\sqrt{4}\right]^5=2^5=32$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2-3x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 2}5x^3.\sqrt{8x}$ 5x3
3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x+2\right)^{1\frac{1}{2}}\left(2x-3\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{\left(x+1\right)}-\sqrt{\left(7-x\right)}}{\left(x^2-x-6\right)}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{11-x}}$

3.3 LIMIT FUNGSI ALJABAR (MARTONO, 1991:51)

a. Limit fungsi $f:x\to f(x)$ untuk $x\to a$, mencari $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ dengan cara:
   1. Subtitusi Langsung
   2. Dengan membagi pembilang dari penyebut dengan faktor persekutuan

Contoh soal:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{(8+x)}+2=\sqrt{9}+2=5$

2. $\underset{x\to 1}{\text{üüüü}}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\underset{x\to 1}{}\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)}=\underset{x\to 1}{}(x+3)=4$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+1)(x-3)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)}{(x+1)}=\frac{3+4}{3+1}=\frac{7}{4}$$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right)=\sqrt{4}+2=4$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x}\times\dfrac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Soal-Soal Latihan:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x2+5}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{13-x^2}}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x+4}-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

b. Limit fungsi f: x → f(x) untuk x → ∞

bentuk limit $x \to \infty$ berbentuk:

Contoh soal:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+4x}{x^3-2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{4x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2-\frac{3}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=2$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}.\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)-(x+1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\frac{0}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=0$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}$$

LATIHAN SOAL-SOAL :

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\sqrt{4x+3}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-2x^4}}{(2x-3)^2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-5-\sqrt{x^2+5x}}}{2x+7}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+7x+2}-\sqrt{x^2+2x+5}\right]$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2-3}+\sqrt{4x^2+7}}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x}{\sqrt{x^2+6x-\sqrt{x^2+5x}}}$

3.4 LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI (MARTONO, 1999:56-57)

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{ax}=1$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\sin ax}=1$

f. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{\tan ax}=1$

CONTOH SOAL:

Hitunglah nilai limit – limit berikut :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}\ .\ \dfrac{2}{2}$

$$= 2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2$$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}\ .\ \dfrac{2x}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\sin x}{x}\ .\ \frac{2x}{\sin\ 2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ .\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{1}{2}.1.\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\ \ =\frac{1}{2}\ .\ 1.\ 1=\frac{1}{2}$$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{2x^2}.\left(\cos 2x\ =\ 1-2\sin^2 x\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin x}{x}.\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ .\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.1=1$$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{x\tan x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{x\tan x}{1-(1-2\sin^2 x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\ \frac{x\tan x}{2\sin^2 x)}\ .\ \frac{x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\ \frac{x}{\sin x}\ .\ \lim_{x\to 0}\ .\frac{x}{\sin\ x}\ .\ \lim_{x\to 0}\ \frac{\tan x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\ .1.1.1\ =\frac{1}{2}$$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{1-(1-2\sin^2 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x)}{2\sin^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(4\sin^2 x.\cos^2 x)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{4}.1=\frac{1}{4}$$

Catatan:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$
$$=2.\cos^2 x-1$$
$$=1-2\ \sin^2 x$$

$$\cos x=2\ \cos^2\frac{1}{2}x-1=1-2\ \sin^2\frac{1}{2}x$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\ x-\cos\ 3x}{1-\cos 2x}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$

d. $\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$

e. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 2x}$

f. $\lim_{x\to a}\frac{\tan 2x-\tan 2a}{\tan x-\tan a}$

misal x = a + t

g. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 - \sin x}{x - \frac{1}{2}\pi}$

misal $x = y + \frac{1}{2}\pi$

maka $x \to \frac{1}{2}\pi \to y \to 0$

Hitunglah harga–harga limit di bawah ini: Jawab

1. $\lim\limits_{x \to -1} (x + 3)$ — 1. 2
2. $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$ — 2. −15
3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 4}{x^2 - 16}$ — 3. tak ada limit
4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$ — 4. tak ada limit
5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x}{2x + 3}$ — 5. 7/5
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 4x - 1 - x}$ — 6. 2
7. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ — 7. $1/\sqrt{e}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + sin\ x)^{\frac{1}{x}}$ — 8. e
9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\left(\frac{\sin x}{s} \right)}$ — 9. 3/2
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$ — 10. 0
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ — 11. 3

12. $\lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x}$ 12. cos a

13. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ 13. ½

14. $\lim_{x \to 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}}$ 14. π

15. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ 15. ¼

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ 16. 1

17. $\lim_{x \to \infty} \left\{ \ln(2x+1) - \ln(x+2) \right\}$ 17. ln 2

18. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{n} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$ 18. 1

19. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$ 19. 1

20. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ 20. a – b

3.5 MENYELESAIKAN DIFERENSIAL DENGAN MENGGUNAKAN LIMIT (DARMAWIJOYO, 1996:115-116)

Diferensial fungsi *f (x)* adalah fungsi *f¹(x)* yang didefinisikan sebagai:

$$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a. **Contoh 1**:

Carilah diferensial $f(x) = x^2 + 1$

Penyelesaian:

$$f^1(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h}$$

$$f^1(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \; 2x + h$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

b. **Contoh 2:**

Carilah diferensial dari $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$!

Penyelesaian:

$$f^1(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow f(x+h) = \frac{x+h}{x+h+3}$$

$$f^1(x) = \lim_{h \to o} \frac{\dfrac{(x+h)}{(x+h\,3)} - \dfrac{(x)}{(x+3)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{(x+h)(x+3) - (x)(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{x^2 + 3x + hx + 3h - x^2 - xh - 3x}{(x+h+3)(x+3)h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{3h}{(x+h+3)(x+3)h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{3}{(x+h+3)(x+3)}$$

$$= \frac{3}{(x+3)^2}$$

BAB IV
DIFERENSIAL

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan mahasiswa bisa mengerti dan memahami apa itu diferensial atau yang disebut dengan turunan; bagaimana cara diferensial untuk fungsi aljabar, diferensial untuk fungsi trigonometri, dan diferensial untuk fungsi implisit; serta bisa menyelesaikan soal-soal yang telah disediakan.

4.1 RUMUS – RUMUS DASAR

4.1.1 DIFERENSIAL FUNGSI ALJABAR

Untuk menentukan Diferensial (Turunan) dari fungsi aljabar yang dalam hal ini turunan dari fungsi (x) maka digunakan aturan yang telah diberikan oleh Purcell (1991 : 122) di mana fungsi dapat disingkat dengan tulisan $f(x)$ dan juga untuk Turunan fungsi (x) ditulis dengan menggunakan $f'(x)$ yang dalam hal ini pengertiannya sama seperti dalam buku Purcell yang ditulis dengan dy/dx.

Dalam buku ini, lebih dipersingkat lagi penulisan untuk istilah fungsi (x) dengan menggunakan simbol u dan v

yang mana u dan v sama–sama merupakan fungsi (x), tetapi antara u dan v bukanlah fungsi (x) yang sama, contohnya $u = (x^2 + 5)$ dan $v = (x^3 + 3x)$, sedangkan untuk n adalah simbol untuk menyatakan pangkat dari . Hal ini sengaja dibuat agar mahasiswa lebih mudah untuk menghafal rumusnya dan lebih mudah untuk mengerjakannya sesuai dengan aturan di atas.

1. $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f^1(x) &= n.\, x^{n-1} \end{aligned}}$$

a. Contoh 1:

$$f(x) = x^5$$

$$f^1(x) = 5.\, x^{5-1} = 5x^4$$

b. Contoh 2:

$$f(x) = 2x^3$$

$$f^1(x) = 3.2x^{3-1} = 6x^2$$

c. Contoh 3:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f^1(x) = ½\, x^{-\frac{1}{2}}$$

d. **Contoh 4:**

$$f(x) = 3x^4\sqrt{x} + 5$$

$$f^1(x) = \frac{27}{2}x^3\sqrt{x}$$

e. **Contoh 5:**

$$f(x) = 2x^5\sqrt{x} + 5x^2$$

$$f^1(x) = 11\,x^4\sqrt{x} + 10x$$

f. **Contoh 6:**

$$f(x) = 3x^4\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt[3]{x}$$

$$f^1(x) = \frac{39}{3}x^3\sqrt[3]{x} + \frac{8}{3}\sqrt[3]{x}$$

2. $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= u - v \\ f^1(x) &= u^1 - v^1 \end{aligned}}$$

a. **Contoh 1:**

$$f(x) = (2x+5) - (3x^2+10)$$

$$f^1(x) = (2) - (6x)$$

b. **Contoh 2:**

$$f(x) = (2x^3 + 5x) - (3x^2 + 4)$$

$$f^1(x) = (6x^2+5) - (6x+4)$$

$$f^1(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

c. **Contoh 3:**

$$f(x) = (2x^3 + 5x^2) - (3x^2 + 4x)$$

$$f^1(x) = (6x^2 + 10x) - (6x + 4)$$

d. **Contoh 4:**

$$f(x) = \left(x^3\sqrt{x} + 6x\right) + \left(x^5 + 2x\sqrt{x}\right)$$

$$f^1(x) = \left(\frac{7}{2}x^2\sqrt{x} + 6\right) + \left(5x^4 + 3\sqrt{x}\right)$$

e. **Contoh 5:**

$$f(x) = \left(x^5\sqrt{x} + 6x^2\right) + \left(2x^5 + 2x^6\sqrt{x}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{11}{2}x^4\sqrt{x} + 12x\right) + \left(10x + 13x^5\sqrt{x}\right)$$

3. $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = u + v \\ f^1(x) = u^1 + v^1 \end{array}}$$

a. **Contoh 1:**

$$f(x) = \left(3x^3 + 10\right) + \left(5x^2 + 6\right)$$

$$f^1(x) = \left(9x^2\right) + \left(10x\right)$$

b. **Contoh 2:**

$$f(x) = \left(2x^5 + 6x\right) + \left(3x^2 + 10x\right)$$

$$f^1(x) = \left(10x^4 + 6\right) + \left(6x + 10\right) = 10x^4 + 6x + 16$$

c. Contoh 3:

$$f(x) = (10x^3 + 3x^2) + (x^4 + 2x)$$
$$f^1(x) = (30x^2 + 6x) + (4x^3 + 2)$$

d. Contoh 4:

$$f(x) = (2x^5 + 4x^2) + (2x + 2x^3)$$
$$f^1(x) = (10x^4 + 8x) + (2 + 6x^2)$$

e. Contoh 5:

$$f(x) = (4x + 2x) + (5x^2 + 3x^2)$$
$$f^1(x) = (6+2) + (\frac{25}{2} x\sqrt{x} + 6x)$$

4. $$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = u.v \\ f^1(x) = u^1v + v^1u \end{array}}$$

a. Contoh 1:

$$f(x) = (2x^5 + 3).(3x^2 + 1)$$
$$f^1(x) = (10x^4)(3x^2 + 1) + (6x)(2x^5 + 3)$$
$$= (30x^6 + 10x^4) + (12x^6 + 18x)$$
$$= 42x^6 + 10x^4 + 18x$$

b. Contoh 2:

$$f(x) = (2x^2 + 5x).(3x^2 + 2x)$$
$$f^1(x) = (4x + 5)(3x^2 + 2x) + (6x + 2)(2x^2 + 5x)$$
$$= (12x^3 + 8x^2 + 15x^2 + 10x) + (12x^3 + 30x^2 + 4x^2 + 10x)$$

c. **Contoh 3:**

$$f(x) = (x^5 + 3x).\ (x^2 + x^4)$$

$$f^1(x) = \left(5x^4 + 3\right)\left(x^2 + x^4\right) + \left(2x + 4x^3\right)\left(x^5 + 3x\right)$$

$$= \left(5x^6 + 5x^8 + 3x^2 + 3x^4\right) + \left(2x^6 + 6x^2 + 4x^8 + 12x^4\right)$$

$$= (9x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 9x^2)$$

d. **Contoh 4:**

$$f(x) = (x^3 + 2).\ (x^2 + 3x)$$

$$f^1(x) = (3x^2)(x^2 + 3x) + \left(2x + 3\ \right)(x^3 + 2)$$

$$= (3x^4 + 9x^3) + \left(2x^4 + 4x + 3x^3 + 6\right)$$

$$= 5x^4 + 12x^3 + 4x + 6$$

5.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{u}{v} \\ f^1(x) = \dfrac{u^1 v - v^1 u}{v^2} \end{array}}$$

a. **Contoh 1:**

$$f(x) = \frac{\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^3 + 2x\right)}$$

$$= \frac{(2x)\left(x^3 + 2x\right) - \left(3x^2 + 2\right)\left(x^2 + 1\right)}{\left(x^3 + 2x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^4 + 4x^2\right) - \left(3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2\right)}{\left(x^3 + 2x\right)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - x^2 - 2}{\left(x^3 + 2x\right)^2}$$

b. Contoh 2:

$$f(x) = \frac{(3x^2 + 5)}{(2x - 1)}$$

$$f^1(x) = \frac{(6x)(2x-1) - (2)(3x^2 + 5)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(12x^2 - 6x) - (6x^2 + 10)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(6x^2 - 6x - 10)}{(2x-1)^2}$$

c. Contoh 3:

$$f(x) = \frac{(5x^2 + 2x)}{(3x^4 - x)}$$

$$f^1(x) = \frac{(10x+2)(3x^4 - x) - (12x^3 - 1)(5x^2 + 2x)}{(3x^4 - x)^2}$$

$$= \frac{(30x^5 - 10x^2 + 6x^4 - 2x) - (60x^5 + 24x^4 - 5x^2 - 2x)}{(3x^4 - x)^2}$$

$$= \frac{(-30x^5 - 20x^4 - 5x^2)}{(3x^4 - x)^2}$$

6. $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= u^n \\ f^1(x) &= n.u^{n-1}.u^1 \end{aligned}}$$

a. Contoh 1:

$$f(x) = \left(3x^2+4\right)^3$$

$$f^1(x) = 3\left(3x^2+4\right)^{3-1}(6x)$$

$$= 18x\ \left(3x^2+4\right)^2$$

b. Contoh 2:

$$f(x)\ = \left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f^1(x) = \frac{1}{2}\left(2x^3+4\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(6x^2\right)$$

$$= 3x^2\left(2x^3+4\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{\left(2x^2+4\right)}}$$

c. Contoh 3:

$$f(x)\ = \sqrt[4]{(3x^3+2x)^3} = (3x^3+2x)^{3/4}$$

$$f^1(x) = \frac{3}{4}\left(3x^3+2x\right)^{-1/4}(9x^2+2)$$

$$= \frac{3}{4}\frac{(9x^2+2)}{\sqrt[4]{(3x^3+2x)^1}}$$

d. Contoh 4:

$$f(x) = \sqrt[3]{(3x^5+2x^3)^2} = (3x^5+2x^3)^{2/3}$$

$$f^1(x) = \frac{2}{3}\left(3x^5+2x^3\right)^{-1/3}(15x^4+6x^2)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(15x^4+6x^2)}{\sqrt[3]{(3x^5+2x^3)^1}}$$

7. $$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)^n \\ f^1(x) &= n\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1}\left(\frac{u^1v - v^1u}{v^2}\right)\end{aligned}}$$

a. Contoh 1:

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$$

$$f^1(x) = 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4\left(\frac{(1)(1+x)-(1)(x)}{(1+x)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4\left(\frac{1+x-x}{(1+x)^2}\right)$$

$$= \frac{5x^4}{(1+x)^6}$$

b. Contoh 2:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{1-x}\right)^3$$

$$f^1(x) = 3\left(\frac{x+2}{1-x}\right)^2 \left(\frac{(1)(1-x)-(-1)(x+2)}{(1-x)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{x+2}{1-x}\right)^2 \left(\frac{1-x+x-2}{(x-1)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{x+2}{1-x}\right)^2 \left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right)$$

c. Contoh 3:

$$f(x) = \left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right)^{1/2}$$

$$f^1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right)^{-1/2} \left(\frac{(3x^2)(x^2+x)-(2x+1)(x^3+2)}{(x^2+x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right)^{-1/2} \left(\frac{(3x^4+3x^3)-(2x^4+4x+x^3+2}{(x^2+x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3+2}{x^2+x}\right)^{-1/2} \left(\frac{x^4+2x^3-4x-2}{(x^2+x)^2}\right)$$

4.1.2 Fungsi Implisit

Menurut Darmawijoyo (1996 : 127–128), diferensial secara implisit caranya adalah diferensialkan variabel x seperti biasa, kemudian diferensialkan variabel y seperti variabel x, tetapi harus dikalikan dengan $\frac{dy}{dx}$.

a. **Contoh 1:**

$$yx + x^2 y + x^3 + 2 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 + 0 = 0$$

$$\left(x + x^2\right)\frac{dy}{dx} = \left(-y - 2xy - 3x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-y - 2xy - 3x^2\right)}{\left(x + x^2\right)}$$

b. **Contoh 2:**

$$x^2 y + y^2 + 3x + 5 = 0$$

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + 3 + 0 = 0$$

$$\left(x^2 + 2y\right)\frac{dy}{dx} = \left(-2xy - 3\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-2xy - 3\right)}{\left(x^2 + 2y\right)}$$

c. Contoh 3 :

$$x^3y^2 + 3x^3y^4 + 2x^2 + 3y^5 + 10 = 0$$

$$3x^2y^2 + 2yx^3\frac{dy}{dx} + 9x^2y^4 + 4y^3 3x^3\frac{dy}{dx} + 4x + 15y^2\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$\left(2yx^3 + 4y^3 3x^3 + 15y^2\right)\frac{dy}{dx} = \left(-3x^2y^2 - 9x^2y^4 - 4x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-3x^2y^2 - 9x^2y^4 - 4x\right)}{\left(2yx^3 + 4y^3 3x^3 + 15y^2\right)}$$

4.1.3 Fungsi Trigonometri

Jika f(x) didefinisikan sebagai suatu fungsi x, dalam pendiferensialan fungsi trigonometri sama halnya dengan cara fungsi aljabar yang dalam hal ini hanya tergantung pada fungsinya. $y = f(x)$, sedangkan $\frac{dy}{dx} = f^1(x)$.

Tabel 4.1. Koefisien Diferensial Baku

No	*y = f(x)*	$\frac{dy}{dx} = f^1(x)$
1	*sin x*	*cos x*
2	*cos x*	*-sin x*
3	*tg x*	*sec*^{2} *x*
4	*ctg x*	*-cosec*^{2} *x*
5	*sec x*	*sec x tg x*
6	*Cosec x*	*-cosec x ctg x*

Sumber : (Stroud, 1991 : 220)

4.1.3.1 Fungsi dari suatu fungsi :

Sin x adalah fungsi x karena harga sin x bergantung pada sudut x. Begitu juga dengan $sin\ (2x+5)$ adalah fungsi sudut dari $(2x+5)$ karena $sin\ (2x+5)$ adalah fungsi dari $(2x+5)$. Namun, $(2x+5)$ itu sendiri merupakan fungsi x karena harganya bergantung pada x, yaitu $(2x+5)$ adalah fungsi dari x.

Jika kedua pernyataan ini kita gabungkan, dapat dikatakan bahwa: $sin\ (2x+5)$ adalah fungsi dari $(2x+5)$ dan $sin\ (2x+5)$ adalah fungsi dari fungsi x

Jadi, $sin\ (2x+5)$ adalah fungsi dari fungsi x dan secara umum ungkapan ini sering dikatakan sebagai fungsi dari sesuatu fungsi. Sering kali kita membutuhkan koefisien diferensial fungsi dari fungsi seperti ini. Oleh karena itu, kita dapat memperolehnya dengan menggunakan prinsip pertama.

Contoh :

Diferensialkanlah $y = cos\ (5x+4)$ terhadap x

Misalkan $u = (5x - 4)$

Jadi:

$$y = \cos u$$

$$\frac{dy}{du} = -\sin u$$

$$= -\sin (5x-4)$$

Namun, ini adalah $\frac{dy}{du}$, bukan $\frac{dy}{dx}$. Oleh karena itu, untuk mengubahnya menjadi koefisien yang kita kehendaki, gunakan hubungan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ x\ \frac{du}{dx}$. Untuk memperoleh $\frac{du}{dx}$ (yang kita cari), kita kalikan $\frac{dy}{du}$, yang kita dapatkan dengan $\frac{du}{dx}$; $\frac{du}{dx}$ yang diperoleh dari hubungan substitusi:

$$u = (5x - 4)$$

$$\frac{du}{dx} = 5$$

jadi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \, x \, \frac{du}{dx}$$
$$= -\sin(5x - 4) \;\; 5$$
$$= -5\sin(5x - 4)$$

contoh yang lain :

$$y \; = \; tan \; (2x^2 - \; 3)$$

misalnya : $u \; = \; (2x^2 - \; 3)$

$$\frac{dy}{du} = \sec^2 u = \sec^2 (2x^2 - 3)$$

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \, x \, \frac{du}{dx}$$
$$= \sec^2 (2x^2 - 3)(4x) = 4x \sec^2 (2x^2 - 3)$$

Berikut ini diberikan beberapa contoh cara penyelesaian Diferensial Fungsi Trigonometri.

1. $y = sin\ 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 2x\left(2\right) = 2\cos 2x$$

2. $y = cos\ 5x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x\left(5\right) = -5\sin 5x$$

3. $y = \tan\left(3x^2 - 1\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\left(3x^2 - 1\right)\left(6\right) = 6x\sec^2\left(3x^2 - 1\right)$$

4. $y = cos\ x^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x^2\left(2x\right) = -2x\sin x^2$$

5. $y = cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x\left(-\sin x\right) = -2\sin x\cos x$$

6. $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} \approx \dfrac{u}{v}$

$$y^1 = \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\left(x\right)\ \cos\left(x\right) - \sin\left(x\right)\left(-\sin\left(x\right)\right)}{\left(\cos x\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\left(x\right) + \sin^2\left(x\right)}{\cos^2\left(x\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(x\right)} = \sec^2\left(x\right)$$

7. $y = \left(3\ sin\ x\right) - \left(2\ cos\ x\right)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x - \left(-2\sin x\right) = 3\cos x + 2\sin x$$

8. $y=\left(x^3\right)\ (sin\ 3x)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3x^2\right)(\sin 3x)+(3\cos 3x)\left(x^3\right)=3x^2\ (x\cos 3x+\sin 3x)$$

9. $y\ =\dfrac{(\sin 3x)}{(x+1)}\approx\dfrac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3\cos 3x)(x+1)-(1)(\sin 3x)}{(x+1)^2}$$

10. $y\ =\dfrac{(\cos 2x)}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-2\sin 2x)\left(x^2\right)-(2x)(\cos 2x)}{\left(x^2\right)^2}$$

4.1.4. Fungsi Logaritma dan Eksponen

Tabel 4.2 Koefisien Diferensial Baku

No	$y = f(x)$	$\dfrac{dy}{dx}=f^1(x)$
1	e^x	e^x
2	e^{kx}	$k.e^{kx}$
3	a^x	$a^x\ ln\ \ a$
4	$In\ \ x$	$\dfrac{1}{x}$
5	$Log\ \ a(x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

Sumber : (Stroud, 1991 : 220)

Berikut ini diberikan beberapa contoh cara penyelesaian diferensial fungsi logaritma dan eksponen:

1. $y = ex$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \left(1\right) = e^x$$

2. $y = 2e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{3x} \left(3\right) = 6e^{3x}$$

3. $y = ln\ x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

4. $y = a^x$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

5. $y = log\, a\ x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

6. $y = e^{(3-x)}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3-x)} \left(-1\right) = -e^{(3-x)}$$

7. $y = \left(e^{2x}\right)\ (ln\ 5x)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(e^{2x}2\right)(\ln 5x) + \left(\frac{1}{5x}5\right)\left(e^{2x}\right)$$

$$= \left(2e^{2x}\right)(\ln 5x) + \left(\frac{5}{5x}\right)\left(e^{2x}\right)$$

$$= \left(2e^{2x}\right)(\ln 5x) + \left(\frac{1}{x}\right)\left(e^{2x}\right)$$

$$= e^{2x}\left(\frac{1}{x} + 2\ln 5x\right)$$

8. $y = \left(e^{5x}\right)(3x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \left(5e^{5x}\right)(3x+1) + 3\left(e^{5x}\right) = e^{5x}\,(3+15x+5) = e^{5x}\,(8+15x)$$

9. $$y = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}$$

$$\ln y = \ln\left(x^2\right) + \ln(\sin x) - \ln(\cos 2x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}(2x) + \frac{1}{\sin x}(\cos x) - \frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x)$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$= \frac{2}{x} + ctg\ x + 2tg\ 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}\left\{\frac{2}{x} + ctg\ x + 2tg\ 2x\right\}$$

10. $y = \ln \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin 3x} 3 \cos 3x$$

$$= \frac{3 \cos 3x}{\sin 3x}$$

$$= 3\, ctg\, 3x$$

LATIHAN SOAL-SOAL:

Tentukanlah Diferensial dari fungsi-fungsi berikut :

1. Diferensial fungsi aljabar

a. $f(x) = x^2 + 2x + 6$

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

c. $f(x) = (x^3 + 5)(2x + 1)$

d. $f(x) = (x^2 - 1) + (3x^2 + 10)$

e. $f(x) = (4x^5 + 10) - (3x^3 + 2x)$

f. $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)}{(2x - 5)}$

g. $f(x) = \left(\dfrac{(x^2 + 1)}{(x^2 + 3)} \right)^5$

h. $f(x) = \left(\dfrac{(x + 8)}{(x - 1)} \right)^{1/2}$

i. $f(x) = x\sqrt{x + \frac{4}{x}} + \frac{10}{x^2}$

j. $f(x) = (3x^4 + 1).(5x^3 + 2x^2)$

2. Diferensial fungsi trigonometri

a. $f(x) = cos\ 5x$

b. $f(x) = cos\ 3x + sin\ 7x$

c. $f(x) = sin^2 2x$

d. $f(x) = \frac{(1 + \cos x)}{(2x + \sin x)}$

e. $f(x) = \cos\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

f. $f(x) = (x^2)(cos\ 5x)$

g. $f(x) = \sin\sqrt{(x^2 - 1)}$

h. $f(x) = (5\ cos\ 2x) + (sin\ 3x^2 + 1)$

i. $f(x) = (2\ cos^2 x + 1) - (sin^2 x + 3\ x)$

j. $f(x) = (tg\ 3x).(sin\ x^2)$

k. $f(x) = (tg\ 3x).(sin\ x^2)$

l. $f(x) = (sec\ x + 2) + (ctg\, 3x^2)$

m. $f(x) = (cos\ 3x).(sin\ 2x^2)$

3. Diferensial Fungsi Implisit

a. $x^3y^2 + xy + 2x + y^2 + 5 = 0$

b. $x^2y + xy^2 + 5x + 10 = 0$

c. $x^4y + 5xy^3 + 10xy + x^2y^2 + 5x^3 + 8y^2 + 10 = 0$

d. $2x^4y^3 + 5x^2y^3 + 13xy + x^2y^5 + 5x^2 + 8y^4 + 20 = 0$

e. $3x^4y + 15x^2y^6 + 10x^2y^3 + x^2y^2 + 5x^3 + 8y^2 + 7 = 0$

f. $2x^4y + 3x^2y^3 + 10xy + 2x^2y^2 + 8x^3 + 10y^2 + 1 = 0$

g. $x^4y^2 + 2xy^3 + 4x^2y + x^2y^7 + 5x^3y + 8y^2 + 10 = 0$

h. $5x^4y + 5xy^3 + 10xy + x^2y^2 + 5x^3 + 8y^2 + 10 = 0$

i. $3x^4y^2 + 2x^2y^3 + 10xy + x^2y^2 + 5x^3 + 8y^2 + 10 = 0$

j. $x^4y + 5xy^3 + 3xy + 4x^2y^2 + 2x^3 + y^2 + 10 = 0$

4. Diferensial Fungsi Logaritma dan Eksponen

a. $y = 2e^{8x}$

b. $y = (2x)\ ln\ (3x)$

c. $y = ln\ 5x$

d. $y = \dfrac{(x^3)(\sin 2x)}{(\cos 5x)}$

e. $y = ln\ cos\ 10x$

f. $y = (e^{3x})\ (ln\ 3x)$

g. $f(x) = (ln\ x^3 + 1) + (2\ e^{2x} + x^2)$

h. $f(x) = (ln\ x^2) - (\ ln\ x\ )$

i. $f(x) = (e^{3x} + 1\ ).(ln^{x2} + 5)$

j. $f(x)=\left(e^{3x}+1\right).\left(ln^{x2}+5\right)$

k. $f(x)=\left(\cos x^2+1\right).\left(ln^{x2}+2x\right)$

l. $f(x)=\left(\sin 3x+2\right)+\left(e^{5x}+1\right)$

m. $f(x)=\left(\ln x^3\right).\left(\cos x^2\right)$

BAB V
PENERAPAN DIFERENSIAL

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan dengan mempelajari persamaan garis lurus dan garis singgung, mahasiswa mengetahui bagaimana penerapan diferensial yang sudah dipelajari dalam bab sebelumnya. Dalam bab ini juga dijelaskan penggunaan fungsi implisit dalam menentukan gradien garis sehingga dari gradien yang didapat, bisa menentukan persamaan garis lurus, persamaan garis singgung, dan garis normal.

5.1 PERSAMAAN GARIS LURUS (STROUD, 1994 : 244)

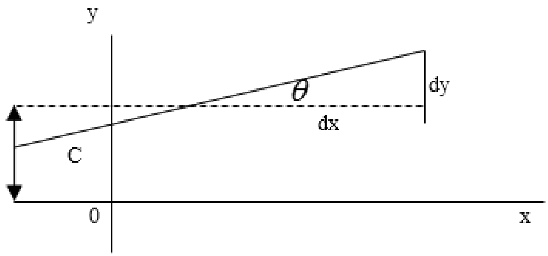
Persamaan dasar suatu garis lurus adalah:

$$y = mx + c$$

Dengan m = kemiringan (slope)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \text{kemiringan}$$

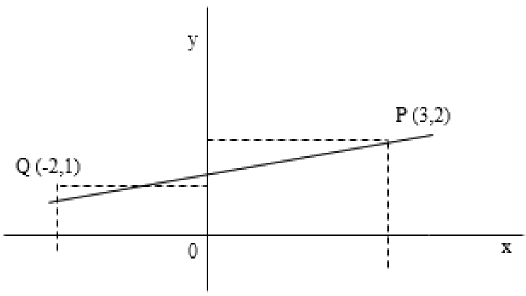
C = Perpotongan dengan sumbu y riil



Perhatikan bahwa jika skala x dan y identik maka $\frac{dy}{dx} = tg\ \theta$

Contoh :

Untuk menentukan persamaan garis yang melalui titik P (3,2) dan titik Q (-2,1), kita dapat mencarinya dengan cara berikut:



$$Y = mx + c$$
$$2 = 3m + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

$$Y = mx + c$$
$$1 = -2x + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

Eliminasi (1) dan (2)

$$2 = 3\ m + c$$
$$1 = -2m + c$$
$$1 = 5\ m$$
$$m = \frac{1}{5}$$

Dari persamaan (1)

$$2 = 3m + c$$
$$2 = 3.\frac{1}{5} + c$$
$$c = \frac{1}{5}$$

Jadi, persamaan garis menjadi

$$y = mx + c$$
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$

Atau bisa dijadikan pengali 5

$$5y = x + 7$$

Kadang-kadang diberikan harga kemiringan m garis yang melalui sebuah titik (x_1,y_1) tertentu dan harus dicari persamaan garisnya. Dalam hal ini, lebih baik menggunakan bentuk : $Y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$, contoh persamaan garis yang melalui titik (5,3) dengan kemiringan $\frac{1}{2}$ adalah:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m\left(x - x_1\right) \\
y - 3 &= \frac{1}{2}\left(x - 5\right) \\
y - 3 &= \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \\
y &= \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + 3 \\
y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Sama dengan cara di atas maka dapat ditentukan persamaan garis yang lain yang juga melalui titik P dan $\perp$ pada garis yang baru saja dicari dengan menggunakan cara sebagai syarat $\perp$, bahwa $m_1 . m_2 = -1$.

5.2 GARIS SINGGUNG DAN GARIS NORMAL SUATU KURVA DI SEBUAH TITIK TERTENTU (STROUD, 1994 : 249)

Kemiringan kurva $y = f\left(x\right)$ di sebuah titik P pada kurva ditentukan oleh kemiringan garis singgungnya di titik P. Kemiringan ini juga diberikan oleh harga $\frac{dy}{dx}$ di titik P yang dapat dihitung bila persamaan kurvanya diketahui. Jadi, dapat dihitung kemiringan garis singgung suatu kurva dititik P. Diketahui bahwa garis singgung tersebut melalui titik P, yaitu bila $x = x_1$ dan $y = y_1$.

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1$ di titik P (1,2).

Penyelesaian:

$$y = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 6x - 2$$

$$m = \left\{\frac{dy}{dx}\right\}_{x=1} = 8(1)^3 + 6(1) - 2 = 12$$

$$m = 12$$

Jadi, persamaan garis singgungnya sebagai berikut:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = 12\ (x - 1)$$

$$y = 12x - 10$$

Jika diperlukan, dapat juga dicari persamaan garis normal di titik P yang didefinisikan sebagai garis yang melalui titik P dan tegak lurus kepada garis singgung di P. Untuk penyelesaiaan contoh di atas, dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$m = 12$$

$$m.m_1 = -1$$

$$m_1 = \frac{-1}{12}$$

Jadi, persamaan garis normal

$$y - y_1 = m_1\left(x - x_1\right)$$

$$y - 2 \quad = -\frac{1}{12}\left(x - 1\right)$$

$$y \quad = -\frac{1}{12}x + \frac{1}{12} + 2$$

atau

$$12y = -x + 25$$

Persamaan kurva boleh juga dinyatakan dalam bentuk fungsi implisit ataupun pasangan persamaan parametrik.

Contoh Soal (Stroud, 1994 : 251):

Tentukan persamaan garis singgung dari kurva :

$x^2 + y^2 + 3xy - 11 = 0$ di titik P (1,2).

Penyelesaian:

$$x^2 + y^2 + 3xy - 11 = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 3y + 3x\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(2y + 3x\right)\frac{dy}{dx} = -2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-2x - 3y\right)}{\left(2y - 3x\right)}$$

Masukkan koordinat titik P (1,2) yang berarti bahwa $x = 1$ dan $y = 2$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1,y=1} = \frac{(-2x-3y)}{2y+3x}$$

$$= \frac{(-2(1)-3(2))}{(2(2)+3(1))}$$

$$= \frac{-8}{7}$$

Jadi, persamaan garis singgung:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-8}{7}(x-1)$$

$$y - 2 = -\frac{8}{7}x + \frac{8}{7}$$

$$y = -\frac{8}{7}x + \frac{22}{7}$$

atau

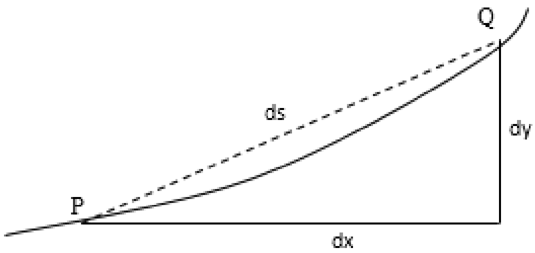
$$7y = -8x + 22$$

$$7y + 8x = 22$$

5.3 JARI-JARI KELENGKUNGAN (STROUD, 1994 : 258)

Dalam praktiknya, kelengkungan sering kali ditunjukkan melalui jari-jari kelengkungan R. Tinjaulah kembali ke 2 titik P dan Q karena ds sangat kecil, hanya sedikit saja perbedaan antara busur PQ dengan tali busur PQ atau antara arah tali busur dengan arah garis singgung.

Jadi, jika $ds \to 0$



$$\frac{dy}{dx} = tg\ \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos\theta$$

Sekarang, didiferensialkan $\frac{dy}{dx}$ terhadap s

Maka :

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{d}{ds}\{tg\ \theta\}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{d}{ds} = \frac{d}{d\theta}\{tg\ \theta\}\frac{d\theta}{ds}$$

jadi

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cos\theta = \sec^2\ \theta\ \frac{d\theta}{ds}$$

$$\sec^3\ \theta\ \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

tetapi

$$\sec^3\theta = \left(\sec^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1+tg^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$$

jadi

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2s}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$R = \frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

Dengan mengetahui persamaan kurva $y = f(x)$, dapat dihitung koefisien diferensial pertama dan kedua di titik P, substitusi kedua harga ini dalam rumus di atas untuk memberikan harga R.

a. Contoh Soal (Stroud, 1994 : 259):

Tentukan jari-jari kelengkungan hiperbola $xy = 4$ di titik $x = 2$ dan $y = 2$.

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan perhitungan harga R, langkah pertama yang harus dikerjakan lebih dahulu adalah mendiferensialkan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik (2,2).

$$xy = 4$$
$$y = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2} = \frac{-4}{2^2} = \frac{-4}{4} = -1$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3} = \frac{8}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$$

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$R = \frac{\left\{1 + (-1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{(1)}$$

$$R = (2)^{\frac{3}{2}}$$
$$R = 2\sqrt{2}$$
$$R = 2,828$$

b. Contoh Soal (Stroud, 1994 : 259):

Tentukanlah jari-jari kelengkungan dari kurva $y = x + 3x^2 - x^3$ di $x = 0$.

Penyelesaian :

$y = x + 3x^2 - x^3$, di $x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 6x - 3x^2$$
$$= 1 + 6.0 - 3.0^2$$
$$= 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6 - 6x$$
$$= 6 - 6.0$$
$$= 6$$

$$R = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$
$$= \frac{\left\{1 + (1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{6}$$
$$= \frac{(2)^{\frac{3}{2}}}{6}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{6}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{2}$$
$$= 0,471$$

SOAL-SOAL LATIHAN :

1. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A (3,4) dan titik B (-2,-3) dan gambarkan persamaan garis tersebut!
2. Tentukanlah jari-jari kelengkungan kurva $y = \dfrac{(11-4x)}{(3-x)}$ di titik (2,3)!
3. Tentukanlah persamaan garis singgung dan garis normal kurva $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ di titik (2,5)!
4. Tentukan jari-jari kelengkungan hiperbola $xy = 10$. di titik $x = 1,\ y = 3$!
5. Tentukanlah jari-jari kelengkungan kurva $y = \dfrac{(1-2x)}{(3-x)}$ di titik (2,5)!

BAB VI

INTEGRAL DAN TEKNIK PENGINTEGRALAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa bisa memahami dan mengerti tentang integral, misalnya integral dengan substitusi, integral fungsi trigonometri, integral fungsi eksponen, integral parsial, dan integral fungsi rasional; serta dapat menyesaikan soal-soal yang ada.

6.1 PENGERTIAN

Integral disebut sebagai ‘antiturunan’ atau kebalikan dari diferensial. Apabila dalam diferensial pangkat dari variabel x berkurang satu, akan membuat integral pangkat dari variabel x bertambah satu. Dalam operasi matematika ada dua macam operasi yang saling berlawanan, operasi yang demikian merupakan operasi balikan (inversi). Dalam operasi balikan, misalnya pengurangan dan penambahan; perkalian dan pembagian; pemangkatan dan penarikan akar; serta penarikan logaritma dan perhitungan logaritma.

6.1.1 Macam-macam integral

Dalam menyelesaikan suatu fungsi integral, perlu diketahui bahwa ada beberapa macam fungsi yang dapat dikelompokkan, yaitu:

a. Integral tak tentu,
b. Integral parsial,
c. Integral fungsi rasional,
d. Integral fungsi trigonometri,
e. Integral logaritma dan eksponen, dan
f. Integral dengan substitusi.

6.2 RUMUS-RUMUS DASAR INTEGRAL (STROUD, 1994:220)

a. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} X^{n+1} + C$

b. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

c. $\int e^x dx = e^x + C$

d. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

e. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

f. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

g. $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$

h. $\int tg\ x\ dx = -\ln|\cos x| + C$

i. $\int ctg\ x\ dx = \ln|\sin x| + C$

j. $\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + tg\ x| + C$

k. $\int \cos ec\ x\ dx = \ln|\cos ec\ x + ctg\ x| + C$

l. $\int \sec^2 x\ dx = tg\ x + C$

m. $\int \cos ec^2 x\ dx = -ctg\ x + C$

n. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

o. $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$

p. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x + C$

q. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ h + C$

r. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2} - 1} = \arccos h + C$

s. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2} - 1} = \arcsin h + C$

Selanjutnya, akan dilihat contoh-contoh penyelesaian integral dari masing-masing fungsi, seperti yang dijelaskan sebelumnya.

6.3 INTEGRAL TAK TENTU (WARDIMAN, 1986:5)

a. Contoh dan penyelesaian

1. $$\int x^6 dx = \frac{1}{6+1} x^{6+1} + c$$
$$= \frac{1}{7} x^7 + c$$

2. $$\int 2x^5 dx = 2\int x^5 dx = 2\frac{1}{5+1} x^{5+1} + C$$
$$= \frac{2}{6} x^6 + C$$

3. $$\int \sqrt{xdx} = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{-1}{3+1}} + C$$
$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

4. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{\frac{-2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{-2}{3}+1} x^{\frac{-2}{3+1}} + C$$
$$= 3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

5. $$\int (x+2)^2 dx = \int \left(x^2 + 4x + 4\right) dx$$
$$= \int x^2 dx + \int 4x\, dx + \int 4dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 4x + C$$

6. $\int (1+x)\sqrt{x dx} = \int \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x}\right)$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{3}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{2}{5} x^2\sqrt{x} + C$$

7. $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 4}{x^2} dx = \int x\, dx + \int 5\, dx + \int 4x^{-2} dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C$$

8. $\int x^{23}\sqrt{x\, dx} = \int x^{\frac{7}{3}} dx$

$$= \frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{10} \sqrt[3]{x^{10}} + C$$

$$= \frac{3}{10} x^{3}\sqrt[3]{x} + C$$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \int x^{\frac{-3}{5}} dx$

$$= \frac{1}{\frac{-3}{5}+1} X^{\frac{-3}{5+1}} + C$$

$$= \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{2} \sqrt[5]{x^2} + C$$

10. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$

6.4 INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI (WARDIMAN, 1986:7-9)

a. Contoh-contoh :

1. $\int \left(x^3 + 2\right)^2 .3x^2 dx$

   Untuk mempermudah penyelesaian maka dimisalkan bilangan yang pangkatnya lebih tinggi.

   Misalnya: $x^3 + 2 = u$

   $3x^2 dx = du$

$$\int u^2 du = \frac{1}{2+1} u^{2+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} \left(x^3 + 2\right)^3 + C$$

2. $\int \sqrt{\left(x^3+2\right)}.x^2 dx$

Misalnya: $x^3+2=u$

$3x^2 dx = du$

$x^2 dx = \dfrac{du}{3} = \dfrac{1}{3} du$

$$\int \sqrt{\left(x^3+2\right)}.x^2 dx = \int u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}\left(x^2+2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

3. $\displaystyle\int \frac{X^2 dx}{\sqrt[4]{\left(x^3+2\right)}} = \int \left(x^3+2\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x^2 dx$

Misalnya: $x^3+2=u$

$3x^2 dx = du$

$x^2 dx = \dfrac{du}{3}$

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3}\int u^{\frac{-1}{4}} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{-1}{4}+1} u^{\frac{-1}{4}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} u^{\frac{3}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{9}\left(x^3 + 2\right)^{\frac{3}{4}} + C$$

4. $$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+6x\right)}} = \int (x+3)\cdot\left(x^2+6x\right)^{\frac{-1}{3}} dx$$

Misalnya: $x^2 + 6x = u$

$(2x+6)\,dx = du$

$(x+3)\,dx = \dfrac{du}{2}$

$$\int \frac{du}{2}\cdot u^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{3}} du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{-1}{3}+1} u^{\frac{-1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2 + 6x\right)^{\frac{2}{3}} + C$$

5. $\int \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)} =$

Misalnya: $x^2 - 1 = u$

$2x\ dx = du$

$x\ dx = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{du}{2} \cdot u^{-1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \ln u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + 1\right) + C$$

6.5 INTEGRAL PARSIAL (WARDIMAN, 1986:30-31)

Suatu bentuk integral yang sering timbul, ialah suatu integral yang merupakan hasil ganda dari suatu fungsi x dengan diferensial dari fungsi x yang lain. Andaikan u dan v adalah fungsi dari x maka dicari hasil dari bentuk:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

Agar dapat menggunakan rumus ini, bentuk dari integral yang diketahui harus dibuat menjadi dua bagian yang mana satu bagian sesuai dengan u dan bagian yang lain bersama-sama dengan d*x* sesuai *dv*. Untuk lebih jelasnya, diambil beberapa contoh soal, yaitu:

1. $\int x \cos 2x \, dx$

Misalnya: $u = \cos 2x$

$$du = -2 \sin 2x \, dx$$
$$dv = x \, dx$$
$$v = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\int x \cos 2x \, dx = u \cdot v - \int v du = (\cos 2x)\left(\frac{1}{2} x^2\right) - \int \frac{1}{2} x^2 (-2 \sin 2x) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x^2 \sin 2x \, dx$$

Dapat juga dipilih cara lain:

Misalnya: $u = x$

$$du = dx$$
$$dv = \cos 2x \, dx$$
$$v = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\int x \cos 2x \, dx = u \cdot v - \int v du = x\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) - \int \frac{1}{2} \sin 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

2. $\int x \cdot e^x dx =$

Misalnya: $u = x$

$$du = dx$$
$$dv = e^x dx$$
$$v = \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int xe^x dx = u \cdot v - \int v du = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$
$$= e^x (x-1) + C$$

3. $\int x^2 . \ln x \, dx =$

Misalnya: $u = \ln x$

$$du = \frac{1}{x} dx$$
$$dv = x^2 \, dx$$
$$v = \int x^2 . dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = u \cdot v - \int v du$$
$$= \ln x \left(\frac{1}{3} x^x \right) - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

6.6 INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Menurut Wardiman (1986:630-64), dalam menyelesaikan integral fungsi rasional ada cara yang dapat digunakan agar penyelesaian tersebut dapat dengan mudah diselesaikan. Caranya adalah pada bagian kiri identik dengan bagian kanan, berarti koefisien-koefisien dari x yang berpangkat sama dari kedua bagian tersebut harus sama.

1. **Contoh 1:**

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx =$$

dalam hal ini, $x3-7x+6$ diuraikan dalam bentuk faktor:

$$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx = \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+30)}$$

ℵ ℵℵℵ 2)(3) (1)(3) (1)(2)

maka persamaan menjadi :

$$2x+1=A(x-2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-2)$$

dalam hal ini, harga-harga x adalah $x=1,\ x=2,\ x=-3.$

Untuk $x = 1$

$$2x+1=A(x-2)(x+3)$$

$$2.1+1=A(1-2)(1+3)$$

$$3=A(-1)(4)$$

$$3 = -4A$$

$$A=\frac{-3}{4}$$

Untuk $x = 2$

$$2x+1=B(x-1)(x+3)$$

üüüü $= B(\quad)(\ +\ )$

$$5=B(1)(5)$$

$$5=5B$$

$$B=1$$

Untuk $x = 3$

$$2x+1 = C(x-1)(x-2\ )$$
$$2(-3)+1 = C(-3-1)(-3-2)$$
$$-5 = C(-4)(-5)$$
$$-5 = 20C$$
$$C = \frac{-1}{4}$$

Maka persamaan menjadi :

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx = \int \frac{A}{(x-1)}\,dx + \int \frac{B}{(x-2)}\,dx + \int \frac{C}{(x-3)}\,dx$$
$$= \int \frac{\frac{-3}{4}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{(x+3)}\,dx$$
$$= \frac{-3}{4}\int \frac{dx}{(x-1)} + 1\int \frac{dx}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-3)}$$
$$= \frac{-3}{4}\ln(x-1) + \ln(x-2) - \frac{1}{4}\ln(x+3) + C$$

2. Contoh 2:

$$\int \frac{(2x+3)}{(x^3-6x^2+11x-6)}\,dx =$$

dalam hal ini, $(x^3-6x^2+11x-6)$ diuraikan dalam bentuk faktor:

$$x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\int \frac{2x+3}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$
$$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

maka persamaan menjadi :

$$2x+3=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

dalam hal ini harga-harga x adalah $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Untuk mencari nilai A, diketahui nilai $x = 1$

$$\begin{aligned} 2x+3 &= A(x-2)(x-3) \\ 2.1+3 &= A(1-2)(1-3) \\ 5 &= A(-1)(-2) \\ 5 &= 2A \\ A &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai B, diketahui bahwa nilai $x = 2$

$$\begin{aligned} 2x+3 &= B(x-1)(x-3) \\ 2.2+3 &= B(2-1)(2-3) \\ 7 &= B(1)(-1) \\ 7 &= -B \\ B &= -7 \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai C, diketahui bahwa $x = 3$

$$\begin{aligned} 2x+3 &= C(x-1)(x-2) \\ 2(3)+3 &= C(3-1)(3-2) \\ 9 &= C(2)(1)9 = 2C \\ C &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Maka persamaan menjadi :

$$\int \frac{2x+3}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx = \int \frac{A}{(x-1)}\,dx + \int \frac{B}{(x-2)}\,dx + \int \frac{C}{(x-3)}\,dx$$
$$= \int \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{-7}{(x-2)}\,dx + \int \frac{\frac{9}{2}}{(x-3)}\,dx$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)} - 7\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x-3)}$$
$$= \frac{5}{2}\ln(x-1) - 7\ln(x-2) + \frac{9}{2}\ln(x-3) + C$$

3. Contoh 3:

$$\int \frac{(3x+2)}{(x^3+9x^2+26x+24)}\,dx =$$

dalam hal ini, $(x^3+9x^2+26x+24)$ diuraikan dalam bentuk faktor:

$$x^3+9x^2+26x+24 = (x+2)(x+3)(x+4)$$

$$\int \frac{3x+2}{x^3+9x^2+26x+24}\,dx = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} + \frac{C}{(x+4)}$$
$$= A(x+3)(x+4) + B(x+2)$$
$$(\quad 4) \quad (\quad 2)(\quad 3)$$

maka persamaan menjadi :

$$3x+2 = A(x+3)(x+4) + B(x+2)(x+4) + C(x+2)(x+3)$$

dalam hal ini harga-harga x adalah

$$x=-2,\ x=-3,\ x=-4$$

Untuk mencari nilai A, diketahui nilai $x = -2$

$$
\begin{aligned}
3(-2) + 2 &= A(-2+3)(-2+4) \\
-6 + 2 &= A(1)(2) \\
-4 &= 2A \\
A &= \frac{-4}{2} = -2
\end{aligned}
$$

Untuk mencari nilai B, diketahui bahwa nilai $x = -3$

$$
\begin{aligned}
3x + 2 &= B(x+2)(x+4) \\
3(-3) + 2 &= B(-3+2)(-3+4) \\
-9 + 2 &= B(-1)(1) \\
-7 &= -B \\
B &= 7
\end{aligned}
$$

Untuk mencari nilai C, diketahui bahwa $x = -4$

$$
\begin{aligned}
3x + 2 &= C(x+2)(x+3) \\
3(-4) + 2 &= C(-4+2)(-4+3) \\
-12 + 2 &= C(-2)(-1) \\
-10 &= 2C \\
C &= \frac{-10}{2} = -5
\end{aligned}
$$

Maka persamaan menjadi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{x^3+9x^2+26x+24}\,dx &= \int \frac{A}{(x+2)}\,dx + \int \frac{B}{(x+3)}\,dx + \int \frac{C}{(x+4)}\,dx \\
&= \int \frac{-2}{(x+2)}\,dx + \int \frac{7}{(x+3)}\,dx + \int \frac{-5}{(x+4)}\,dx \\
&= -2\int \frac{dx}{(x+2)} + 7\int \frac{dx}{(x+3)} - 5\int \frac{dx}{(x+4)} \\
&= -2\ln(x+2) + 7\ln(x+3) - 5\ln(x+4) + C
\end{aligned}
$$

6.7 INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI (WARDIMAN, 1986: 40-41)

Beberapa contoh penyelesaian integral fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\int \sin \frac{1}{2} x dx =$

   Misalnya: $\frac{1}{2} x = u$

   $$\frac{1}{2} dx = du$$

   $$dx = 2\ du$$

   $$\begin{aligned}\int \sin \frac{1}{2} x dx &= \int \sin u \left(2\ du\right) \\ &= \int \sin u\ du \\ &= -2 \cos u + C \\ &= -2 \cos \frac{1}{2} x + C\end{aligned}$$

2. $\int \cos 4x\ dx =$

   Misalnya: $4x \ = u$

   $$4dx = du$$

   $$dx = \frac{du}{4}$$

   $$\begin{aligned}\int \cos 4x\ dx &= \int \cos u\ \frac{du}{4} \\ &= \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin x + C\end{aligned}$$

3. $\int \cos^2 2x \sin 2x \, dx$

Misalnya: $\cos 2x = u$

$-2 \sin 2x \, dx = du$

$\sin 2x \, dx = \dfrac{-du}{2}$

$$\int \cos^2 2x \sin 2x \, dx = \int u^2 \left(-\frac{du}{2}\right)$$
$$= \frac{-1}{2}\int u^2 du$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2+1}u^{2+1} + C$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3 + C$$
$$= \frac{1}{6}u^3 + C$$
$$= \frac{1}{6}\left(\cos^3 2x\right) + C$$

4. $\int \sin^2 xdx =$

Untuk mengintegrasikan sin2 x dan cos2 x, dapat dinyatakan fungsi tersebut dalam cosinus sudut rangkap.

$cos\, 2x = 1 - 2\, sin2\, x$

Jadi, $sin2\, x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$cos\, 2x = 2\, cos2\, x - 1$

Jadi, $\cos 2x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos u\, du$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

5. $$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\, dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x - \sin^4 x\right) d\,(\sin x)$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

6. $$\int \cos^4 x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

6.8 INTEGRAL FUNGSI LOGARITMA DAN EKSPONEN (WARDIMAN, 1986:40-41)

Beberapa contoh penyelesaian integral fungsi logaritma dan eksponen berikut ini:

a. $\int e^x dx = e^x + C$

b. $\int 6e^{3x} dx = 6\int e^{3x} dx$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$= 2e^{3x} + C$$

c. $\int 10^x dx = \dfrac{10^x}{\ln 10} + C$

d. $\int a^{4x} dx = \dfrac{1\, a^{4x}}{4 \ln a} + C$

e. $\int e^{4x} dx = \dfrac{1}{4} e^{4x} + C$

SOAL-SOAL LATIHAN:

Selesaikan integral-integral berikut ini!

1. $\int x^4 dx$
2. $\int \dfrac{dx}{x^2}$
3. $\int \sqrt[3]{x^2}\ dx$
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$

5. $\int \frac{\left(4x^2 - 2\sqrt{x}\right)}{x}\, dx$

6. $\int \frac{dx}{\left(2+3x\right)}$

7. $\int \frac{x\, dx}{\left(x^2 - 1\right)}$

8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(x^3 + 5\right)^2}}$

9. $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^3 + 1\right)^4}$

10. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{\left(x^2 - 1\right)}}$

11. $\int e^{2x} dx$

12. $\int 3e^{5x} dx$

13. $\int 2^x dx$

14. $\int e^{\frac{-1}{2^x}}\, dx$

15. $\int \cos 10x\, dx$

16. $\int \sin 7x\, dx$

17. $\int \cos^2 x\, dx$

18. $\int \sin^2 \left(3x\right) dx$

19. $\int tg\; 2x\, dx$

20. $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

21. $\int \cos^2 x \sin x \, dx$

22. $\int x^2 e^{3x} dx$

23. $\int x^3 \ln x \, dx$

24. $\int \arcsin x \, dx$

25. $\int arctg \, x \, dx$

26. $\int \frac{(2x+5)\, dx}{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}$

27. $\int \frac{(3x+16)\, dx}{(x^3 + 9x^2 + 26x + 24)}$

28. $\int \frac{(5x+10)\, dx}{(x^3 + 12x^2 + 47x + 60)}$

29. $\int \sin^5 x \, dx$

30. $\int \sin^2 x \, dx$

31. $\int (\sin^2 x + \cos^2 \,)dx$

32. $\int (\sin 3x + \cos 2x \,)dx$

33. $\int \frac{2x+3 \, dx}{(x^3 + 7x^2 + 12x \,)}$

34. $\int \frac{2x+3 \, dx}{(x^3 + 13x^2 + 42x \,)}$

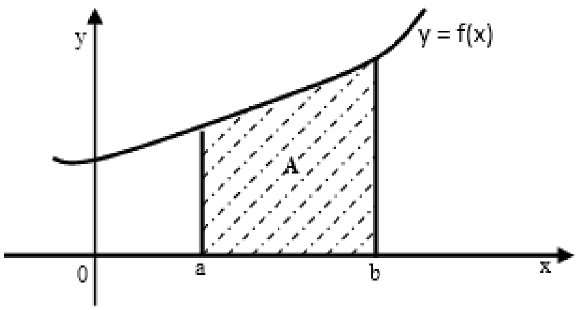
BAB VII

PENERAPAN INTEGRAL

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Dalam bab ini, diharapkan mahasiswa dapat mengerti dan menyelesaikan tentang penggunaan integral yang telah dipelajari dalam bab sebelumnya. Di sini diberikan beberapa contoh soal beserta penyelesaiannya serta tambahan soal-soal yang ada.

7.1 MENGHITUNG LUAS BIDANG RATA (STROUD, 1994:534)



Daerah di atas sumbu x, misalkan y = f(x). Tinjaulah daerah A yang dibatasi oleh x = a dan x = b. A sebagai daerah di bawah y = f(x) antara x = a dan x = b maka luas daerah A ditentukan oleh:

$$A = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

a. Contoh 1:

Carilah luas daerah di bawah kurva $y = x^2 + 2x + 1$ di antara x = 1 dan x = 2!

Penyelesaian:

$$A = \int_a^b f\left(x\right) dx$$

$$A = \int_1^2 \left(x^2 + 2x + 1\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + (2)^2 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 + 1\right]$$

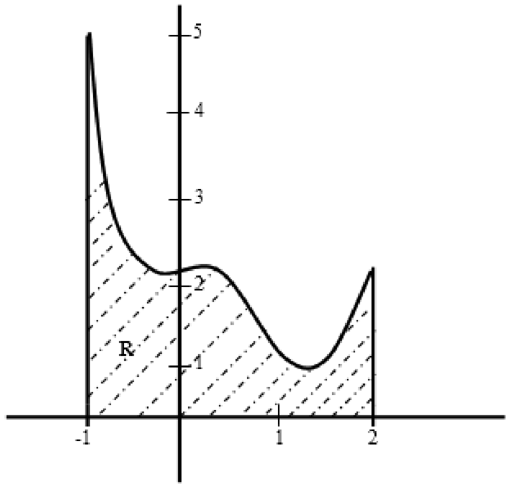
$$= \left[\frac{8}{3}4 + 2\right] - \left[\frac{1}{3}1 + 1\right]$$

$$= 6\frac{1}{3} \textit{ satuan luas}$$

b. Contoh 2 (Purcell, 1999:299):

Tentukanlah luas daerah R di bawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara x = -1 dan x = 2!

Penyelesaian:



Daerah R diperlihatkan pada gambar:

$$R = \int_{-1}^{2} \left(x^4 - 2x^3 + 2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + 2x \right]_{-1}^{2}$$

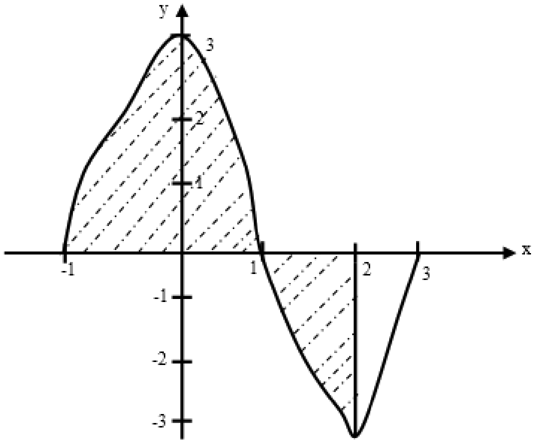
$$= \left[\frac{1}{5}(2)^5 - \frac{1}{2}(2)^4 + 2(2) \right] - \left[\frac{1}{5}(-1)^5 - \frac{1}{2}(-1)^4 + 2(1) \right]$$

$$= \frac{51}{10} \text{ satuan luas}$$

c. Contoh 3 (Purcell, 1999:300):

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$; ruas sumbu $x = -1$ dan $x = 2$; dan oleh garis $x = 2$!

Penyelesaian:



Daerah R adalah daerah yang diarsir pada gambar, ada sebagian berada di atas sumbu x dan ada yang di bawah sumbu x. Luas masing-masing bagian harus dihitung.

$$R = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^3 - x + 3 \right) dx - \int_{1}^{2} \left(x^3 - 3x^3 - x + 3 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4} \right)$$

$$= \frac{23}{4} \textit{ satuan luas}$$

d. Contoh lain 1.

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $Y = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ ruas sumbu di antara $x = -4$ dan $x = 4$!

Jawab :

Untuk menghitung Luas suatu daerah R, kita tentukan terlebih dahulu harga y untuk masing masing nilai x.

Untuk x = -4

$$\begin{aligned} Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ &= (-4)^4 - 2(-4)^3 + 2(-4)^2 + 3(-4) + 1 \\ &= 256 + 128 + 32 - 12 + 1 \\ &= 405 \end{aligned}$$

Untuk x = -3

$$\begin{aligned} Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ &= (-3)^4 - 2(-3)^3 + 2(-3)^2 + 3(-3) + 1 \\ &= 81 + 54 + 18 + (-9) + 1 \\ &= 145 \end{aligned}$$

Untuk x = -2

$$\begin{aligned} Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ &= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + 1 \\ &= 16 + 16 + 8 + (-6) + 1 \\ &= 35 \end{aligned}$$

Untuk x = -1

$$\begin{aligned} Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ &= (-1)^4 - 2(-1)^3 + 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 \\ &= 1 + 2 + 2 + (-3) + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Untuk x = 0

$$
\begin{aligned}
Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
&= 0^4 - 2(0)^3 + 2(0)^2 + 3(0) + 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Untuk x = 1

$$
\begin{aligned}
Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
&= (\text{üü})^4 \text{üü} \; (\;)^3 + \; (\;)^2 + \; (\;) + \\
&= 1 - 2 + 2 + 3 + 1 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Untuk x = 2

$$
\begin{aligned}
Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
&= (2)^4 - 2(2)^3 + 2(2)^2 + 3(2) + 1 \\
&= 16 - 16 + 8 + 6 + 1 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Untuk x = 3

$$
\begin{aligned}
Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
&= (\text{üü})^4 \text{üü} \; (\;)^3 + \; (\;)^2 + \; (\;) + \\
&= \text{üüüü} \; + \; + \; + \\
&= 55
\end{aligned}
$$

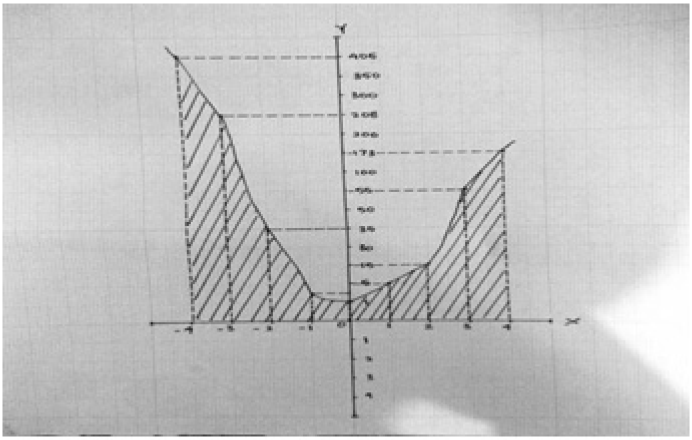
Untuk x = 4

$$
\begin{aligned}
Y &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\
&= (4)^4 - 2(4)^3 + 2(4)^2 + 3(4) + 1 \\
&= 256 - 128 + 32 + 12 + 1 \\
&= 173
\end{aligned}
$$

Dari harga-harga Y yang didapat dari perhitungan di atas, selanjutnya dibuat tabel sebagai berikut:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	405	145	35	3	1	5	15	55	173

Dari tabel di atas, selanjutnya dibuat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan koordinatnya. Hasil dari gambar akan ditunjukkan setelah diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya dihitung luasnya berdasarkan batas integral.



$$A = \int_{-4}^{4} \left[x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-4}^{4}$$

$$= \left[\frac{1}{5}(4)^5 - \frac{2}{4}(4)^4 + \frac{2}{3}(4)^3 + \frac{3}{2}(4)^2 + 4 \right] -$$

$$\left[\frac{1}{5}(-4)^5 - \frac{2}{4}(-4)^4 + \frac{2}{3}(-4)^3 + \frac{3}{2}(-4)^2 - 4 \right]$$

$$=\left[\frac{1024}{5}-\frac{512}{4}+\frac{128}{3}+\frac{48}{2}-4\right]-$$

$$\left[\frac{-1024}{5}-\frac{512}{4}-\frac{128}{3}+\frac{48}{2}-4\right]$$

$$=\left[\frac{2048}{5}+\frac{256}{3}+8\right]$$

$$=502,93$$

Contoh lain 2:

Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 + x + 4$ di antara $x=-3$ dan $x=+3$!

Penyelesaian:

Untuk $x = -3$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (-3)^3 - 3(-3)^2 + (-3) + 4$$
$$= -27 - 27 - 3 + 4$$
$$= -53$$

Untuk $x = -2$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) + 4$$
$$= -8 - 12 - 2 + 4$$
$$= -18$$

Untuk $x = -1$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 4$$
$$= -1 - 3 - 1 + 4$$
$$= -1$$

Untuk $x = 0$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (0)^3 - 3(0)^2 + (0) + 4$$
$$= 0 - 0 + 0 + 4$$
$$= 4$$

Untuk $x = 1$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 4$$
$$= 1 - 3 + 1 + 4$$
$$= 3$$

Untuk $x = 2$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (2)^3 - 3(2)^2 + (2) + 4$$
$$= 8 - 12 + 2 + 4$$
$$= 2$$

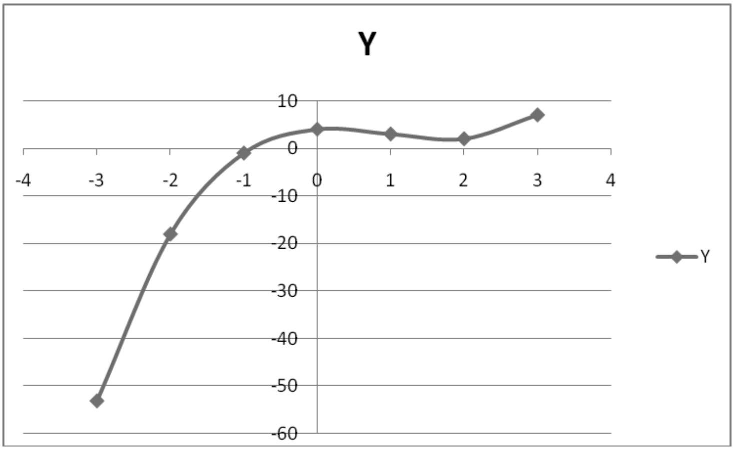
Untuk $x = 3$

$$y = x^3 - 3x^2 + x + 4$$
$$= (3)^3 - 3(3)^2 + (3) + 4$$
$$= 27 - 27 + 3 + 4$$
$$= 7$$

Dari hasil perhitungan di atas, selanjutnya dibuat tabel sebagai berikut:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-53	-18	-1	4	3	2	7

Dari tabel di atas, selanjutnya dibuat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan koordinatnya. Hasil dari gambar baru terlihat setelah diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya dihitung luas berdasarkan batas integralnya.



Luas daerah 1

$$\int_{-3}^{-1}(x^3 - 3x^2 + x + 4)\ dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-3}^{-1}$$

$$= \left[\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right] -$$

$$\left[\frac{1}{4}(-3)^4 - (-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 + 4(-3)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 4\right] - \left[\frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 12\right]$$

$$= -\ 20\ -\ 26\ -\ 4 + 8$$

$$= -42 \text{ satuan luas}$$

Luas daerah 2

$$\int_{-1}^{3}(x^3-3x^2+x+4)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(3)^4-(3)^3+\frac{1}{2}(3)^2+4(3)\right]-$$

$$\cdot\left[\frac{1}{4}(-1)^4-(-1)^3+\frac{1}{2}(-1)^2+4(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{81}{4}-27+\frac{9}{2}+12\right]-\left[\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-4\right]$$

$$=\left[\frac{80}{4}-28+\frac{8}{2}+16\right]$$

$$=20\ -\ 28\ +\ 4\ +\ 16$$

$$=12 \text{ satuan luas}$$

Total luas = luas daerah 1 + luas daerah 2

$= \ -42 + 12$

$= -30$ satuan luas

e. Contoh soal lain 3:

Tentukan luas daerah R yang melalui

$y = x^4+2x^3-3x^2+x+2$ di antara $x = -3$ dan $x = 3$!

Jawab:

Untuk x = -3

$$y=x^4+2x^3-3x^2+x+2$$

$$=(-\text{üü})^4\text{üüü}\quad(-\ )^3\quad(-\ )^2+(-\ )+$$

$$=81-54-27-3+2$$

$$=-1$$

Untuk x = -2

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$$
$$= (-2)^4 + 2(-2)^3 - 3(-2)^2 + (-2) + 2$$
$$= 16 - 16 - 12 - 2 + 2$$
$$= -12$$

Untuk x = -1

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$$
$$= (-1)^4 + 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + (-1) + 2$$
$$= 1 - 2 - 3 - 1 + 2$$
$$= -3$$

Untuk x = 0

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$$
$$= (0)^4 + 2(0)^3 - 3(0)^2 + (0) + 2$$
$$= 2$$

Untuk x = 1

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$$
$$= (1)^4 + 2(1)^3 - 3(1)^2 + (1) + 2$$
$$= 1 + 2 - 3 + 3$$
$$= 3$$

Untuk x = 2

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2$$
$$= (2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2 + (2) + 2$$
$$= 16 + 16 - 12 + 2 + 2$$
$$= 24$$

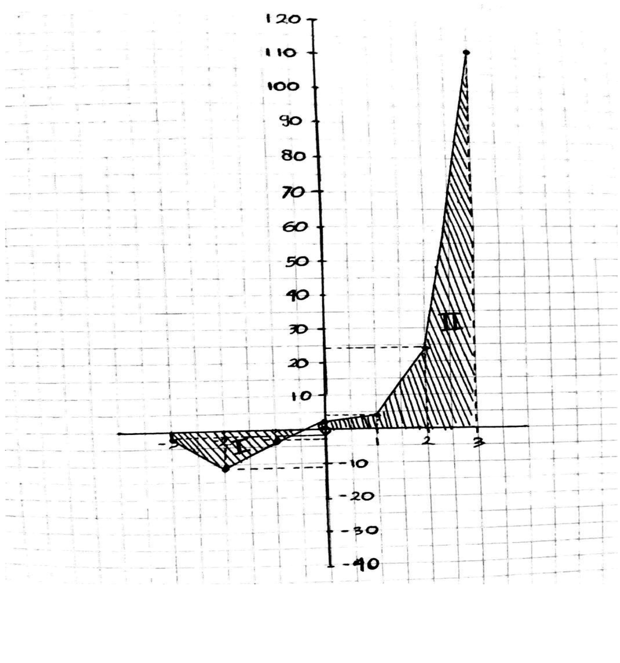
Untuk x = 3

$$
\begin{aligned}
y &= x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \\
&= (3)^4 + 2(3)^3 - 3(3)^2 + (3) + 2 \\
&= 81 + 54 - 27 + 3 + 2 \\
&= 113
\end{aligned}
$$

Dari hasil perhitungan di atas maka dibuat dalam bentuk tabel sebagai berikut.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	-12	-3	2	3	24	113

Dari tabel di atas, selanjutnya dibuat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan koordinatnya. Hasil dari gambar baru terlihat setelah diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya kita menghitung luas berdasarkan batas integralnya.



Luas daerah I

$$= \int_{-3}^{0} \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-3}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{1}{5}(-3)^5 + \frac{2}{4}(-3)^4 - (-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 + 2(-3) \right]$$

$$= 48,6 - 40,5 - 27 - 4,5 + 6$$

$$= -17,4 \text{ satuan luas}$$

Luas daerah II

$$= \int_{0}^{3} \left(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{0}^{3}$$

$$= \left[\frac{1}{5}(3)^5 + \frac{2}{4}(3)^4 - (3)^3 + \frac{1}{2}(3)^2 + 2(3) \right] - [0]$$

$$= \left[\frac{243}{5} + \frac{162}{4} - 27 + \frac{9}{2} + 6 \right]$$

$$= 48,6 + 40,5 - 27 + 4,5 + 6$$

$$= 72,6$$

Luas daerah I + luas daerah II

= −17,4 + 72,6

= 55,2 satuan luas

f. Contoh soal lain 4:

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 3$ di antara $x = -3$ dan $x = +3$!

Jawaban:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	51	3	-1	3	3	11	63

Untuk x = -3

$$\begin{aligned} y &= x^4 - 3x^2 + 2x + 3 \\ &= (-3)^4 - 3(-3)^2 + 2(-3) + 3 \\ &= 81 - 27 - 6 + 3 \\ &= 51 \end{aligned}$$

Untuk x = -2

$$\begin{aligned} y &= (-2)^4 - 3(-2)^2 + 2(-2) + 3 \\ &= 16 - 12 - 4 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Untuk x = -1

$$\begin{aligned} y &= (-1)^4 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 3 \\ &= 1 - 3 - 2 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Untuk x = 0

$$\begin{aligned} y &= (0)^4 - 3(0)^2 + 2(0) + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Untuk $x = 1$

$$\begin{aligned} y &= (1)^4 - 3(1)^2 + 2(1) + 3 \\ &= 1 - 3 + 2 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

untuk x = 2

$$\begin{aligned} y &= (2)^4 - 3(2)^2 + 2(2) + 3 \\ &= 16 - 12 + 4 + 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

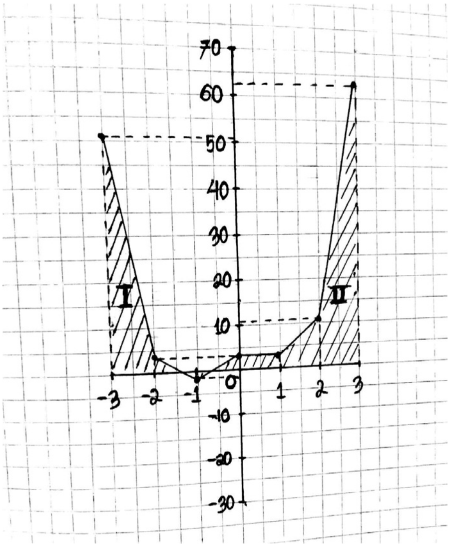
Untuk $x = 3$

$$\begin{aligned} y &= (3)^4 - 3(3)^2 + 2(3) + 3 \\ &= 81 - 27 + 6 + 3 \\ &= 63 \end{aligned}$$

Dari hasil perhitungan di atas maka selanjutnya dibuat tabel sebagai berikut.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	51	3	-1	3	3	11	63

Dari tabel di atas, selanjutnya dibuat gambar mengikuti sumbu x dan sumbu y atau mengikuti absis dan koordinatnya. Hasil dari gambar baru terlihat setelah diketahui batas integral untuk gambarnya, selanjutnya dihitung luas berdasarkan batas integralnya.



Luas daerah I

$$\int_{-3}^{-1}\left[x^4-3x^2+2x+3\right]=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{3}x^3+\frac{2}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{-1}$$

$$=\left[\frac{1}{5}(-1)^5-\frac{3}{3}(-1)^3+\frac{2}{2}(-1)^2+3(-1)\right]-$$

$$\left[\frac{1}{5}(-3)^5+\frac{3}{3}(-3)^3-\frac{2}{2}(-3)^2+3(-3)\right]$$

$$=\left[-\frac{1}{5}+1+1-3\right]-\left[-\frac{243}{5}+27+9-9\right]$$

$$=\frac{242}{5}-28$$

$$=48{,}4-28$$

$$=20{,}4 \textit{ satuan luas}$$

Luas daerah II

$$\int_{-1}^{3}\left[x^4-3x^2+2x+3\right]dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{3}x^3+\frac{2}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{3}$$

$$=\left[\frac{1}{5}(3)^5-\frac{3}{3}(3)^3+\frac{2}{2}(3)^2+3(3)\right]-$$

$$\left[\frac{1}{5}(-1)^5-\frac{3}{3}(-1)^3+\frac{2}{2}(-1)^2+3(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{243}{5}-27+9+9\right]-\left[-\frac{1}{5}+1+1-3\right]$$

$$=\left[\frac{243}{5}-9+1\right]$$

$$=48,8-8$$

$$=40,8\ \mathit{satuan\ luas}$$

Luas Total = luas daerah I + luas daerah II

= [20,4 + 40,8]

= 61,2 satuan luas

g. Contoh untuk fungsi parameter (Stroud, 1994:543):

Jika $x=\theta$ dan $y=1-\cos\theta$, tentukanlah luas daerah di bawah kurva di antara $\theta=0$ dan $\theta=\pi$!

Penyelesaian: $y=\cos\theta$

$$x=\theta-\sin\theta$$

$$dx=\left(1-\cos\theta\right)d\theta$$

$$A = \int_a^b y \, dx$$

$$= \int_0^\pi (1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta) \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi (1 - 2\cos\theta)\left(1 - \cos^2 \theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^\pi d\theta - 2\int_0^\pi \cos\theta \, d\theta + \int_0^\pi \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$= [\theta]_0^\pi - [2 \sin\theta]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$= (\pi - 0) - [2 \sin \pi - \sin 0] + \int_0^\pi \frac{1}{2} \, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= \pi - 2\sin\pi + \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

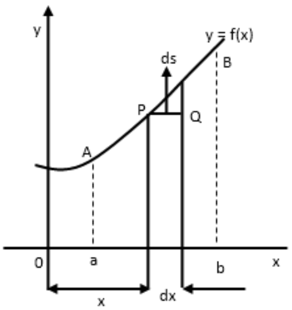
$$= \pi - 2\sin\pi + \frac{1}{2}\pi + \left[\frac{1}{4}\sin 2\pi - \frac{1}{4}\sin 2.0\right]$$

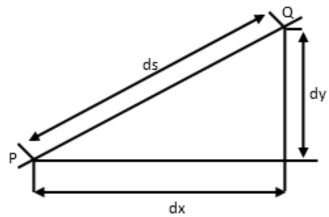
$$= \frac{3\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{3\pi}{2} \textit{ satuan luas}$$

7.2 PANJANG KURVA (STROUD, 1994:566)

Akan dicari panjang besar suatu kurva $y = f(x)$ antara $x = a$ dan $x = b$, misalkan P adalah titik (x,y) dan Q adalah titik pada kurva di dekat P dan misalkan pula ds = panjang busur kecil PQ.





Maka:

$$(ds)^2 \approx (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow \frac{(ds)^2}{(dx)^2} \approx 1 + \frac{(ds)^2}{(dx)^2}$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \approx 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} \approx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

jika:

$dx \to 0$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

jadi:

$$S = \int_a^b \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx$$

S = Panjang kurva

a. Contoh soal (Stroud, 566):

Tentukanlah panjang kurva $y^2 = x^3$ di antara $x = 0$ dan $x = 4$, $y > 0$!

Penyelesaian: $y^2 = x^3$

$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{9}{4} x$$

Jadi, panjang kurva dapat dihitung dengan menggunakan rumus di atas sebagai berikut:

$$S = \int_a^b \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\, dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{\left\{1 + \frac{9}{4}\right\}}\, dx$$

$$= \int_0^4 \left\{1 + \frac{9}{4} x\right\}^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{3}}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[10\sqrt{10} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left[31,62 - 1\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left(30,62\right)$$

$= 9,07$ satuan panjang

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 6x + 5$, sumbu x, dan koordinat pada $x = 1$ dan $x = 3$!
2. Tentukanlah luas daerah R yang dibatasi oleh $y = \frac{x^2}{3} - 4$ sumbu x, $x = -2$, dan $x = 3$!
3. Tentukanlah panjang kurva $y = x^{\frac{5}{2}}$ diantara $x = 0$ dan $x = 3$!
4. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 3x + 2$, sumbu x, dan koordinat pada $x = -3$ dan $x = +3$!
5. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x^2 - 3x + 1$, sumbu x, dan koordinat pada $x = -3$ dan $x = +3$!
6. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 + 3x^2 + 1$, sumbu x, dan koordinat pada $x = -3$ dan $x = +3$!

BAB VIII
BARISAN DAN DERET TAK HINGGA

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang barisan; deret aritmetika dan deret geometri; serta bisa mengerjakan soal-soal yang disediakan.

8.1 BARISAN

Barisan menurut Stroud (1994:396) adalah susunan bilangan yang berurutan sesuai dengan urutan bilangan asli. Ada pendapat lainnya yang menyatakan bahwa barisan adalah himpunan besaran a_1, a_2, a_3, dan seterusnya yang disusun dalam urutan tertentu dan masing-masing sukunya dibentuk menurut suatu pola yang tertentu pula, yaitu $\mathbf{a_r = f\ (r)}$.

Contoh :

a. 1,3,5,7, dan seterusnya adalah barisan dengan suku berikutnya haruslah 9.

b. 2,6,18,54, dan seterusnya adalah barisan dengan suku berikutnya adalah 162.

c. $1^2,-2^2,3^2,-4^2$, dan seterusnya adalah barisan dengan suku berikutnya adalah 5^2.

Barisan berhingga adalah barisan yang banyak sukunya berhingga (tertentu atau dapat diketahui), sedangkan barisan tak hingga adalah barisan yang tak ada akhirnya. Contoh yang mudah untuk diingat bahwa perbedaan barisan tak hingga dengan barisan berhingga adalah sebagai berikut:

a. Nomor halaman sebuah buku adalah barisan berhingga.
b. Nomor telepon di dalam buku telepon adalah barisan berhingga.
c. Semua bilangan asli yaitu 1, 2, 3, dan seterusnya adalah barisan tak hingga.

Dalam barisan tak hingga apabila diketahui rumus umumnya maka barisannya dapatlah dibuat. Sebaliknya, apabila barisannya telah ada maka rumus umumnya dapat dibuat dan rumus tersebut haruslah dapat memenuhi barisan yang sudah ada dan sesuai. Barulah dinyatakan bahwa rumus yang dibuat adalah benar. Contoh soal:

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Rumus umum di atas menyatakan bahwa barisan yang dibuat haruslah mengikuti rumus yang ada. Apabila dibuat barisan maka harus dimulai dari nilai n = 1 sampai n = ∞.

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} = 0$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \quad \cdots \text{dst}$$

Oleh karena itu, barisan yang didapat adalah:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \text{ ..., dst}$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \text{ ..., dst}$$

a. Contoh l:

$a_n = \dfrac{n}{n-1}$, dalam hal ini n dimulai dari 1 sampai ∞.

Apabila rumus di atas dibuat barisannya maka didapat nilai-nilai dari masing-masing barisan adalah:

$$a_1 = \frac{1}{2.1-1} = 1$$

$$a_2 = \frac{2}{2.2-1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{2.3-1} = \frac{3}{5}$$

$$a_4 = \frac{4}{2.4-1} = \frac{4}{7}$$

$$a_5 = \frac{5}{2.5-1} = \frac{5}{9}$$

$$a_6 = \frac{6}{2.6-1} = \frac{6}{11} \cdots \text{dst}$$

maka barisannya adalah :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ ...$$

$$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \ ...$$

Sebaliknya, apabila diketahui barisannya akan diketahui bagaimana rumus umumnya.

b. Contoh 2:

Diketahui barisannya:

$$\frac{1}{2^2}, \frac{2}{2^3}, \frac{3}{2^4}, \frac{4}{2^5}, \ ....$$

Dari barisan yang ada maka dapat ditentukan bahwa rumus barisnya:

$$a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$$

c. Contoh 3:

Ada barisan sebagai berikut:

$$-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}, \ldots\ldots$$

Apabila barisan di atas dibuat rumus umumnya, akan didapat:

$$a_n = \frac{(-1)^n . n}{2n - 1}$$

Untuk membuktikan, apakah rumus umum yang dibuat sudah benar maka harus dimulai dengan memasukkan harga n mulai dari 1 seperti rumus di atas. Oleh karena itu, untuk barisannya akan didapatkan:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 .1}{\text{üü} -} = \frac{-1}{} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2 .2}{2.2 - 1} = \frac{-3}{4 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3 .3}{2.3 - 1} = \frac{-3}{6 - 1} = \frac{-3}{5}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4 .4}{2.4 - 1} = \frac{4}{8 - 1} = \frac{4}{7}$$

$$a_5 = \frac{(-1)^5 .5}{2.5 - 1} = \frac{-5}{10 - 1} = \frac{-5}{9}$$

Dari hasil a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, dan seterusnya, dapat dibuktikan bahwa rumus untuk $a_n = \frac{(-1)^n . n}{2n-1}$ adalah benar karena nilai dari n dimasukkan ke dalam rumus di atas akan di dapat $-1,\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ -\frac{5}{9},\ ....$

8.2 DERET HITUNG (STROUD, 1994:397)

Contoh :

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots.$

a_1 = adalah suku kesatu

a_2 = adalah suku kedua

d = selisih dalam hal ini ($a_2 - a_1$)

a_n = suku ke-n yang dalam hal ini dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{a_n = a + (n-1)\, d}$$

n = jumlah suku

S_n = Jumlah n suku yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\left(2.a_1 + (n-1)\, d\right)}$$

Sebagai contoh, dapat dilihat penyelesaian dari soal berikut:

a. Contoh 1 soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 1+ 7 + 13 +19 + 25 + 31 + ...

Jika n = 5000,

Maka hitunglah a_n dan S_n dari soal di atas!

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 10 \\
a_2 &= 6 \\
d &= 6 - 10 = -4 \\
n &= 50 \\
a_n &= a + (n = 1)\, d \\
a_{50} &= 10 + (50 - 1)(-4) \\
&= 10 + 49(-4) \\
&= 10 - 196 \\
&= -186
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left(2.a_1 + (n-1)\, d\right) \\
S_{50} &= \frac{50}{2}\left(2.10 + (50-1)(-4)\right) \\
&= 25\left(20 + 49(-4)\right) \\
&= 25(20 + 196) \\
&= -4400
\end{aligned}
$$

b. Contoh 2 soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 10 + 18 + 26 +34 + 42 ....

Jika n = 1000

Maka hitunglah a_n dan S_n dari soal di atas.

Penyelesaian :

$$a_1 = 10$$
$$a_2 = 18$$
$$d = 18 - 10 = 8$$
$$n = 1000$$
$$a_n = a + (n-1)\,d$$
$$a_{50} = 10 + (1000-1)(8)$$
$$= 10 + 999(8)$$
$$= 10 + 7992$$
$$= 8002$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2.a_1 + (n-1)\,d\right)$$
$$S_{50} = \frac{1000}{2}\left(2.10 + (1000-1)(8)\right)$$
$$= 500\left(20 + 999(8)\right)$$
$$= 25(20 + 196)$$
$$= 4006000$$

c. Contoh 3 soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 1+ 9+ 17 +25 + 33 ....

Jika n = 750

Maka hitunglah a_n dan S_n dari soal di atas.

Penyelesaian :

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 9 \\
d &= 9 - 1 = 8 \\
n &= 750 \\
a_n &= a\,1 + (n-1)\,d \\
a_{50} &= 1 + (750-1)(8) \\
&= 1 + 749(8) \\
&= 5993
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left(2.a_1 + (n-1)\,d\right) \\
S_{50} &= \frac{750}{2}\left(2.1 + (750-1)(8)\right) \\
&= 375\left(2 + 749(8)\right) \\
&= 375\left(2 + 5992\right) \\
&= 2247750
\end{aligned}
$$

d. Contoh 4 soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 500 + 475 + 450 +400 + ...

Jika n = 1250

Maka hitunglah a_n dan S_n dari soal di atas.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 500 \\
a_2 &= 475 \\
d &= 475 - 500 = -25 \\
n &= 1250 \\
a_n &= a\,1 + (n-1)\,d \\
a_{50} &= 500 + ((1250-1)(-25)) \\
&= 500 + (\,1249\,)(-25) \\
&= 500 + (-31225) \\
&= -30725
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}\left(2.a_1 + (n-1)\,d\right) \\
S_{50} &= \frac{1250}{2}\left(2.500 + (1250-1)(-25)\right) \\
&= 625\left(1000 + (\,1249)(-25)\right) \\
&= 625\left(1000 - 31225\right) \\
&= -18890625
\end{aligned}$$

8.2.1 Mean Arithmetic (Rata-Rata Hitung) (Stroud, 1994:398)

Biasanya diharuskan mencari mean (rata-rata) aritmetika dari dua buah bilangan P dan Q. Dalam hal ini, harus menyisipkan sebuah bilangan A di antara P dan Q sehingga P + A + Q membentuk sebuah deret hitung.

$$A - P = d \ \ dan \ \ Q - A = d$$

$$A - P = Q - A$$

$$2A = P + Q$$

$$A = \frac{P + Q}{2}$$

a. **Contoh 1 soal dan penyelesaian:**

Sisipkanlah 3 buah mean Arithmetic di antara 8 dan 18 dalam hal ini 8 + A + B + C + 18 merupakan suatu deret. Tentukanlah nilai dari A, B, dan C.

Penyelesaian :

Ada 2 cara yang dapat digunakan untuk menghitung nilai A, B, dan C.

Cara I :

Dengan mengambil nilai sisipan tengah (B)

$$B = \frac{8 + 18}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$A = \frac{8 + B}{2} = \frac{8 + 13}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

$$C = \frac{8 + 18}{2} = \frac{13 + 18}{2} = \frac{31}{2} = 15\frac{1}{2}$$

Cara II :

Dengan menggunakan cara selisih

$$8 + \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + 18 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots.$$

$$A = a_1 + d$$
$$B = a_1 + 2d$$
$$C = a_1 + 3d$$
$$18 = a1 + 4d$$
$$8 = a_1$$

Untuk menghitung selisih (d) maka dicari sebagai berikut:

$$\begin{array}{rl} a_1 + 4d & = 18 \\ a_1 \quad & = 8 - \\ \hline 4d & = 10 \end{array}$$

$$d = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

maka akan didapat :

$$A = a_1 + d = 8 + 2\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$$
$$B = a_1 + 2d = 8 + 2\left(2\frac{1}{2}\right) = 13$$
$$C = a_1 + 3d = 8 + 3\left(2\frac{1}{2}\right) = 15\frac{1}{2}$$

maka deret pada nilai-nilai di atas adalah:

$$8 + 10\frac{1}{2} + 13 + 15\frac{1}{2} + 18 + \cdots\cdots$$

b. Contoh 2 soal dan penyelesaian:

Tentukanlah 5 nilai sisipan (A + B + C + D + E) di antara 2 dan 32 sehingga bilangan-bilangan 5 + A + B + C + D + E + 32 merupakan suatu deret aritmetika.

Penyelesaian :

$$a_1 = 2$$
$$a_7 = 32$$
$$a_7 = a1 + \left((n - 1) (d) \right)$$
$$32 = 2 + 6\ d$$
$$6d = 30$$

d = 5 , dengan didapatnya nilai d maka akan didapat semua nilai untuk 5 bilangan di atas. Oleh karena itu, dengan menggunakan rumus di atas, didapatlah nilai untuk:

Nilai A = 7 , nilai B =12 , nilai C = 17 , nilai D = 22, dan nilai E = 27.

8.3 DERET UKUR (DERET GEOMETRIK) (STROUD, 1994:400)

Contoh: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ...$

a = suku ke-1

ar = suku ke-2

r = rasio $= \dfrac{a_r}{a}$

a_n = suku ke-n yang dapat dihitung dengan rumus :

$$\boxed{a_n = a\ .\ r^{n-1}}$$

n = jumlah suku

S_n = jumlah n suku yang dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}}$$

a. Contoh 1 Soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ….

Jika N = 100, hitunglah a_n dan S_n pada soal tersebut!

Penyelesaian :

$$a = 1$$
$$ar = 3$$
$$r = \frac{ar}{a} = \frac{3}{1} = 3$$
$$n = 100$$

$$a_n = a\ .\ r^{n-1}$$
$$a_{100} = 1.3^{100-1}$$
$$a_{100} = 1.3^{99}$$
$$= 1,718\ x\, 10^{47}$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_{100} = \frac{1\left(1 - 3^{100}\right)}{1 - 3}$$

$$= \frac{1 - 5{,}1538 \; x \, 10^{47}}{-2}$$

$$= 2{,}577 \; x \, 10^{47}$$

b. Contoh 2 soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 1 + 12 + 144 + 1728 + 20736 + ...

Jika N = 75, hitunglah a_n dan S_n pada soal tersebut!

Penyelesaian :

$$a = 1$$

$$ar = 12$$

$$r = \frac{ar}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

$$n = 75$$

$$a_n = a \,.\, r^{n-1}$$

$$a_{75} = 1.12^{75-1}$$

$$a_{75} = 1.12^{74}$$

$$= 7{,}23456141 \; x \, 10^{79}$$

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

$$S_{100} = \frac{1\left(1-12^{75}\right)}{1-3}$$

$$= \frac{1-8,681473692\,x\,10^{80}}{-11}$$

$$= 7,892248811\,x\,10^{79}$$

c. Contoh 3 Soal dan penyelesaian:

Diketahui deret : 1 + 9 + 81 + 729 + ….

Jika N = 75, hitunglah a_n dan S_n pada soal tersebut!

Penyelesaian :

$$a = 1$$

$$ar = 9$$

$$r = \frac{ar}{a} = \frac{9}{1} = 9$$

$$n = 75$$

$$a_n = a\,.\,r^{n-1}$$

$$a_{75} = 1.9^{75-1}$$

$$a_{75} = 1.9^{74}$$

$$= 4,110983167\,x\,10^{70}$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_{75} = \frac{1\left(1 - 9^{75}\right)}{1 - 9}$$

$$= \frac{1 - 3,69988485\,x\,10^{71}}{-8}$$

$$= 4,624856063\,x\,10^{70}$$

8.3.1 Mean Goemetric (Nilai Sisipan) (Stroud, 1994: 402)

Mean Geometric dari 2 buah bilangan P dan Q adalah sebuah bilangan A sehingga P + AQ membentuk sebuah deret ukur.

$$\frac{A}{P} = r \quad atau \quad \frac{Q}{A} = r$$

$$\frac{A}{P} = \frac{Q}{A}$$

$$A^2 = P.Q$$

$$A = \sqrt{P.Q}$$

Contoh :

Sisipkanlah 4 buah mean geometric di antara 5 dan 1215. Misalkan keempat mean geometric itu adalah A, B, C, dan D maka 5 + A + B + C + D + 1215 membentuk suatu deret ukur. Hitunglah nilai A, B, C, dan D!

Penyelesaian :

$$a = 5$$

$$ar^5 = 1215$$

$$\frac{ar^5}{a} = \frac{1215}{5}$$

$$r^5 = 243$$

$$r = \sqrt[5]{243}$$

$$r = 3$$

$$A = ar = 5.3 = 15$$

$$B = ar^2 = 5.3^2 = 45$$

$$C = ar^3 = 5.3^3 = 135$$

$$D = ar^4 = 5.3^4 = 405$$

apabila nilai di atas dimasukkan ke dalam deret maka akan didapat:

5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1215 + ……

Contoh:

Sisipkanlah 4 buah mean geometric di antara 1 dan 59049. Misalkan keempat mean geometric itu adalah A, B, C, dan D sehingga apabila nilai-nilai itu dimasukkan maka 1 + A + B+C + D + 59049 akan membentuk suatu deret ukur. Hitunglah nilai A, B, C, dan D!

Penyelesaian :

$$a = 1$$

$$ar^5 = 59049$$

$$\frac{ar^5}{a} = \frac{59049}{1}$$

$$r^5 = 59049$$

$$r = \sqrt[5]{59049}$$

$$r = 9$$

Dengan didapatnya nilai ratio (r) maka kita akan mendapatkan semua bilangan-bilangan tersebut, yaitu dengan cara membentuk deret ukur.

1 + 9 + 81 + 729 + 6561 + 59049

SOAL-SOAL LATIHAN :

1. Buatlah barisan dari rumus umum berikut:

   a. $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$

   b. $a_n = \dfrac{n^3}{e^n}$

   c. $a_n = \dfrac{\ln(1_n)}{\sqrt{n}}$

   d. $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$

2. Diketahui deret sebagai berikut :

   1 + 5 + 25 + 125 + ...

   Jika n = 75, tentukan a_n dan S_n!

3. Sisipkanlah 5 mean aritmatic di antara 12 dan 21,6. Tentukanlah nilai A, B, C, D, dan E!

4. Diketahui deret sebagai berikut:

   100 + 95 + 90 + 85 + 80 + ...

   Jika n = 20 , hitung a_n dan S_n!

5. Diketahui deret sebagai berikut :

   1 + 10 + 19 + 28 + ...

   Jika n = 500, tentukan a_n dan S_n !

6. Sisipkanlah 5 Mean geometric di antara 4 dan 16384 dan tentukanlah nilai A, B, C, dan D sehingga bilangan-bilangan itu akan membentuk deret ukur.

BAB IX

VEKTOR DAN GEOMETRI ANALITIK RUANG

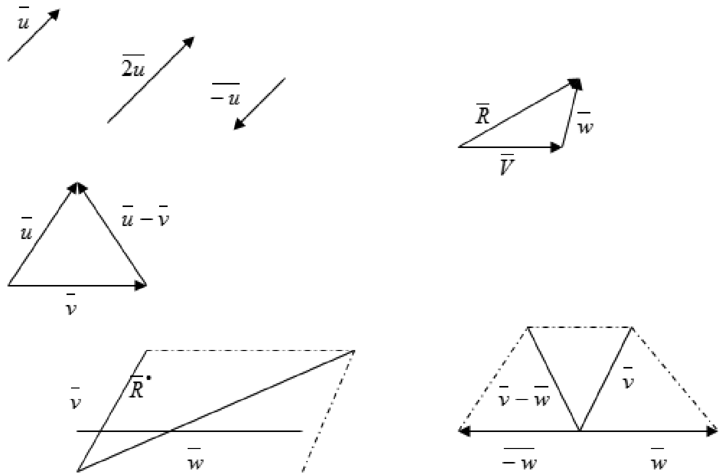
TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa diharapkan dapat memahami dan mengerti tentang vektor; penjumlahan dan pengurangan vektor; perkalian dot vektor serta perkalian cross; apa itu vektor satuan; serta bagaimana menentukan sudut antara 2 vektor.

9.1 PENGERTIAN

Sebenarnya besar fisis dapat dikelompokkan dalam 2 golongan, yaitu besaran skalar dan besaran vektor. Besaran skalar adalah besaran yang cukup dinyatakan oleh sebuah bilangan dengan satuan yang sesuai, seperti panjang, luas, volume, massa, dan waktu. Besaran vektor adalah besaran yang di samping besarnya juga mempunyai arah, misalnya gaya, kecepatan, percepatan, dan sebagainya. Vektor-vektor yang panjang dan arahnya sama disebut vektor-vektor yang ekuivalen.

9.2 PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN VEKTOR



$$*\ \overline{R} = \overline{v} - \overline{w}$$

Contoh :

$$\overline{v} = (1,-2) = (i - 2j)$$

$$\overline{w} = (3,5) = (3i + 5j)$$

$$\overline{v} + \overline{w} = (1,-2) + (3,5) = (4,3) = (4i + 3j)$$

$$\overline{v} - \overline{w} = (1,-2) - (3,5) = (-2,-7) = (-2i - 2j)$$

$$4.\overline{v} = 4(3,5) = (6,10) = (6i + 10j)$$

9.3 NORMA SUATU VEKTOR

Norma suatu vektor adalah panjang vektor $\overline{u}$ yang dinyatakan sebagai $\left|\overline{u}\right|$

Contoh :

Vektor $\overline{u}$ berada dalam ruang dimensi -2

$$\overline{u} = (u_1 , u_2)$$
$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Jika vektor $\overline{u}$ dalam ruang dimensi -3

$$\overline{u} = (u_1 , u_2 , u_3)$$
$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah 2 titik di dalam ruang berdimensi -3 maka jarak d antara ke 2 titik tersebut adalah norma vektor $\xrightarrow[p_1p_2]{}$

$$\xrightarrow[p_1p_2]{} = p_2 - p_1$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

maka akan didapat d (jarak antara P_1P_2) adalah sebagai berikut:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

a. **Contoh 1** :

$$Titik\ \overline{P_1} = (2, -1, -5)$$
$$Titik\ \overline{P_2} = (4, -3, 1)$$

Maka :

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (6)^2}$$
$$= \sqrt{44}$$
$$= 2\sqrt{11}$$

b. Contoh 2 :

$$\bar{u} = (-3, 2, 1)$$

maka untuk menghitung norma vektor $\bar{u}$ atau panjang $|\bar{u}|$ adalah :

$$|\bar{u}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2}$$
$$= \sqrt{9+4+1}$$
$$= \sqrt{14}$$

9.4 VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG DIMENSI -2

Gambar-gambar vektor dalam ruang dimensi -2

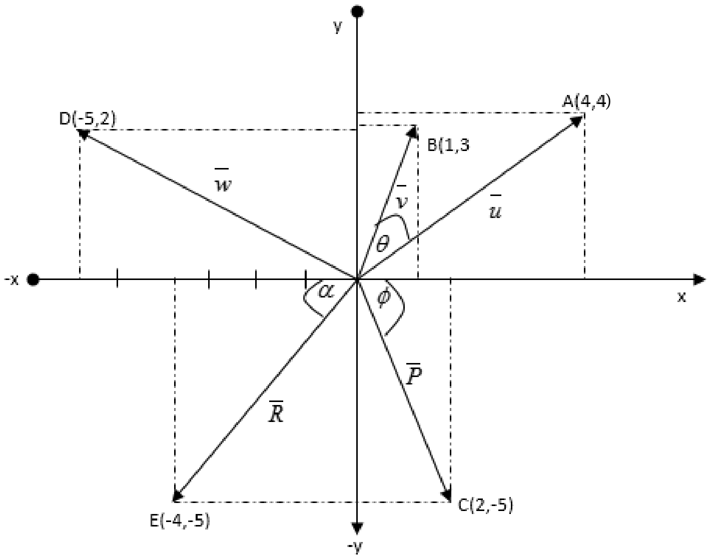
a. vektor $\bar{u}\,(4,4)$

b. vektor $\bar{v}\,(1.3)$

c. vektor $\bar{w}\,(-5,2)$

d. vektor $\bar{R}\,(-4,-5)$

e. vektor $\bar{P}\,(2,-5)$



a. **Soal 1** :

Dari gambar di atas hitunglah sudut-sudut sebagai berikut:

1. Sudut θ di antara vektor $\overline{u}$ dan $\overline{v}$
2. Sudut ϕ di antara vektor $\overline{P}$ dan $\overline{u}$
3. Sudut α di antara vektor $\overline{w}$ dan $\overline{R}$

Penyelesaian :

1. Sudut θ

$$\text{vektor } \overline{u}\,(4,4) = (4i + 4j)$$
$$\overline{v}\,(1,3) = (i + 3j)$$
$$u.v = (4,4).(1,3)$$
$$= (4)(1) + (4)(3)$$
$$= 4 + 12 = 16$$

$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$
$$\left|\overline{v}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 19} = \sqrt{10}$$
$$\cos\theta = \frac{u.v}{\left|\overline{u}\right| \cdot \left|\overline{v}\right|} = \frac{16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{320}} = 0{,}8944$$
$$\theta = 26{,}6^0$$

2. Sudut ϕ

$$\text{vektor } \overline{u}\,(4,4)$$
$$\overline{P}\,(2,-5)$$
$$U.P = (4,4) \cdot (2,-5)$$
$$= (4)(2) + (4)(-5)$$
$$= 8 - 20$$
$$= -2$$

$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

$$\left|\overline{P}\right| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$\cos\varphi = \frac{u.p}{\left|\overline{u}\right| \cdot \left|\overline{p}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{-12}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{29}} = \frac{-12}{\sqrt{928}} = -0.3939$$

$$\varphi = 113{,}2^0$$

3. Sudut α

$$\text{vektor } \overline{w}(-5, 2)$$

$$\overline{R}(-4, -5)$$

$$\begin{aligned} w.R &= (-5, 2) \cdot (-4, -5) \\ &= (-5)(-4) + (2)(-5) \\ &= 20 - 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\left|\overline{w}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{32}$$

$$\left|\overline{R}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\cos\alpha = \frac{w..R}{\left|\overline{w}\right| \cdot \left|\overline{R}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{41}} = \frac{10}{34{,}4818} = 0{,}29$$

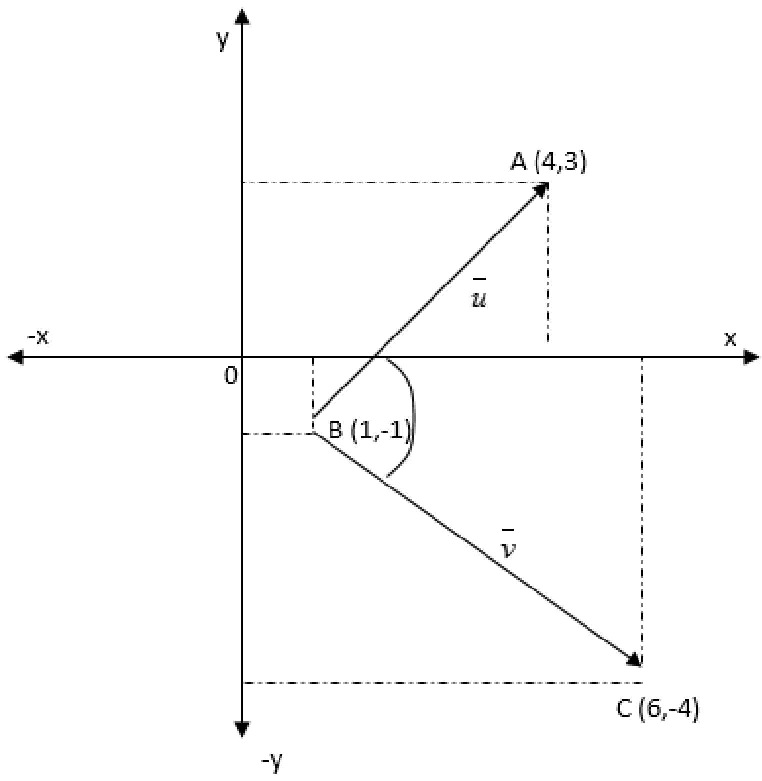
$$\alpha = 73{,}14^0$$

b. **Soal 2**:

Buatlah gambar dari A (4,3), B (1,-1), dan C(6,-4). Tentukanlah besar sudut ABC atau sudut B.

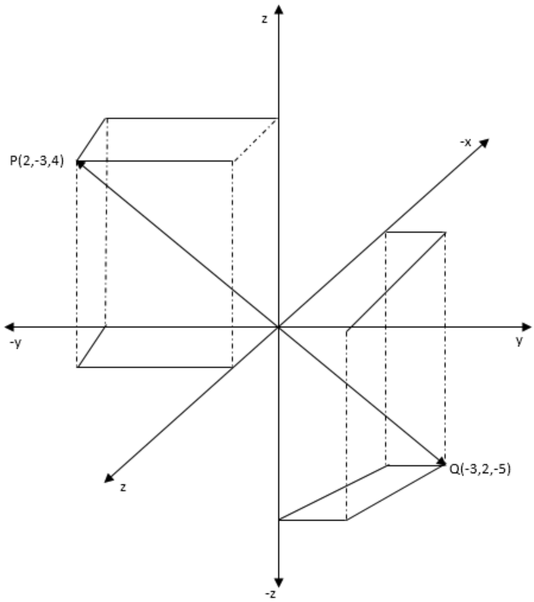
Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan soal di atas maka langkah pertama yang kita kerjakan adalah menggambarkan vektor-vektor tersebut.



$$\overline{u} = \overline{BA} = (4,3) - (1,-1) = (3,4)$$
$$\overline{v} = \overline{BC} = (6,-4) - (1,-1) = (5,-3)$$
$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$$
$$\left|\overline{v}\right| = \sqrt{5^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$
$$u.v = (3,4)(5,-3)$$
$$u.v = (3)(5) + (4)(-3) = 15 - 12 = 3$$
$$\cos B = \frac{u.v}{\left|\overline{u}\right| \cdot \left|\overline{v}\right|} = \frac{3}{5\sqrt{34}} = 0{,}1029$$
$$B = 84{,}09^0$$

9.5 VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG DIMENSI -3

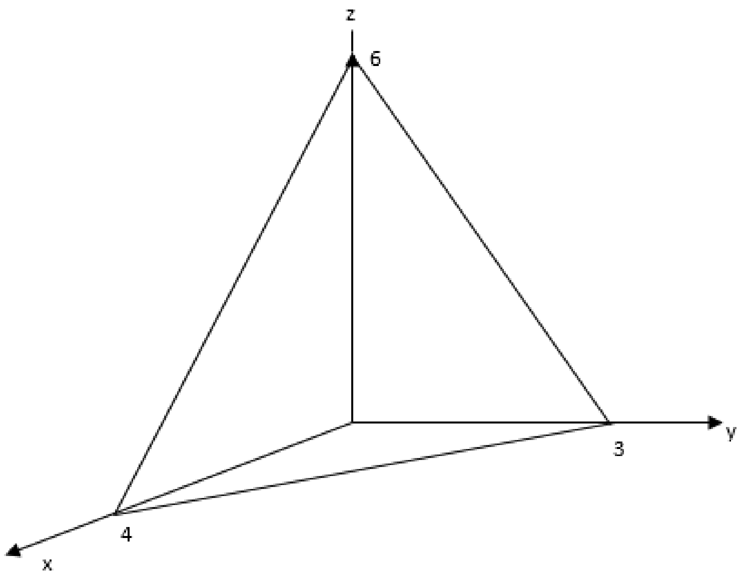


$\overline{P}$ terletak dalam ruang dimensi -3

$\overline{P}$ (2,-3,4) = (2 i – 3 j + 4 k)

$\overline{Q}$ terletak dalam ruang dimensi -3

$\overline{Q}$ (-3,2,-5) = (-3 i + 2 j – 5 k)



Dalam gambar yang menggambarkan persamaan tersebut adalah 3x + 4y + 2z = 12

3x = 12 x = 4

4y = 12 y = 3

2z = 12 z = 6

9.6 HASIL KALI TITIK DARI 2 VEKTOR

Jika u dan v adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi -2 atau ruang dimensi -3 dan θ adalah sudut antara u dan v maka hasil kali titik dari vektor u dan vektor v adalah (u.v).

$$u.v = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\theta$$

a. Contoh :

$$Jika \quad \bar{u} = (2, -1, 1)$$
$$\bar{v} = (1, 1, 2)$$

Hitung: u.v dan sudut θ antara u dan v

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} u.v &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^0$$

Untuk vektor dalam ruang dimensi -3 maka hasil kali titik antara vektor-vektor adalah sebagai berikut:

$$u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

panjang vektor u adalah:

$$\bar{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Begitu juga untuk menghitung panjang vektor dari v

$$\bar{v} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Untuk mencari sudut antara u dan v:

$$\cos\theta = \frac{u.v}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$

b. Contoh :

Carilah sudut ABC jika diketahui masing-masing sebagai berikut:

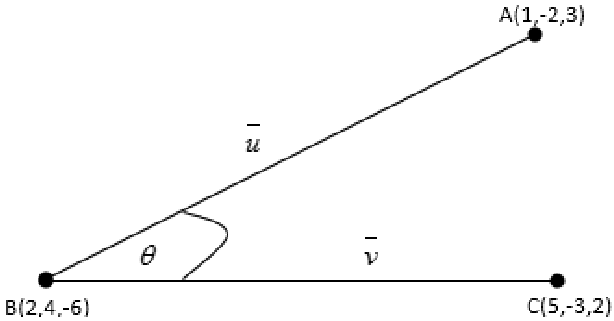
A = (1, -2, 3)

B = (2, 4, -6)

C = (5, -3, 2)

Penyelesaian :

Pertama, ditentukan vektor-vektor u dan v (berasal dari titik asal) serta terhadap vektor BA dan vektor BC. Ini dilakukan dengan cara mengurangkan koordinat-koordinat titik awal dan titik ujungnya, yakni:



$$\bar{u} = \overline{BA} = A - B$$
$$\bar{v} = \overline{BC} = C - B$$
$$\bar{u} = (1,-2,3) - (2,4,-6)$$
$$= (-1,-6,9)$$
$$\bar{v} = (5,-3,2) - (2,4,-6) = (3,-7,8)$$
$$\cos\theta = \frac{u.v}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$
$$u.v = (-1)(3) + (-6)(-7) + (9)(8)$$
$$= -3 + 42 + 72$$
$$= 111$$
$$|\bar{u}| = \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + (9)^2} = \sqrt{118}$$
$$|\bar{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-7)^2 + (8)^2} = \sqrt{122}$$
$$\cos\theta = \frac{111}{\sqrt{118}\sqrt{122}} = 0{,}9251$$
$$\theta = 22{,}31^0$$

9.7 HASIL KALI SILANG DARI 2 VEKTOR

Hasil kali silang antara 2 vektor dapat dilakukan dengan determinan.

$$U\ x\ V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_2 & v_2 \end{vmatrix} k$$

$$= \left(u_2 v_3 - v_2 u_3\right) i - \left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right) j + \left(u_1 v_2 - u_2 v_1\right) k$$

a. Contoh 1:

Carilah hasil kali silang antara vektor u = (1, -2, -1) dengan vektor v = (-2, 4, 1)!

Penyelesaian :

$$U\ x\ V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} k$$

$$= \left(-2 + 4\right) i - \left(1 - 2\right) j + \left(4 - 4\right) k$$

$$= 2i + j + 0k$$

b. Contoh 2:

Carilah hasil kali silang antara vektor u = (3, -4, -2) dengan vektor v = (-1, 3, 2)!

Penyelesaian:

$$U \ x \ V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} k$$

$$= (-8+6)\,i - (6-2)\,j + (9-4)\,k$$

$$= -2i + 4j + 5k$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. Gambarkanlah vektor-vektor dalam ruang dimensi -2
   a. $\overline{u}\,(2,-4)$
   b. $\overline{v}\,(-3,5)$
   c. $\overline{w}\,(-4,-6)$
   d. $\overline{R}\,(1,5)$
   e. Berapa besar sudut antara vektor-vektor tersebut yang dapat dihitung dengan rumus sudut antara $\overline{u}$ dan $\overline{v}$?
   f. Sudut antara $\overline{v}$ dan $\overline{w}$
   g. Sudut antara $\overline{w}$ dan $\overline{R}$
2. Gambarkan vektor-vektor dalam ruang dimensi -3
   a. $\overline{u}\,(2,3,-4)$
   b. $\overline{v}\,(1,-2,3)$
   c. $|\overline{u}|$
   d. $|v|$

3. Jika diketahui u = (2, 3, 4) dan v = (1, -2, 3). Hitunglah:
   a. $u - v$
   b. $u + v$
   c. $u + 2v$
   d. $2u + 3v$
   e. $u.v$
   f. $\overline{u}$
   g. $\overline{v}$
   h. Sudut antara *u* dan *v*
4. Dari soal nomor 3 maka hitunglah:
   a. Hasil kali titik u.v
   b. Hasil kali silang u x v
5. Carilah sudut ABC, jika A = (1, -2, 3), B = (2, -5, 6), dan C = (5, -3, 1)

BAB X

INTEGRAL LIPAT

TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Mahasiswa memahami dan mengerti tentang integral lipat; bagaimana cara menyelesaikan integral lipat II dan integral lipat III; serta bisa menyelesaikan soal-soal yang telah disediakan.

10.1 PENGERTIAN INTEGRAL LIPAT

Dalam menyelesaikan integral lipat, kita selalu menggunakan rumus integral yang sama seperti integral biasa, hanya saja perbedaannya terletak pada integral lipat, baik dalam integral lipat dua maupun integral lipat tiga yang dimulai dari variabel bagian dalam untuk selanjutnya menyelesaikan variabel berikutnya.

10.2. INTEGRAL LIPAT DUA (DOUBLE INTEGRAL)

a. Contoh 1:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dx$$

$$\int_0^3 \int_1^2 (2x+3y)\,dx\,dy$$

Pada integral sebelah dalam y berupa konstanta sehingga:

$$\underbrace{\int_0^3 \underbrace{\int_1^2 \left(2x+3y\right) dx}_{1}\, dy}_{2}$$

$$1 = \int_1^2 \left(2x+3y\right) dx$$

$$= \left[x^2 + 3xy\right]_1^2$$

$$= \left[2^2 + 3(2)(y)\right] - \left[(1)^2 + 3(1)(y)\right]$$

$$= \left[4+6y\right] - \left[1+3y\right]$$

$$= 3+3y$$

$$2 = \int_0^3 \left(3+3y\right) dy$$

$$= \left[3y + \frac{3}{2}y^2\right]_0^3$$

$$= \left[3(3) + \frac{3}{2}(3)^2\right] - \left[3(0) + \frac{3}{2}(0)^2\right]$$

$$= \left[9 + \frac{27}{2}\right] - \left[0+0\right]$$

$$= 22\frac{1}{2}$$

b. Contoh 2 :

$$\int_1^2 \int_2^4 \left(x+2y\right) dx\, dy$$

$$1 = \int_{2}^{4} (x + 2y)\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2} x^2 + 2xy \right]_2^4$$
$$= \left[\frac{1}{2}(4)^2 + 2(4)(y) \right] - \left[\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2)(y) \right]$$
$$= [8 + 8y] - [2 + 4y]$$
$$= [6 + 4y]$$

$$2 = \int_{1}^{2} (6 + 4y)\, dy$$
$$= \left[6y + 2y^2 \right]_1^2$$
$$= \left[6(2) + 2(2)^2 \right] - \left[6(1) + 2(1)^2 \right]$$
$$= [12 + 8] - [6 + 2]$$
$$= 20 - 8$$
$$= 12$$

c. Contoh lainnya 1:

$$\int_{1}^{2}\int_{1}^{3} \left(2xy^3 + 3x^2 y^4\right) dx$$

$$I = \int_{1}^{3} \left(2xy^3 + 3x^2 y^4\right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{2} x^2 y^3 + \frac{3}{3} x^3 y^4 \right]_1^3$$

$$= \left[1(3)^2 y^3 + 1(3)^3 y^4\right] - \left[1(1)^2 y^3 + 1(1)^3 y^4\right]$$
$$= \left[9y^3 + 27y^4\right] - \left[y^3 + y^4\right]$$
$$= 8y^3 + 26y^4$$

$$II = \int_1^2 \left[8y^3 + 26y^4\right] dy$$
$$= \left[\frac{8}{4}y^4 + \frac{26}{5}y^5\right]_1^2$$
$$= \left[2y^4 + \frac{26}{5}y^5\right]_1^2$$
$$= \left[2(2)^4 + \frac{26}{5}(2)^5\right] - \left[2(1)^4 + \frac{26}{5}(1)^5\right]$$
$$= \left[32 + \frac{832}{5}\right] - \left[2 + \frac{26}{5}\right]$$
$$= \left[30 + \frac{806}{5}\right]$$
$$= 30 + 161,2$$
$$= 191,2$$

d. Contoh lainnya 2:

$$\int_1^3 \int_1^2 \left(x^2 y^4 + 2x^2 y^2\right) dx\, dy$$

$$I = \int_1^2 \left(x^2 y^4 + 2x^2 y^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 y^4 + \frac{2}{3}x^3 y^2\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{1}{3}(2)^3 y^4+\frac{2}{3}(2)^3 y^2\right]-\left[\frac{1}{3}(1) y^4+\frac{2}{3}(1)^3 y^2\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3} y^4+\frac{16}{3} y^2\right]-\left[\frac{1}{3} y^4+\frac{2}{3} y^2\right]$$

$$=\frac{7}{3} y^4+\frac{14}{3} y^2$$

$$II=\int_1^3\left[\frac{7}{3} y^4+\frac{14}{3} y^2\right] dy$$

$$=\left[\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} \mathrm{y}^5+\frac{14}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathrm{y}^3\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{7}{15} \mathrm{y}^5+\frac{14}{9} \mathrm{y}^3\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{7}{15}(243)+\frac{14}{9}(27)\right]-\left[\frac{7}{15}+\frac{14}{9}\right]$$

$$=\left[\frac{1701}{15}+\frac{378}{9}\right]-\left[\frac{7}{15}+\frac{14}{9}\right]$$

$$=\frac{1694}{5}+\frac{364}{9}$$

$$=338,8+40,44$$

$$=379,24$$

e. Contoh lainnya 3:

$$\int_0^2 \int_0^3\left(3 x^2 y^3+2 x y^2\right) dx\, dy$$

$$I=\int_0^3\left(3 x^2 y^3+2 x y^2\right) dx$$

$$=\left[\frac{3}{3} x^3 y^3+\frac{2}{2} x^2 y^2\right]_0^3$$

$$= \left[x^3y^3 + x^2y^2 \right]_0^3$$
$$= \left[27y^3 + 9y^2 \right] - [0]$$
$$= 27y^3 + 9y^2$$

$$II = \int_0^2 \left(27y^3 + 9y^2 \right) dy$$
$$= \left[\frac{27}{4} y^4 + \frac{9}{3} y^3 \right]_0^2$$
$$= \left[\frac{27}{4}.2^4 + 3.2^3 \right] - \left[\frac{27}{4}.0^4 + 3.0^3 \right]$$
$$= \left[\frac{27}{4}.16 + 24 \right] - [0]$$
$$= \left[\frac{432}{4} + 24 \right]$$
$$= [108 + 24]$$
$$= 132$$

f. Contoh lainnya 4:

$$\int_1^3 \int_1^2 \left(3x^3y + x^2y^4 \right) dxdy$$

$$I = \int_1^2 \left(3x^3y + x^2y^3 \right) dx$$
$$= \left[\frac{3}{4} x^4 y + \frac{1}{3} x^3 y^3 \right]_1^2$$
$$= \left[\frac{3}{4}(2)^4 y + \frac{1}{3}(2)^3 y^3 \right] - \left[\frac{3}{4}(1)^4 y + \frac{1}{3}(1)^3 y^3 \right]$$

$$= \left[\frac{3}{4}(16)\,y + \frac{8}{3}y^3 \right] - \left[\frac{3}{4}(1)\,y + \frac{1}{3}y^3 \right]$$

$$= \left[\frac{48}{4}y + \frac{7}{3}y^3 \right] - \left[\frac{3}{4}y + \frac{1}{3}y^3 \right]$$

$$= \left[\frac{45}{4}y + \frac{7}{3}y^3 \right]$$

$$II = \int_1^3 \left[\frac{45}{4}y + \frac{7}{3}y^3 \right] dy$$

$$= \left[\frac{45}{4}.\frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{3}.\frac{1}{4}y^4 \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{45}{8}y^2 + \frac{7}{12}y^4 \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{48}{8}(3)^2 + \frac{7}{12}(3)^4 \right] - \left[\frac{45}{8}(1) + \frac{7}{12}(1)^4 \right]$$

$$= \left[\frac{45}{8}(9) + \frac{7}{12}(81) \right] - \left[\frac{45}{8}(1) + \frac{7}{12}(1) \right]$$

$$= \left[\frac{360}{8} + \frac{560}{12} \right]$$

$$= 45 + 46{,}67$$

$$= 91{,}67$$

.

g. Contoh untuk fungsi (Stroud, 1994 : 668):

$$\int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + \sin\theta\right) d\theta\, dr$$

$$I = \int_0^2 (3 + \sin\theta)\, d\theta$$

$$= [3\theta - \cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{\pi}{2}\right] - [3(0) - \cos(0)]$$

$$= \left[3\frac{\pi}{2} - 0\right] - [0 - 1]$$

$$= \left[3\frac{\pi}{2} + 1\right]$$

$$II = \int_1^3 \left[3\frac{\pi}{2} + 1\right] dr$$

$$= \left[\frac{3}{2}\pi r + r\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{3}{2}(\pi)(3) + 3\right] - \left[\frac{3}{2}(\pi)(1) + 1\right]$$

$$= [3\pi + 2]$$

h. Contoh lainnya 5:

$$\int_1^3 \int_1^2 (x^2y^2 + 2xy^2)\, dx\, dy$$

$$I = \int_1^2 (x^2y^3 + 2xy^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3y^3 + x^2y^2\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 y^3 + (2)^2 y^2\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 y^3 + (1)^2 y^2\right]$$

$$= \left[\frac{8}{3}y^3 + 4y^2\right] - \left[\frac{1}{3}y^3 + y^2\right]$$

$$= \left[\frac{7}{3}y^3 + 3y^2\right]$$

$$II = \int_1^3 \left(\frac{7}{3}y^3 + 3y^2\right) dy$$

$$= \left[\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}y^4 + 3\cdot\frac{1}{3}y^3\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{7}{12}(3)^4 + (3)^3\right] - \left[\frac{7}{12}(1)^4 + (1)^3\right]$$

$$= \left[\frac{7}{12}\cdot 81 + 27\right] - \left[\frac{7}{12} + 1\right]$$

$$= 72,67$$

10.3 INTEGRAL LIPAT TIGA (TRIPLE INTEGRAL)

a. Contoh 1 (Stroud, 1994 : 669):

$$\int_1^3 \int_{-1}^1 \int_0^2 (x + 2y - z)\, dx dy dz$$

$$I = \int_0^2 (x + 2y - z)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2xy - xz\right]_0^2$$

$$=\left[\frac{1}{2}(2)^2+2(2)y-(2)z\right]-0$$

$$=[2+4y-2z]$$

$$II=\int_{-1}^{1}(2+4y-2z)dy$$

$$=\left[2y+\frac{4}{2}y^2-2yz\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[2(1)+2(1)^2-2(1)z\right]-\left[2(-1)+2(-1)^2-2(-1)z\right]$$

$$=[2+2-2z]-[-2+2+2z]$$

$$=[4-4z]$$

$$III=\int_{1}^{3}(4-4z)dx$$

$$=\left[4z-\frac{4}{2}z^2\right]_{1}^{3}$$

$$=\left[4(3)-2(3)^2\right]-\left[4(1)-2(1)^2\right]$$

$$=[12-18]-[4-2]$$

$$=[-6]-[2]$$

$$=-8$$

b. Contoh lainnya 1:

$$\int_1^2\int_0^2\int_0^3\left(p^2r+rq^2+p^2q^2\right)dp$$

$$I=\int_0^3\left(p^2r+rq^2+p^2q^2\right)dp$$

$$=\left[\frac{1}{3}p^3r+rpq^2+\frac{1}{3}p^3q^2\right]_0^3$$

$$=\left[\frac{1}{3}(3)^3r+r(3)q^2+\frac{1}{3}(3)^3q^2\right]-0$$

$$=\left[\frac{27}{3}+3rq^2+9q^2\right]$$

$$=\left[9r+3rq^2+9q^2\right]$$

$$II=\int_0^2\left(9r+3rq^2+9q^2\right)dq$$

$$=\left[9rq+\frac{3}{3}q^3r+\frac{9}{3}q^3\right]_0^2$$

$$=\left[9r(2)+1(2)^3r+3(2)^3\right]-0$$

$$=\left[18r+8r+24\right]$$

$$=\left[26r+24\right]$$

$$III = \int_1^2 \left(26r + 24)dr\right)$$

$$= \left[\frac{26}{2} r^2 + 24r\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{26}{2}(2)^2 + 24(2)\right] - \left[\frac{26}{2}(1) + 24(1)\right]$$

$$= \left[\frac{104}{2} + 48\right] - \left[\frac{26}{2} + 24\right]$$

$$= \frac{78}{2} + 24$$

$$= 63$$

c. Contoh lainnya 2:

$$\int_1^3 \int_1^2 \int_1^3 \left(x^3 y + x^2 y^2 + xz^2\right) dxdydz$$

$$I = \int_1^3 \left(x^3 y + x^2 y^2 + xz^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 y + \frac{1}{3} x^3 y^2 + \frac{1}{2} x^2 z^2\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{4}(3)^4 y + \frac{1}{3}(3)^3 y^2 + \frac{1}{2}(3)^2 z^2\right] - \left[\frac{1}{4}(1)^4 y + \frac{1}{3}(1)^3 y^2 + \frac{1}{2}(1)^2 z^2\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4} y + \frac{27}{3} y^2 + \frac{9}{2} z^2\right] - \left[\frac{1}{4} y + \frac{1}{3} y^2 + \frac{1}{2} z^2\right]$$

$$= \left[\frac{80}{4} y + \frac{26}{3} y^2 + 4z^2\right]$$

$$= \left[20y + \frac{26}{3} y^2 + 4z^2\right]$$

$$II = \int_1^2 \left[20y + \frac{26}{3}y^2 + 4z^2 \right] dy$$

$$= \left[\frac{20}{2}y^2 + \frac{26}{3}.\frac{1}{3}y^3 + 4yz^2 \right]_1^2$$

$$= \left[10y^2 + \frac{26}{9}y^3 + 4yz^2 \right]_1^2$$

$$= \left[10(2)^2 + \frac{26}{9}(2)^3 + 4(2)z^2 \right] - \left[10(1) + \frac{26}{9}(1)^3 + 4(1)z^2 \right]$$

$$= \left[40 + \frac{208}{9} + 8z^2 \right] - \left[10 + \frac{26}{9} + 4z^2 \right]$$

$$= 30 + \frac{182}{9} + 4z^2$$

$$III = \int_1^3 \left(30 + \frac{182}{9} + 4z^2 \right) dz$$

$$= \int_1^3 \left(30 + 20{,}22 + 4z^2 \right) dz$$

$$= \left[50{,}22z + \frac{4}{3}z^3 \right]_1^3$$

$$= \left[50{,}22(3) + \frac{4}{3}(3)^3 \right] - \left[50{,}22(1) + \frac{4}{3}(1) \right]$$

$$= \left[150{,}66 + \frac{108}{3} \right] - \left[50{,}22 + \frac{4}{3} \right]$$

$$= \left[100{,}44 + \frac{104}{3} \right]$$

$$= [100{,}44 + 34{,}66]$$

$$= 135{,}1$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. Selesaikanlah Integral lipat H berikut ini :

a. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{3}\left(x^3+2y^2\right)dx.dy$

b. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}\left(x^3y2+xy^3\right)dx.dy$

c. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\cos\theta} r\left(\sin\theta\right)dr.d\theta$

2. Selesaikanlah Integral Lipat III berikut ini :

a. $\int_{1}^{2}\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\left(x^2+y^2+z\right)dx.dy.dz$

b. $\int_{1}^{3}\int_{1}^{2}\int_{0}^{1}\left(x^2y^2+2y+z^2\right)dx.d\theta.d\varphi$

c. $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{r}\left(x^2.\sin\theta\right)dx.dy.dz$

d. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{\pi}\left(\sin 2x+\cos x\right)dx.d\theta.dr$

BAB XI

PERSAMAAN DIFERENSIAL

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Diharapkan mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang pembentukan persamaan diferensial; apa itu persamaan diferensial orde I, orde II, dan orde III; serta bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial tersebut.

11.1 PENGERTIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan Diferensial adalah hubungan antara variabel bebas x, variabel tak bebas y, dan satu atau lebih koefisien diferensial y terhadap x (Stroud, 2003).

Misalnya:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y.\sin x = 0$$

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + y.\frac{dy}{dx} + e^{3x} = 0$$

Persamaan diferensial menyatakan hubungan dinamik yang mana maksudnya hubungan tersebut adalah memuat besaran-besaran yang berubah. Oleh karena itu, persamaan diferensial sering muncul dalam persoalan-persoalan ilmu pengetahuan dan teknik. Orde suatu persamaan diferensial ditentukan oleh turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan tersebut.

Contoh :

$x.\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ (adalah contoh persamaan orde 1)

$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$ (adalah contoh persamaan orde 2)

$\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} + e^{2x} = 0$ (contoh persamaan orde 3)

Contoh-contoh lain :

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 10y = \sin 2x$ .... Persamaan orde 2

$x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$ .... Persamaan orde 1

$\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = 1$ .... Persamaan orde 1

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ .... Persamaan orde 2

$(y^3 + 1)\frac{dy}{dx} - xy^2 = x$ .... Persamaan orde 1

11.2 PEMBENTUKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Dalam praktiknya, persamaan diferensial dapat dibentuk dari pengkajian persoalan fisis yang dinyatakannya. Secara matematis, persamaan diferensial muncul bila ada konstanta sembarang dieleminasikan dari suatu fungsi tertentu yang diberikan.

1. **Contoh 1**:

$$y \quad = A \sin x + B \cos x, \text{ A dan B adalah konstanta}$$

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x + B \sin x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A \sin x + B \cos x$$

setelah dua kali diferensial, ternyata persamaan di atas sama tepat dengan persamaan semula hanya tandanya yang berlawanan.

Jadi, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -y \Rightarrow \dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ .... persamaan orde 2.

2. **Contoh 2** :

Diketahui fungsi $y = x + \dfrac{A}{x}$, bentuklah persamaan diferensial dari fungsi tersebut.

Penyelesaian :

$$y = x + \frac{A}{x} \quad \text{.............................} \ 1$$

$$y = x + A.x^{-1} \quad \text{.........................} \ 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - A.x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{A}{x^2} \quad \text{..........................} \ 3$$

dari persamaan 3

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{A}{x^2} \text{ .... subtitusi persamaan 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x(y-x)}{x^2}$$

$$= 1 - \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} - \frac{y-x}{x} = \frac{2x-y}{x}$$

Jadi, $x.\frac{dy}{dx} = 2x - y$ .... persamaan orde 1

3. **Contoh 3** :

   Diketahui : fungsi $y = Ax^2 + Bx$

   Ditanya : Bentuklah persamaan diferensial dari fungsi di atas

   Penyelesaian:

$$y = A\,x^2 + B\,x \text{ .... i}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B \text{ .... ii}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2A \text{ .... iii}$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} \text{ .... iv}$$

Substitusi persamaan ii dan iv

$$\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + B$$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + B$$

$$\because B = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} \text{ .... v}$$

Apabila persamaan i di substitusikan pada iv dan v maka akan didapatkan sebagai berikut:

$$y = Ax^2 + Bx$$

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\because y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2\frac{d^2y}{dx^2} \text{ .... persamaan orde 2}$$

fungsi dengan 1 konstanta sembarang akan menghasilkan persamaan orde 1, sedangkan fungsi dengan 2 konstanta sembarang akan menghasilkan persamaan orde 2.

11.3 PEMECAHAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Untuk memecahkan diferensial, harus dicari fungsi terlebih dahulu yang memenuhi persamaan itu dan membuat persamaan itu benar. Hal ini berarti harus diolah persamaan tersebut sedemikian rupa sehingga semua koefisien diferensialnya hilang dan tinggallah hubungan antara y dan x.

11.3.1 Dengan Integral Langsung

Jika persamaannya dapat disusun dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = f\left(x\right)$ maka persamaan ini dapat dipecahkan dengan integrasi sederhana.

a. contoh 1 :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 5$$
$$y = \int \left(3x^2 - 6x + 5\right) dx$$
$$= x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 5x + c$$
$$\because y = x^3 - 3x^2 + 5x + c$$

b. Contoh 2 :

$$x\frac{dy}{dx} = 5x^3 + 4$$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^2 + \frac{4}{x}$$
$$y = \int \left(5x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$$
$$\because y = \frac{5}{3}x^3 + 4\ln x + c$$

11.3.2 Dengan Pemisahan Variabel

Jika persamaan yang diberikan berbentuk $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ maka variabel y yang muncul di ruas kanan mencegah kita memecahkannya dengan integrasi langsung. Oleh karena itu, kita harus mencari cara pemecahan yang lain, misalkan ditinjau persamaan dalam bentuk:

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot f(y)$ dan dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{f(y)}$, yaitu persamaan yang ruas kanannya dapat dinyatakan sebagai perkalian atau pembagian fungsi x dan fungsi $y, f(y)$. $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

a. **Contoh 1** :

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+1}$, persamaan ini kita dapat tulis kembali dalam persamaan : $(y+1)\frac{dy}{dx} = 2x$ sekarang kita integrasikan kedua ruasnya terhadap *x*:

$$\int (y+1)\frac{dy}{dx} \cdot dx = \int 2x\,dx$$

$$\int (y+1)\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + y = x^2 + c$$

b. **Contoh 2** :

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$$

pada contoh tersebut kita ubah dulu menjadi :

$$\frac{1}{(1+y)}\frac{dy}{dx} = (1+x)$$

kemudian integrasikan kedua ruasnya terhadap x :

$$\frac{1}{(1+y)}\frac{dy}{dx}\cdot dx = \int (1+x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+y)}dy = \int (1+x)\,dx$$

$$\ln(1+y) = x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

c. **Contoh 3** :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+y)}{(2+x)}$$

$$\frac{1}{(1+y)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2+x)}$$ .... integrasikan terhadap x

$$\int \frac{1}{(1+y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{1}{(2+x)}dx$$

$$\int \frac{1}{(1+y)}dy = \int \frac{1}{(2+x)}dx$$

$$\ln(1+y) = \ln(2+x) + c$$

d. **Contoh 4** :

$$xy\frac{dy}{dx}=\frac{\left(x^2+1\right)}{\left(y+1\right)}$$

$$xy\,dy=\frac{\left(x^2+1\right)}{\left(y+1\right)}dx$$

$$y\left(y+1\right)dy=\frac{\left(x^2+1\right)}{x}dx$$

$$\int y\left(y+1\right)dy=\int\frac{\left(x^2+1\right)}{x}dx$$

$$\int y\left(y^2+y\right)dy=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^1+\ln x+c$$

e. **Contoh 5** :

$$x\frac{dy}{dx}=y+xy$$

$$x.dy=y+xy\,dx$$

$$x.dy=y\left(1+x\right)dx$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{\left(1+x\right)}{x}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}+\int dx$$

$$\ln y=\ln x+x+c$$

LATIHAN SOAL-SOAL:

Buatlah persamaan Diferensial berikut:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = (y+2)(x+1)$
3. $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} = y + 3$
4. $\dfrac{dy}{dx} = xy - y$
5. $\dfrac{\sin x}{(1+y)} \dfrac{dy}{dx} = \cos x$

BAB XII

INTEGRAL VEKTOR

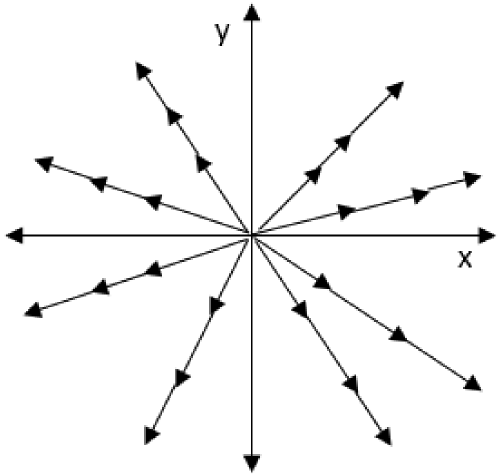
TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Mahasiswa bisa memahami dan mengerti tentang integral vektor; mempelajari contoh soal yang ada; serta bisa mencoba soal yang telah disediakan.

12.1 PENGERTIAN INTEGRAL VEKTOR

Medan Vektor dapat diartikan hampir sama dengan medan-medan yang lain, yang muncul secara alamiah seperti medan listrik, medan magnet, medan gaya, dan medan gravitasi. Kita hanya memandang kasus di mana medan-medan ini tidak tergantung pada waktu yang kita sebut dengan '*MEDAN VEKTOR MANTAP'*.

Berlawanan dengan suatu medan vektor suatu fungsi F yang mengaitkan suatu bilangan dengan uap titik di dalam ruang disebut medan skalar fungsi yang memberikan suhu pada tiap titik akan merupakan sebuah contoh fisis yang bagus dari suatu medan skalar (Stroud, 2003).



$$F(x,y)=\frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$F(x,y)$ adalah suatu vektor yang mengarah dalam arah yang sama, seperti $xi+yj$ yang menjauhi titik asal.

12.2 DIVERGENSI DAN CURL DARI MEDAN VEKTOR (STROUD,2003)

Misalkan $F = Mi + Nj + Pk$ adalah medan vektor:

$$Div\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$Curl\ F = \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial Z}\right)i + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)k$$

$$\nabla = operator$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

Bilamana ∇ beroperasi pada suatu fungsi f, ia akan menghasilkan gradien, yaitu:

$$\nabla\ f = gradien\ f$$

$$\nabla . F = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \left(Mi + Nj + Pk \right)$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= Div\ f$$

$$\nabla\ x\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= i \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + i \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

Jadi, grad F, div F, dan curl F semuanya dapat ditulis dalam bentuk operator ∇. Untuk membantu menggambarkan divergensi dan curl maka perlu diberikan suatu contoh fisis, yaitu jika F menyatakan medan kecepatan untuk fluida, divergensi F pada titik P akan mengukur kecenderungannya fluida tadi menyimpan sejauh P(div F>0) atau mengakumulasikan terhadap P(div P<0). Dalam kata lain, curl F memilih arah sumbu yang mengelilingi fluida (curl) sangat cepat dan $|curl\ F|$ akan mengukur kecepatan rotasi itu.

1. **Contoh 1** :

   Tentukanlah div F dan curl F dari fungsi sebagai berikut:

   $$F(x, y, z) = (x^2\ y\ z)i + (3x\ y\ z^3)j + (x^2 - z^2)k$$

   Penyelesaian :

$$Div\ F \ = \nabla \cdot F = (2x\ y\ z) + (3x\ z^3) - (2z)$$

$$Curl\ F = \nabla\ x\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 yz & 3xyz^3 & x^2 - z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z^2) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(3xyz^3) \right\} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - z^2) \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 yz) \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) - \frac{2}{2y}(x^2 yz) \right\}$$

$$\nabla\ x\ F = (-9xyz^2)i - (2x - x^2 y) + (3yz^3 - x^2 z)k$$

2. **Contoh 2** :

   Tentukan div F dan curl F dari fungsi:
   $F(x, y, z) = (xy^3 z)i + (2x^2 yz^2)j + (x^3 - z^2)k$

   Penyelesaian:

$$Div\ F \ = \nabla \cdot F = (y^3 z) + (2x^2 z^2) + (-2z)$$

$$Curl\ F = \nabla \cdot F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^3z & 2x^2yz^2 & x^3 - z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(0 - 4x^2yz\right)i - \left(3x^2 - xy^3\right)j + \left(4xyz^2 - 3xy^2z\right)k$$

$$= \left(-4x^2yz\right)i - \left(3x^2 - xy^3\right)j + \left(4xyz^2 - 3xy^2z\right)k$$

12.3 INTEGRAL GARIS (STROUD, 2003)

Integral Garis disebut juga dengan integral curva yang dapat ditulis sebagai $\int_c f(x, y)ds$, integral ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{\int_c f(x, y)ds = \int_a^b f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{\left[x^1(t)\right]^2 + \left[y^1(t)\right]^2 dt}}$$

1. **Contoh 1** :

   Hitunglah Integral Curva dari fungsi sebagai berikut : $\int_c x^2 yds$ dengan C ditentukan oleh persamaan parameter $x = 3\ cos\ t$ dan $y = 3\ sin\ t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

   Penyelesaian :

   $$x = 3\ cost\ t$$
   $$dx = -3\ sin\ t\ dt$$

$$\int_c x^2 y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t)^2 (3\sin t)\sqrt{(-3\sin t)^2 (3\cos t)^2 dt}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9\cos^2 t\right)(3\sin t)\sqrt{\left(9\sin^2 t\right) + \left(9\cos^2 t\right)dt}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 27(\cos t)(\sin t)\sqrt{9\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt}$$

$$= 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)(\sin t)$$

$$= -\frac{81}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{81}{3}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^3 - (\cos 0)^3\right]$$

$$= -\frac{81}{3}[0-1]$$

$$= 27$$

2. **Contoh 2** :

Hitung Integral curva dari fungsi sebagai berikut : $\int_c f(x, y)ds$ dengan C ditentukan oleh persamaan $x = sin\ t$ dan $y = cos\ t$, $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}$

Penyelesaian :

$x = sin\ t \qquad\qquad y = cos\ t$

$dx = cos\ t\ dt \qquad\qquad dy = -sin\ t\ dt$

$\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^3 (\cos t) \sqrt{(\sin t)^2 + (-\sin t)^2}\ dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\ dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin^4 t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^4\right] - \left[\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^4\right]$$

$$= \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{4}(0,8660)^4$$

$$= \frac{1}{4} - 0,1406$$

$$= 0,1094$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. Tentukanlah Div F dan curl F dari fungsi berikut:

$$F(x,\ y,\ z) = (x^3y^2z)i + (2x\ y^2z^3)\ j + (3x^2 +\ z^3)k$$

2. Tentukanlah div F dan curl F dari fungsi berikut:

$$F(x,\ y,\ z) = (2x^4y\ z^3)i + (x^3y^4z)\ j + (x^3 + 2x^4)k$$

3. Hitunglah integral curva dari fungsi sebagai berikut:

   $\int_c x^2 yds$ dengan C ditentukan oleh persamaan parameter $x = 5\ sin\ t$ dan $y = 5\ cos\ t$, $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

BAB XIII

MATRIKS

TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Mahasiswa dapat memahami dan mengerti tentang matriks, macam-macam matriks, dan ordo matriks; mengerti apa itu transpose matriks, invers matriks untuk ordo 2×2, dan invers matriks 3×3; serta bisa menyelesaikan soal-soal yang ada.

13.1 PENGERTIAN MATRIKS

Matriks adalah suatu susunan bilangan-bilangan yang berbentuk segi empat atau persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berorde m×n. Bilangan-bilangan yang terdapat dalam susunan matriks disebut elemen-elemen matriks (Stroud, 2003).

Contoh:

Susunan yang berikut disebut matriks.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a b c d

Seperti yang ditujukan oleh contoh-contoh ini yang mana ukuran matriks bermacam-macam. Ukuran sebuah matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horizontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat pada matriks. Angka pertama selalu menunjukan banyaknya baris dan angka kedua menunjukan banyaknya kolom.

Jadi, matriks a mempunyai 3 baris dan 2 kolom
matriks b mempunyai 1 baris dan 4 kolom
matriks c mempunyai 3 baris dan 3 kolom
matriks d mempunyai 2 baris dan 1 kolom

Oleh karena itu, *orde* matriks-matriks di atas adalah sebagai berikut: 3×2, 1×4, 3×3, dan 2×1.

Untuk menyatakan matriks biasanya digunakan *huruf besar*, sedangkan untuk menyatakan elemen-elemen matriks biasanya digunakan *huruf kecil*.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Bila kita membicarakan tentang matriks maka kita sering menyebut kuantitas matriks sebagai skalar, semua skalar akan merupakan bilangan real. Dua buah matriks dikatakan sama jika kedua matriks tersebut mempunyai ukuran yang sama dan elemen-elemen yang terletak juga sama.

13.2 MACAM-MACAM MATRIKS

1. Matriks Nol adalah suatu matriks yang semua elemen-elemennya adalah nol.

   Contoh :

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Bujur Sangkar adalah matriks m x n atau banyak baris = banyaknya kolom

   Contoh :

   $$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Matriks Diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol, kecuali elemen pada diagonal utamanya.

   Contoh :

   $$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Matriks satuan/Matriks Indentitas adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya = 1

   Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Matriks Skalar adalah matriks yang elemen-elemen diagonalnya sama.

   Contoh :

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

13.3 OPERASI MATRIKS

13.3.1 PENJUMLAHAN MATRIKS

Penjumlahan matriks A dengan matriks b diperoleh dengan menjumlahkan setiap elemen A dengan elemen dari B yang seletak.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+0 \\ 3+1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

$$C + D = \begin{pmatrix} a + 2a & b + b \\ c + 3c & 3d + d \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + a & 1 + b \\ 3 + c & 4 + d \end{pmatrix}$$

13.3.1.1 Sifat-sifat penjumlahan matriks

Untuk matriks A,B,C, dan matriks O yang berorde sama maka berlaku sifat sebagai berikut:

1. Sifat Komutatif : A + B = B + A
2. Sifat Asosiatif : A + (B + C) = (A + B) + C
3. Terdapat suatu indentitas penjumlahan yaitu matriks O sehingga A + O = O + A = A, sifat netral.

13.3.2 Pengurangan Matriks

Penggunaan matriks A dengan matriks B dapat diperoleh dengan menjumlahkan matriks A dengan lawan dari matriks B.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - C = A + (-C)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

13.3.3 PERKALIAN MATRIKS

Untuk menyelesaikan perkalian suatu matriks maka haruslah banyak baris matriks A = banyaknya matriks B atau sebaliknya.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \; x \; B = \begin{pmatrix} 2\,x\,1 & + & 1\,x\,2 \\ 3\,x\,1 & + & 5\,x\,2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2 \\ 3+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$A \; x \; C = \begin{pmatrix} 2\,x\,5 & + & 1\,x\,2 & & 2\,x\,7 & + & 1\,x\,0 \\ 3\,x\,5 & + & 5\,x\,2 & & 3\,x\,7 & + & 5\,x\,0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10+2 & 14+0 \\ 15+10 & 21+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 25 & 21 \end{pmatrix}$$

13.3.4 TRANSPOSE MATRIKS

Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan maka matriks baru yang terbentuk adalah transpose dari matriks semula dan diberi simbol A^T.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

13.3.5 INVERS MATRIKS UNTUK ORDO 2×2

Invers matriks dapat dicari dengan menukarkan letak unsur-unsur utama dan mengubah tanda unsur-unsur diagonal lainnya. Invers matriks dapat disimbolkan dengan A^{-1}.

Contoh: Invers Matriks dengan orde 2×2

a. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a\,x\,d - b\,x\,c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{3\,x\,4 - 1\,x\,2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

c. $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{3\,x\,3 - 1\,x\,6}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9 - 6}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} & \frac{-6}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{3}{3} \end{pmatrix}$$

Menghitung Invers Matriks yang Berorde 3×3, ada beberapa langkah yang harus dilakukan, antara lain mencari dulu matriks kofaktor. Selanjutnya, dari matriks kofaktor kita menentukan adjoint matriks, kemudian kita mencari determinan matriks baru invers matriks 3×3.

Contoh soal dan penyelesaian:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Matriks Kafaktor}$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$a11 = +\ (1.2\ -\ 1.0) = 2$ $\qquad a12 = -\ (3.2\ -\ 4.0) = -6$

$a21 = -(1.2\ -\ 1.2) = 0$ $\qquad a22 = +\ (0.2\ -\ 4.2) = -8$

$a31 = +\ (1.0\ -\ 1.2) = -2$ $\qquad a32 = -\ (0.0\ -\ 3.2) = 6$

$a13 = +\ (3.1\ -\ 4.1) = -1$

$a23 = -\ (0.1\ -\ 4.1) = 4$

$a33 = +\ (0.1\ -\ 3.1) = -3$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & -8 & 6 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Det\ A &= 0(1.2 - 1.0) - 1(3.2\ -\ 4.0) + 2\ (3.1 - 4.1) \\ &= 0(2) - 1(6) + 2(-1) \\ &= 0 - 6 - 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \ A} \cdot ajd\ (A)$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -6 & -8 & +6 \\ -1 & +4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{8} & 0 & \frac{2}{8} \\ +\frac{6}{8} & +\frac{8}{8} & -\frac{6}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

13.4 MENGHITUNG INVERS MATRIKS YANG BERORDE 3 × 3

1. **Contoh 1:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Matriks Kafaktor}$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$a11 = + \left(0.4 - 7.3\right) = -21 \qquad a12 = -\left(4.4 - 1.3\right) = -13$$
$$a21 = -\left(1.4 - 7.2\right) = 10 \qquad a22 = +\left(3.4 - 1.2\right) = 10$$
$$a31 = + \left(1.3 - 0.2\right) = 3 \qquad a32 = -\left(3.3 - 4.2\right) = -1$$
$$a13 = +\left(4.7 - 1.0\right) = 28$$
$$a23 = -\left(3.7 - 1.1\right) = -20$$
$$a33 = +\left(3.0 - 4.1\right) = -4$$

Selanjutnya, kita menentukan Adjoint dari matriks tersebut, dengan cara mengubah Transpose dari matriks kofaktornya sehingga adjoint matriknya adalah sebagai berikut.

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & -1 \\ 28 & -20 & -4 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers matriks 3×3, ada beberapa langkah yang harus kita tentukan di antaranya, setelah didapat adjoint matriks selanjutnya kita menentukan determinan matriks, dalam hal ini ada 3 cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan, tetapi yang perlu kita pilih salah satu cara saja. Setelah mendapatkan determinan baru kita menghitung Invers matriks.

$$\begin{aligned} Det\ A &= +3\ \left(0.4 - 7.3\right) - 4\left(1.4 - 7.2\right) + 1\left(1.3 - 0.2\right) \\ &= +3\left(0 - 21\right) - 4\left(4 - 14\right) + 1\left(3 - 0\right) \\ &= -63 + 40 + 3 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Invers matriks kita hitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \quad A} \cdot ajd\ (A)$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -21 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & -1 \\ 28 & -20 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{21}{20} & -\frac{10}{20} & -\frac{3}{20} \\ \\ \frac{13}{20} & -\frac{10}{20} & \frac{1}{20} \\ \\ -\frac{28}{20} & \frac{20}{20} & \frac{4}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{20} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{20} \\ \\ \frac{13}{20} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{20} \\ \\ -\frac{28}{20} & -\frac{1}{1} & \frac{4}{20} \end{pmatrix}$$

13.4.1 Menghitung Invers Matriks yang Berorde 3×3

1. **Contoh lain:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad \text{Matriks Kafaktor}$$

$$= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$a11 = + \ (0.2 - \ 1.1) = -1 \qquad a12 = -(3.2 - 5.1) = -1$

$a21 = -(1.2 - 1.6) = 4 \qquad a22 = +(4.2 - 5.6) = -24$

$a31 = + \ (1.1 - 0.6) = 1 \qquad a32 = -(4.1 - 3.6) = 14$

$a13 = +(3.1 - 5.0) = 3$

$a23 = -(4.1 - 5.1) = 1$

$a33 = +(4.0 - 3.1) = -3$

Selanjutnya, kita menentukan Adjoint dari matriks tersebut, dengan cara mengubah Transpose dari matriks kofaktornya sehingga adjoint matriknya adalah sebagai berikut.

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & -24 & 14 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers matriks 3×3 ada beberapa langkah yang harus kita tentukan di antaranya, setelah didapat adjoint matriks selanjutnya ditentukan determinan matriks, dalam hal ini ada 3 cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan, tetapi yang perlu kita pilih salah satu cara saja. Setelah mendapatkan determinan baru kita menghitung Invers matriks.

$$\begin{aligned} Det\ A &= +\ 4\ (0.2 - 1.1) - 1(3.2 - 5.1) + 6(3.1 - 5.0) \\ &= +4(0-1) - 1(6-5) + 6(3-0) \\ &= -4 - 1 + 18 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Invers matriks dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det \quad A} \cdot ajd\ (A)$$

$$= -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & -24 & 14 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{24}{13} & \frac{14}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

BAB XIV

DETERMINAN

TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Mahasiswa bisa memahami dan mengerti tentang determinan, determinan untuk matriks yang berorde 2×2, serta determinan untuk matriks dengan orde 3×3 yang mana untuk determinan berorde 3×3 dapat dikerjakan dengan 3 metode.

14.1 FUNGSI DETERMINAN

Kita semua mengenal fungsi-fungsi seperti $f(x)= sin\ x$ dan $f(x) = x^2$ yang menghubungkan suatu bilangan real $f(x)$ dengan suatu nilai real dari perubah x. Hal ini dikarenakan x dan $f(x)$ dianggap hanya bernilai real, fungsi-fungsi seperti itu disebut sebagai 'fungsi bernilai real dari suatu perubah real'.

Pada bagian ini, kita akan menelaah 'fungsi determinan' yang merupakan suatu fungsi bernilai real dari suatu bilangan real $f(x)$ dengan suatu matriks x. Apa yang kita lakukan dalam fungsi-fungsi determinan akan mempunyai penerapan penting pada teori sistem persamaan linear, akan membawa kita pada suatu rumus eksplisit untuk invers dari suatu matriks yang dapat dibalik.

14.2 DETERMINAN ORDE 2

1. **Contoh**:

$$A = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix}$$

Untuk menghitung determinan dari matriks A (atau disingkat det A) adalah: det A = al.b2 - a2.b1.

2. **Contoh lain**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Maka, $det\ A = 3\ (-2) - 4.1$

$= -6 - 4$

$= -10$

$det\ B = 6.2 - 1.5$

$= 12 - 5$

$= 7$

14.3 DETERMINAN ORDE 3

Determinan orde 3 merupakan penyelesaian matriks yang berorde 3×3

1. **Contoh 1** :

$$A = \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian determinan orde 3 dapat dihitung dalam berbagai cara, seperti yang akan dijelaskan dalam contoh-contoh berikut ini.

14.3.1 Penyelesaian Determinan Orde 3 dengan Cara Sarrus

1. **Contoh 1** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{(1.5.9) + (2.6.7) + (3.-4.-8)\} - \{(2.-4.9) + (1.6.-8) + (3.5.7)\} \\ &= (45) + (84) + (96) + (105) - (-48) - (-72) \\ &= 240 \end{aligned}$$

2. **Contoh 2** :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{(4.0.8)+(7.8.0)+(0.4.7)\}-\{(0.0.0)+(4.8.7)+(7.4.8)\} \\ &= 0+0+0-0-224-224 \\ &= -448 \end{aligned}$$

3. **Contoh 3** :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{(2.5.2)+(1.1.1)+(2.3.4)\}-\{(1.5.2)+(4.1.2)+(2.3.1)\} \\ &= 20+1+24-10-6-6 \\ &= 21 \end{aligned}$$

14.3.2 Penyelesaian Determinan Orde 3 dengan Cara Kofaktor

Untuk menghitung determinan orde 3, kita tuliskan elemen-elemen dari baris yang atas kemudian masing-masing kita kalikan dengan minornya dan kita berikan tanda plus (+) dan minus (-) bergantian pada suku-sukunya.

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c \\ a2 & b2 & 1 \\ a3 & b3c3 & c2 \end{pmatrix} = a1\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} - b1\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} + c1\begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya, kita sudah tahu bagaimana menyelesaikan determinan orde ke 2, yaitu dengan mengalikannya secara diagonal.

a. Contoh 1 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1(5.8-4.7)-3(4.8-2.7)+2(4.4-2.5) \\ &= 1(40-28)-3(32-14)+2(16-10) \\ &= 1(12)-3(18)+2(6) \\ &= 12-54+12 \\ &= -30 \end{aligned}$$

b. Contoh 2 :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 3(6.2-9.7)-2(4.2-2.7)+5(4.9-2.6) \\ &= 3(12-63)-2(8-14)+5(36-12) \\ &= 3(-51)-2(-6)+5(24) \\ &= -153+12+120 \\ &= -21 \end{aligned}$$

c. Contoh 3 :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(6.1-9.3)-7(4.1-8.3)+5(4.9-8.6) \\
&= 2(6-27)-7(4-24)+5(36-48) \\
&= 2(-21)-7(-20)+5(-12) \\
&= -42+140-60 \\
&= 38
\end{aligned}$$

Jadi, untuk menghitung determinan bisa dilakukan dengan 3 cara, yaitu:

1) Cara Sarruss
2) Cara Kofaktor (dari atas)
3) Cara Kofaktor (dari samping)

a. Contoh lain 1:

1) Cara Sarruss

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(3.2.2)+(7.5.3)+(1.4.1)\}-\{(7.4.2)+(3.5.1)+(1.2.3)\} \\
&= (12+105+4)-(56+15+6) \\
&= 44
\end{aligned}$$

2) **Cara Kofaktor (atas)**

$$\det A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= +3\left(2\,.\,2 - 1\,.\,5\right) - 7\left(4\,.\,2 - 3\,.\,5\right) + 1\left(4\,.\,1 - 3\,.\,2\right) \\
&= +3\left(4-5\right) - 7\left(8-15\right) + 1\left(4-6\right) \\
&= +3\left(-1\right) - 7\left(-7\right) + 1\left(-2\right) \\
&= -3 + 49 - 2 \\
&= 44
\end{aligned}$$

3) **Cara Kofaktor (samping)**

$$\det A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = +3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \quad +3\left(2\,.\,2 - 1\,.\,5\right) - 4\left(7\,.\,2 - 1\,.\,1\right) + 3\left(7\,.\,5 - 2\,.\,1\right) \\
&= \quad +3\left(4-5\right) - 4\left(14-1\right) + 3\left(35-2\right) \\
&= \quad +3\left(-1\right) - 4\left(13\right) + 5\left(33\right) \\
&= \quad -3 - 52 + 99 \\
&= \quad 44
\end{aligned}$$

b. Contoh lain 2:

1) **Cara Sarruss**

$$B \quad = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -9 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\ B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 & 4 & -7 \\ -9 & 1 & 0 & -9 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \{(4.1.1)+(-7.0.6)+(-6.-9.2)\} - \\ &\quad \{(-7.-9.1)+(4.0.2)+(-6.1.6)\} \\ &= (4+0+108)-(63+0-36) \\ &= 85 \end{aligned}$$

2) Cara Kofaktor (atas)

$$\det B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -9 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= +4\,(1.1-2.0)+7\,(-9.1-6.0)-6\,(-9.2-6.1) \\ &= +4\,(1-0)+7\,(-9-0)-6\,(-18-6) \\ &= +4\,(1)+7\,(-9)-6\,(-24) \\ &= 4-63+144 \\ &= 85 \end{aligned}$$

3) Cara Kofaktor (samping)

$$\det B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -9 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= +4\,(1.1-2.0)+9\,(-7.1-2.-6)+6\,(-7.0-1.-6) \\ &= +4\,(1-0)+9\,(-7+12)+6\,(0+6) \\ &= +4\,(1)+9\,(5)+6\,(6) \\ &= 4+45+36 \\ &= 85 \end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. Hitunglah Determinan dari matriks berikut!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Hitunglah Determinan dengan cara Sarrus!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Hitunglah Determinan dengan cara Kofaktor!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 4 & 11 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Buktikanlah apakah determinan dengan cara Sarrus sama hasilnya dengan cara Kofaktor?
5. Selesaikanlah invers matriks berikut ini dengan menggunakan cara Adjoin!

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

BAB XV

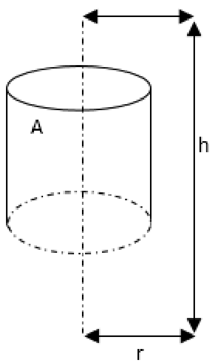
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL

TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Diharapkan mahasiswa bisa mengerti dan mempelajari persamaan diferensial Parsial; bisa menyelesaikan koefisien diferensial pertama serta koefisien diferensial kedua, baik untuk fungsi aljabar maupun untuk fungsi trigonometri; serta bisa menyelesaian soal-soal yang telah diselesaikan.

15.1 PENGERTIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL (STROUD, 2003:300-307)

Untuk memahami apa itu diferensial, marilah kita melihat contoh berikut ini. Tinjau luas permukaan selimut silinder $A = 2r\ h$. A adalah fungsi r dan h sehingga kita dapat mencari $\frac{\partial A}{\partial r}$ dan juga $\frac{\partial A}{\partial h}$.



Untuk memperoleh $\frac{\partial A}{\partial r}$, kita diferensialkan fungsi A terhadap r dengan menganggap semua simbol yang lain konstan. Untuk memperoleh $\frac{\partial A}{\partial h}$, kita diferensialkan fungsi terhadap h dengan menganggap semua simbol yang lain konstan.

Jadi, jika $A = 2\pi rh$ maka $\frac{\partial A}{\partial r} = 2\pi h$ dan $\frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$. Tentu saja kita tidak harus terbatas hanya pada besaran silinder. Hal yang sama berlaku untuk sembarang fungsi dengan 2 variabel bebas atau lebih.

15.2 KOEFISIEN DIFERENSIAL PARSIAL PERTAMA (STROUD, 2003).

$Z = x^2y^2$, di sini Z merupakan fungsi dari x dan y sehingga dapat mencari $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$. Dalam menentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$, kita diferensialkan Z terhadap x dengan menjaga y konstan untuk mencari $\frac{\partial z}{\partial y}$ kita dapat diferensialkan Z terhadap y dengan menjaga x konstan. Jadi, harga-harga tersebut adalah sebagai berikut:

$$Z = x^2y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2x^2$$

Untuk lebih memahami lagi, marilah kita melihat beberapa contoh berikut ini.

1. **Contoh 1** :

$$Z = x^2 + xy + y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 0 = 2x + y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + x + 2y = x + 2y$$

Tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

2. **Contoh 2** :

$$Z = (2x - y)(x + 3y)$$

tentukan $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$

Bentuk ini merupakan bentuk perkalian yang mana aturan perkalian dapat diterapkan di sini, dengan mengingat dalam mencari $\frac{\partial z}{\partial x}$, y dijaga konstan dalam mencari $\frac{\partial z}{\partial y}$ sehingga x dijaga konstan.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= (2x - y)(1 + 0) + (x + 3y)(2 - 0) \\ &= 2x - y + 2x + 6y \\ &= 4x + 6y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= (2x - y)(0 + 3) + (x + 3y)(0 - 1) \\ &= 6x - 3y - x - 3y \\ &= 5x - 6y\end{aligned}$$

3. **Contoh 3** :

$Z = \dfrac{2x - y}{x + y}$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Bentuk ini merupakan bentuk pembagian dengan menggunakan aturan pembagian sehingga dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)(2-0)-(2x-y)(1+0)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{2x+2y-2x+y}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y)(0-1)-(2x-y)(0+1)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x-y-2x+y}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{-3y}{(x+y)^2}$$

4. **Contoh 4** :

$Z = sin(3x + 2y)$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cos(3x+2y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(3x+2y)$$

$$= cos(3x+2y) \cdot (3)$$

$$= 3\, cos(3x+2y)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= cos\left(3x+2y\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(3x+2y\right)\\
&= cos\left(3x+2y\right)\cdot\left(2\right)\\
&= 2\,cos\left(3x+2y\right)
\end{aligned}$$

5. **Contoh 5** :

   $Z=\dfrac{Sin\left(3x+2y\right)}{xy}$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x\,.\,Cos\left(3x+2y\right)-Sin\left(3x+2y\right)}{x^2y}$$

   $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\,.\,Cos\left(3x+2y\right)-Sin\left(3x+2y\right)}{xy^2}$$

15.3 KOEFISIEN DIFERENSIAL PARSIAL KEDUA (STROUD, 2003)

Tinjau hubungan $z=3x^2+4xy-5y^2$

maka $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x+4y$

dan

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4x-10y$$

Pernyataan $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x+4y$, masih merupakan fungsi x dan y. Oleh karena itu, kita dapat mencari koefisien diferensial parsialnya terhadap x maupun y. Jika kita diferensialkan secara parsial terhadap x akan diperoleh:

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\}$ dan berikut ini sering dituliskan sebagai $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Jadi,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{6x + 4y\}$$
$$= 6$$

Jadi, kita differensialkan secara parsial terhadap y maka diperoleh :

$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$ dan berikut ini sering dituliskan sebagai $\frac{\partial^2 z}{\partial y . \partial x}$

Jadi,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\{6x + 4y\}$$
$$= 4$$

Kedua bentuk diatas dikenal sebagai koefisien diferensial parsial kedua Z terhadap x dan y. Dari keterangan di atas, untuk contoh tersebut dapat kita selesaikan sebagai berikut:

$$z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$$

tentukan sebagai berikut :

$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 4y$
2. $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - 10y$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{6x + 4y\}$

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\{4x - 10y\}$

$= -10$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\{4x - 10y\}$

$= 4$

6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\{6x + 4y\}$

$= 4$

Dalam hal ini perlu diingat bahwa:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\right\}$, demikian juga $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\}$

1. Contoh lainnya 1:

$Z = 3x^4 y^3 + 2\, x^2 y^2 + y^4$ tentukan sebagai berikut :

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

penyelesaian sebagai berikut:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3 y^3 + 4xy^2 + 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 3x^4 + 2y2x^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{12x^3 y^3 + 4xy^2 + 0\}$$

$$= 36x^2 y^3 + 4y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{3y^2 3x^4 + 2y2x^2 + 4y^3\right\}$$
$$= 6y3x^4 + 2.2x^2 + 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{3y^2 3x^4 + 2y2x^2 + 4y^3\right\}$$
$$= 3y^2 12x^3 + 2y4x + 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{12x^3 y^3 + 4xy^2\right\}$$
$$= 12x^3 3y^2 + 4y^2$$

2. Contoh lainnya 2:

$$Z = 2x^3 y^4 + x^3 y^2 + x^4$$

tentukan sebagai berikut:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

penyelesaian sebagai berikut:

a. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 y^4 + 3x^2 y^2 + 4x^3$

b. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 2x^3 + 2yx^3 + 0$

c. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{6x^2 y^4 + 3x^2 y^2 + 4x^3\right\}$

$$= 12xy^4 + 6xy^2 + 12x^2$$

d. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{4y^3 2x^3 + 2yx^3 + 0\right\}$

$= 12y^2 2x^3 + 2.x^3$

e. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{4y^3 2x^3 + 2yx^3\right\}$

$= 6x^2 4y^3 + 3x^2 2y$

f. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{6x^2 y^4 + 3x^2 y^2 + 4x^3\right\}$

$= 4y^3 6x^2 + 2y3x^2 + 0$

Ada beberapa contoh dari bentuk perkalian, seperti berikut ini.

1. Contoh lainnya 1:

$Z = \left(2\,x^2 y - y\right)\left(x - y^2\right)$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

penyelesaian:

$$Z = \left(2\,x^2 y - y\right)\left(x - y^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= (4x\,y - 0)\left(x - y^2\right) + (1 - 0)\left(2x^2 y - y\right) \\
&= (4x^2 y - 4x\,y^3) + (\,2x^2 y - y) \\
&= 6x^2 y - 4xy^3 - y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(2x^2 - 1\right)\left(x - y^2\right) + (0 - 2y)\left(2x^2 y - y\right) \\
&= (2x^3 - 2x^2 y^2 - x + 2y^2) + (-4x^2 y^2 + 2y^2) \\
&= 2x^3 - 6x^2 y^2 - x + 3y^2
\end{aligned}$$

2. Contoh lainnya 2:

$Z = \left(3\,x^3 y^2\right)\ \left(\,x^2 y^4\right)$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

penyelesaian:

$$Z = \left(3\,x^3 y^2\right)\left(x^2 y^4\right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(9x^2\ y^2\right)\left(x^2 y^4\right) + \left(2x\ y^4\right)\left(3x^3 y^2\right) \\
&= (9x^4 y^6) + (\,6x^4 y^6) \\
&= 15x^4 y^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(2y3x^3\right)\left(x^2 y^4\right) + \left(4y^3 x^2\right)\left(3x^3 y^2\right) \\
&= (2y^5 3x^5) + (4y^5 3x^5) \\
&= 6y^5 6x^5
\end{aligned}$$

Selain perkalian, terdapat juga bentuk pembagian seperti contoh berikut ini:

1. Contoh lainnya 1:

$Z = \dfrac{(2x^3 - y)}{(x - x\,y^4)}$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\left(6x^2 - 0\right)\left(x - xy^4\right) - \left(1 - y^4\right)\left(2x^3 - y\right)}{\left(x - x\,y^4\right)^2} \\
&= \frac{(6x^3 - 6x^3 y^4) - (2x^3 - y - 2x^3 y^4 + y^5)}{\left(x - x\,y^4\right)^2} \\
&= \frac{4x^3 - 4x^3 y^4 + y - y^5}{\left(x - x\,y^4\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(0-1)\left(x-xy^4\right)-\left(0-4y^3x\right)\left(2x^3-y\right)}{\left(x-xy^4\right)^2}$$

$$= \frac{(-x+x\,y^4)-(-8y^3x^4+4y^4x)}{\left(x-x\,y^4\right)^2}$$

$$= \frac{-x-3y^4x+8y^3x^4}{\left(x-x\,y^4\right)^2}$$

2. Contoh lainnya 2:

$Z = \dfrac{(2x^3y-y)}{(x^2y^3)}$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(6x^2y-0\right)\left(x^2y^3\right)-\left(2x\,y^3\right)\left(2x^3y-y\right)}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

$$= \frac{(6x^4y^4)-(4x^4y^4-2xy^4)}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

$$= \frac{2x^4y^4-2xy^4}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(2x^3-1\right)\left(x^2y^3\right)-\left(3y^2x^2\right)\left(2x^3y-y\right)}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

$$= \frac{(2x^5y^3-x^2y^3)-(6y^3x^5-3y^3x^2)}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

$$= \frac{-4x^5y^3+2y^3x^2}{\left(x^2y^3\right)^2}$$

SOAL-SOAL LATIHAN :

Selesaikan diferensial parsial berikut:

1. $Z = x^2 + 5xy + y^2$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
2. $Z = (3x - 2y)(x + 3y)$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
3. $Z = \dfrac{(x + y)}{(2x - 3y)}$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
4. $Z = tg\left(3x^2 + 4y\right)$, tentukan $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
5. $Z = x^4 + 3x^3y + x^2y^2 + y^3$, tentukan:

   $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

BAB XVI

DERET FOURIER

TUJUAN INSTRUKTUSIONAL

Diharapkan mahasiswa bisa memahami dan mengerti tentang Deret Pangkat (Fourier), Deret MacLaurin, Deret Sinus, dan Deret Binomial; bisa mempelajari contoh soal dan penyelesaian yang ada; serta bisa menyelesaikan soal yang sudah ada.

16.1 PENGERTIAN DERET FOURIER (STROUD, 1994 : 426–436)

Deret fungsi sinus yang diberikan adalah suatu contoh Deret Fourier ini dinamakan sesuai dengan nama penemunya, yaitu Jean Baptist Josep Fourier pada tahun 1768–1830. Sering kali kita harus menyatakan sebuah fungsi dalam deret variabelnya dalam pangkat variabel yang makin membesar. Oleh karena itu, dengan cara inilah komputer dapat menentukan harga *sinus* suatu sudut. Misalnya, kita ingin menyatakan sinus x sebagai deret pangkat x yang menyatakan makin membesar, bentuk deretnya adalah sebagai berikut:

$$sin\ x = a + bx + cx^2 + dx^2 + ex4\ +\ ....$$

a, b, c, dan seterusnya adalah koefisien-koefisien yang konstan, yaitu faktor numerik tertentu. Tanda = disebut identik, pernyataan di atas adalah suatu indentitas bukan persamaan. Ruas kanan bukan sama dengan ruas kiri di mana ruas kanan adalah ruas kiri yang dibentuk lain.

Untuk menetapkan deretnya kita harus mengetahui harga koefisien konstan a, b, c dan seterusnya. Misalnya, kita subsitusikan x = 0 pada ruas kedua $Sin\ 0 = a + 0 + 0 + 0 + ...$ dan $Sin\ 0 = 0$ maka kita segera memperoleh harga a, yaitu $a = 0$. Jadi, mulai dengan memisalkan $x = 0$ maka kita dapat cari deret Sinus-nya sebagai berikut:

$Sin\ x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$ masukkan $a = 0$

$Sin\ 0 = a + 0 + 0 + 0 + \ldots \Longrightarrow a = 0$

Diferensiasikan

$Cos\ x = b + c.2x + d.3x^2 + e.4x^3 + f.5x^4 + \ldots$ masukkan $x = 0$

$Cos\ x = 1 = b + 0 + 0 + 0 + \ldots \Longrightarrow b = 1$

Diferensiasikan

$-Sin\ x = c.2 + d.3.2x + e.4.3.x^2 + f.5.4.x^3 + \ldots$

masukkan $x = 0$

$-Sin\ 0 = 0\ \ c.2 + 0 + 0 + \ldots \Longrightarrow c = 0$

Diferensiasikan

$-Cos\ x = d.3.2.1 + e.4.3.2x + f.5.4.3.x^2 + \ldots$

masukkan $x = 0$

$- Cos\ 0 = -1 = d.3! + 0 + 0 \ldots \Longrightarrow \quad d = -1/3!$

Diferensiasikan

$Sin\ x = e.4.3.2.1 + f.5.4.3.2x + \ldots$

masukkan $x = 0$

$Sin\ 0 = 0 = e.4.3.2.1 + \ldots \Longrightarrow \quad e = 0$

Diferensiasikan

$Cos\ x = f.5.4.3.2.1 + \ldots$

masukkan $x = 0$

$Cos\ 0 = 1 = f.5! + 0 + \ldots \Longrightarrow \quad f = 1/5!$

Akhirnya, dengan memasukkan harga koefisien-koefisien konstan ini ke dalam deret semula.

$Sin\ x = 0 + 1.x + 0.x^2 + .x^3 + 0.x^4 + .x^5 + \ldots$

$\frac{x^5}{5!}\ Sin\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

16.2 DERET MACLAURIN

$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \cdots\cdots\cdots$

$x = 0 \rightarrow f(0) = a + 0 + 0 + 0 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow a = f(0)$

$f^1(x) = b + c.2x + d.3x^2 + ex^4 + fx^4 + \cdots\cdots\cdots$

$x = 0 \rightarrow f(0) = b + 0 + 0 + 0 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow b = f^1(0)$

$f^{11}(x) = c.2 + d.6x + e.12x^2 + f.20x^3 + \cdots\cdots\cdots$

$x = 0 \rightarrow f(0) = c.2 + 0 + 0 + 0 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow c = \frac{1}{2} f^{11}(0)$

$$f^{111}(x) = d.6 + e.24x + f.60x^3 + \cdots\cdots\cdots$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = d.6 + 0 + 0 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow d = \frac{1}{6} f^{111} 2$$

$$f^{Iv}(x) = e.24x + f.120x + \cdots\cdots\cdots$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = e.24 + 0 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow e = \frac{1}{24} f^{IV}(0)$$

$$f^{v}(x) = f.120$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = f.24 + \cdots\cdots\cdots \qquad \rightarrow e = \frac{1}{120} f^{V}(0)$$

$$f(x) = a + b.x + c.x^2 + d.x^3 + e.x^4 + f.x^5 + \cdots\cdots\cdots$$

$$f(x) = f(0) + f^1(0) + \frac{1}{2} f^{II}(0).x^2 + \frac{1}{6} f^{III}(0).x^3 + \frac{1}{24} f^{IV}(0).x^4 + \frac{1}{120} f^{V}(0).x^5$$

$$f(x) = f(0) + f^1(0) + \frac{f^{II}}{2!}(0).x^2 + \frac{f^{III}}{3!}(0).x^3 + \frac{f^{IV}}{4!}(0).x^4 + \frac{f^{V}}{120}(0).x^5$$

$$f(x) = f(0) + f^1(0) + \frac{x^2.f^{II}}{\text{ĐĐĐĐ}}(0) + \frac{x^3.f^{III}}{}(0) + \frac{x^4.f^{IV}}{}(0) + \frac{x^5.f^{V}}{}(0) + \cdots\cdots\cdots$$

1. Contoh 1 :

$$f(x) = Sin\ x \rightarrow f(0) = Sin\ 0 = 0$$

$$f^{I}(x) = Cos\ x \rightarrow f^{I}(0) = Cos\ 0 = 1$$

$$f^{II}(x) = -Sin\ x \rightarrow f^{II}(0) = -Sin\ 0 = 0$$

$$f^{III}(x) = -Cos\ x \rightarrow f^{III}(0) = -Cos\ 0 = -1$$

$$f^{IV}(x) = Sin\ x \rightarrow f^{IV}(0) = Sin\ 0 = 0$$

$$Sin\ x = f(0) + x.f^1(0) + \frac{x^2.f^{II}}{2!}(0) + \frac{x^3.f^{III}}{3!}(0) + \frac{x^4.f^{IV}}{4!}(0) + \frac{x^5.f^{V}}{5!}(0) + \cdots$$

$$\ln(1+x) = 0 + x.1 + \frac{x^2.(-1)}{2!} + \frac{x^3.(2)}{3!} + \frac{x^3.(4)}{4!} + \cdots$$

2. Contoh 2 :

$$f(x) = Sin^2 x \rightarrow f(0) = Sin^2 0 = 0$$

$$f^{I}(x) = \text{üüSinüüü}Cos\ x \rightarrow f^{I}(\ ) = Sin\ \ Cos\ =$$

$$2\sin x.Cos\ x = Sin\ 2x$$

$$f^{II}(x) = 2\,Cos\,2x \rightarrow f^{II}(0) = 0$$
$$f^{III}(x) = -4\,Sin\,2x \rightarrow f^{III}(0) = 0$$
$$f^{IV}(x) = -8\,Cos\,2x \rightarrow f^{IV}(0) = -8$$
$$f^{V}(x) = 16\,Sin\,2x \rightarrow f^{V}(0) = 0$$

$$f(x) = f(0) + x.f^{1}(0) + \frac{x^2.f^{II}}{2!}(0) + \frac{x^3.f^{III}}{3!}(0) + \frac{x^4.f^{IV}}{4!}(0) + \frac{x^5.f^{V}}{120}(0) + \cdots\cdots$$

$$Sin^2 x = 0 + x.0 + \frac{x^2.(2)}{2!}(0) + \frac{x^3.(0)}{3!} + \frac{x^4.(-8)}{4!} + \frac{x^5.(0)}{5!}$$

$$Sin^2 x = \frac{x^2.(2)}{2!} + \frac{x^2.(-8)}{2!} + \cdots\cdots\cdots$$

LATIHAN SOAL-SOAL :

1. $f(x) = e^x$ turunkan sampai $f^{IV}(x)$
2. $f(x) = Cos\ 2x$ turunkan sampai $f^{IV}(x)$

16.3. DERET BINOMIAL

Dengan cara yang sama, kita dapat memperoleh deret pangkat bagi $(1 + x)^n$, yaitu sebagai berikut:

$$f(x) = (1+x)^n \rightarrow f(0) = (1+0)^n = 1$$
$$f^1(x) = n(1+x)^{n-1} \rightarrow f^1(0) = n(1+0)^{n-1} = n$$
$$f^{II}(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \rightarrow f^{II}(0) = n(n-1)(1+0)^{n-2} = n(n-1)(n-2)$$
$$f^{IV}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)(1+x)^{n-4} \rightarrow f^{II}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3)(1+0)^{n-4}$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-2),\ dst$$

$$f(x) = f(0) + x.f^{I}(0) + \frac{x^2.f^{II}}{2!}(0) + \frac{x^3.f^{III}}{3!}(0) + \cdots$$

$$(1+x)n = 1 + x.n + \frac{x^2.n}{2!}(n-1) + \frac{x^3.n}{3!}(n-1)(n-2) + \cdots$$

$$(1+x)n = 1 + x.n + \frac{n.(n-1)x^2}{2!} + \frac{n.(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots$$

LATIHAN SOAL-SOAL :

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{-x}$

BAB XVII

INTEGRAL LIPAT DAN PENERAPANNYA

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa dapat mempelajari dan mengerti tentang penerapan integral, di antaranya menghitung luas bidang dan menghitung volume benda putar.

17.1 PENGGUNAAN

Integral lipat dapat digunakan untuk menghitung luas daerah dan digunakan untuk menghitung volume benda.

17.2 PENERAPAN INTEGRAL LIPAT 2

Integral lipat 2 dapat digunakan untuk menghitung luas daerah di bawah kurva yang dilingkupi oleh kurva lain dan juga untuk menghitung luas daerah dengan menggunakan persamaan parameter.

a. Contoh 1 :

$$\underbrace{\int_0^1 \underbrace{\int_1^2 \left(x^2 + y^3\right)}_{1} dx\, dy}_{2}$$

Cara menyelesaikan Integral harus dimulai dengan integral yang paling dalam, yaitu:

$$\int_0^1\int_1^2 \left(x^2 + y^3\right)dxdy$$

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + y^3\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + y^3x\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}.2^3 + y^3.2\right] - \left[\frac{1}{3}.1^3 + y^3.1\right]$$

$$= \left[\frac{8}{3} + 2y^3\right] - \left[\frac{1}{3} + y^3\right]$$

$$= \left[\frac{7}{3} + y^3\right]$$

$$II = \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + y^3\right)dy$$

$$= \left[\frac{7}{3}y + \frac{1}{4}y^4\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{7}{3}.1 + \frac{1}{4}.1^4\right] - 0$$

$$= \left[\frac{7}{3} + \frac{1}{4}\right]$$

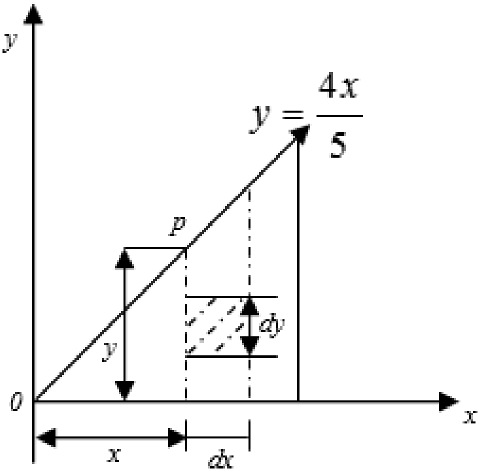
$$= \left[\frac{28+3}{12}\right]$$

$$= \frac{31}{12}$$

b. Contoh 2 (Stroud, 1994 : 671):

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh $y = \dfrac{4x}{5}$

Sumbu x dan ordinat pada $x = 5$



Luas daerah $= dy.dx$

Luas pita $= \sum_{y=0}^{y=y_1} dy.dx$

Jumlah semua pita ini sepanjang gambar memberikan:

$$A \approx \sum_{x=0}^{x=5} \left\{ \sum_{y=0}^{y=y_1} dy\ dx \right\}$$

$$A \approx \sum_{x=0}^{x=5} \sum_{y=0}^{y=y_1} dy\ dx$$

Jika $dy = 0$ dan $dx = 0$

Maka :

$$A = \int_0^5 \int_0^{y_1} dy\ dx \quad , y_1 = \frac{4x}{5}$$

$$= \int_0^5 [y]_0^{y_1} dx$$

$$= \int_0^5 [y]_0^{\frac{4x}{5}} dx$$

$$= \int_0^5 \frac{4x}{5} dx$$

$$= \left[\frac{4x}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_0^5$$

$$= \left[\frac{2}{5} \cdot 5^2 \right] - \left[\frac{2}{5} \cdot 0^2 \right] = 10 \textit{ satuan luas}$$

c. Contoh 3 (Stroud, 1994:673):

Tentukan luas daerah yang dilingkupi oleh kurva :

$$y_1^2 = 9x \text{ dan } y_2 = \frac{x^2}{9} \left(y1 > 0, \quad y2 > 0 \right)$$

Penyelesaian :

Titik potong $= y_1 = y_2$

$$y_1^2 = y_2^2$$

$$9x = \left(\frac{x^2}{9} \right)^2$$

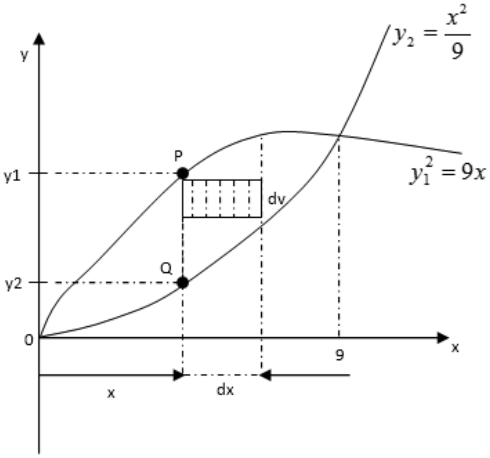
$$9x = \frac{x^4}{81}$$

$$729x = x^4$$

$$x = \sqrt[3]{729}$$

$$729 = x^3$$

$$x = 9$$



Luas elemen $= dy.dx$

$$Jadi\ luas\ pita\ PQ = \sum_{y=y_2}^{y=y_1} dy\ dx$$

$$Jadi\ luas\ pita\ PQ = \sum_{x=0}^{x=9} \sum_{y=y_2}^{y=y_1} dy\ dx$$

Jika $dy = 0$ dan $dx = 0$

Maka luas daerah yang dilingkupi kurva:

$$A = \int_0^9 \int_{y_1}^{y_1} dy\ dx$$

$$= \int_0^9 [y]_{y_2}^{y_1}\ dx$$

$$= \int_0^9 [y_1 - y_2]\, dx$$

$$= \int_0^9 \left[3\sqrt{x} - \frac{x^2}{9} \right] dx$$

$$= \left[2x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{27} \right]$$

$$= 54 - 27$$

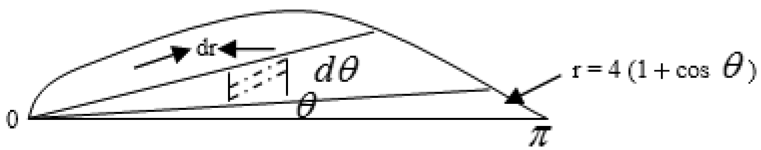
$$= 27 \textit{ satuan luas}$$

d. Contoh 4 (Stroud, 1994:681):

Dengan menggunakan integral lipat 2 tentukanlah luas daerah yang dilingkupi oleh kurva kutub $r_1 = 4(1 + Cos\ \theta)$ dan jari-jari vektor pada $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$

$$A \approx \sum_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sum_{r=0}^{r=r1} rd\ rd\ \theta$$

Luas keseluruhan yang dilingkupi oleh kurva tersebut adalah sebagai berikut :

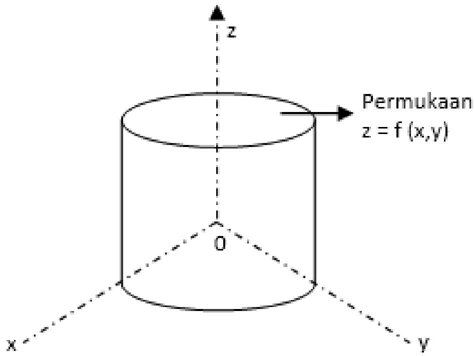


$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi}\int_0^{1_1} rd\ rd\ \theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}r_1^2\right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}r_1^2\right]_0^{4(1+Cos\ \theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[4\left(1+Cos\ \theta\right)\right]^2 d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[16\left(1+2\ Cos\ \theta+Cos^2\theta\right)\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 8\left(1+2\ Cos\ \theta+Cos^2\theta\right) d\theta \\
&= 8\left[\theta+2\ Sin\ \theta+\frac{\theta}{2}+\frac{Sin\ 2\ \theta}{4}\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\pi+2\ Sin\ \pi+\frac{\pi}{2}+\frac{Sin\ 2\pi}{4}\right]-\left[0+2\ Sin\ 0+0+\frac{Sin\ 2.0}{4}\right] \\
&= 8\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)-(0) \\
&= 8\pi+4\pi \\
&= 12\ \pi\ satuan\ luas
\end{aligned}
$$

17.3. PENERAPAN INTEGRAL LIPAT 3 (STROUD, 1994:556 – 559)

Integral lipat 3 dapat digunakan untuk menghitung volume benda dalam ruang dimensi-3 atau terhadap sumbu-x, sumbu-y dan sumbu-z, juga biasanya digunakan untuk mengitung volume benda yang diputar satu putaran penuh melalui sumbu-x atau diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu-x.

Penentuan volume dengan integral lipat:



$$V \approx \sum_{x=x_1}^{x=x_2} \sum_{y=y_1}^{y=y_2} \sum_{z=z_1}^{z=z_2} dx\, dy\, dz$$

Elemen-elemen $dv = dx.\, dy.\, dz$

Jika $dx = 0$, $dy = 0$ dan $dz = 0$ maka didapat

$$V \approx \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dx\, dy\, dz$$

Contoh :

Sebuah benda dilingkupi oleh bidang $z = 0$; bidang $x = 1$, $x = 4$ dan $y = 2$; $y = 5$; dan permukaan $z = x + y$. Tentukan volume benda tersebut!

Penyelesaian :

$$V = \int_1^4 \int_2^5 \int_0^{x+y} dx\, dy\, dz$$

$$V = \int_1^4 \int_2^5 [x]_0^{x+y} dy\, dx$$

$$V = \int_1^4 \int_2^5 (x+y)\, dy\, dx$$

$$V = \int_1^4 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_2^5 dx$$

$$V = \int_1^4 \left[5x + \frac{1}{2} 5^2 \right] - \left[2x + \frac{1}{2} 2^2 \right] dx$$

$$= \int_1^4 \left[3x + \frac{21}{2} \right] dx$$

$$= \left[\frac{3}{2} x^2 + \frac{21}{2} x \right]_1^4$$

$$= \left[\frac{3}{2} \cdot 4^2 + \frac{21}{2} \cdot 4 \right] - \left[\frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{21}{2} \cdot 1 \right]$$

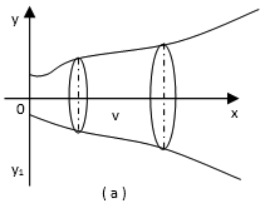
$$= \left[\frac{3}{2} \cdot 16 + \frac{84}{2} \right] - \left[\frac{3}{2} + \frac{21}{2} \right]$$

$$= \left[\frac{45}{2} + \frac{63}{2} \right]$$

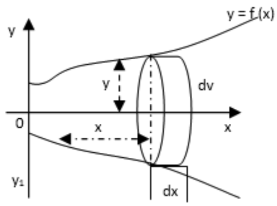
$$= \left[\frac{108}{2} \right]$$

$$= 54 \textit{ satuan volume}$$

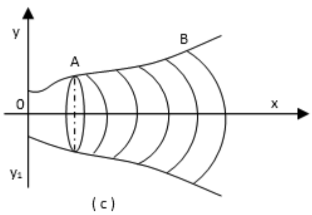
17.4 VOLUME BENDA PUTAR (STROUD, 1994:556)



(a)



(b)



(c)

Jika bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan koordinat pada $x = a$ dan $x = b$ diputarkan satu putaran penuh melalui sumbu x maka akan diperoleh sebuah benda putaran yang simetris terhadap ox.

Gambar (a) menunjukkan volume benda putaran yang terbentuk, sedangkan gambar (b) apabila diambil sebagian kecil dari volume benda yang berbentuk $dv = \pi y^2 dx$, volume yang dibentuk oleh pita tersebut kira-kira mendekati volume yang dibentuk oleh pita persegi panjang di bawahnya.

Gambar (c) menunjukkan apabila seluruh bentuk bidang dibagi-bagi menjadi sejumlah pita seperti terlihat pada gambar, di sini terlihat bahwa setiap pita akan menghasilkan silindernya sendiri dengan masing-masing volume sebesar $\pi\, y^2\ dx$.

$$V = \sum_{x=a}^{x=b} \pi\, y^2 dx$$

$$V = \int_a^b \pi\, y^2 dx$$

Contoh Soal :

Carilah Volume benda yang terbentuk jika bentuk bidang yang dibatasi oleh y = 5 cos 2x , sumbu x dan ordinat pada x= 0 dan x=$\frac{\pi}{4}$

Diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu x.

Jadi Volume benda putar adalah sebagai berikut

Penyelesaian :

$$V = \int_0^{\pi/4} \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \pi\left[5\cos 2x\right]^2 dx$$

$$= 25\pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 2x dx$$

$$\int_0^{\pi/4} [5\cos 2x]^2 dx$$

$$= 25\pi \int_0^{\pi/4} \left[\cos^2 2x\right] dx$$

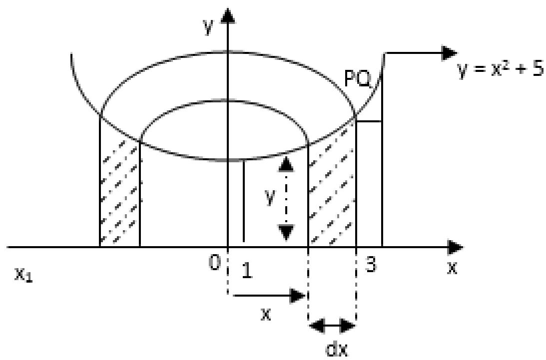
$$= \frac{25\pi}{2} \int_0^{\pi/4} [1 + \cos 4x] dx$$

$$= \frac{25\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{25\pi}{2} \left[\frac{\pi}{4} + 0 \right] - [0 + 0]$$

$$= \frac{25\pi^2}{8} satuan^3$$

Rumus di atas digunakan apabila volume benda yang terbentuk diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu x. Untuk volume benda yang diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu y , di sini $dv \approx Luas$ penampang tebing $\times$ keliling.



$$V \approx \sum dv \approx \sum_{x=x_1}^{x=x_2} 2\pi xy\, dx$$

$$V = \int_a^b 2\pi xy\, dx$$

$$dv \approx 2\pi xy\, dx$$

Contoh Soal :

Carilah volume benda yang terjadi bila bentuk bidang dibatasi oleh kurva $y = x^2+5$ sumbu x dan ordinat pada x=1 dan x=3, diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu y.

Penyelesaian :

Menghitung volume benda putar adalah sbb :

$$V = \int_1^3 2\pi xy dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 x\left(x^2+5\right)dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 \left(x^3+5x\right)dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= 2\pi \left[\frac{81}{4}+\frac{45}{2}\right]-\left[\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right]$$

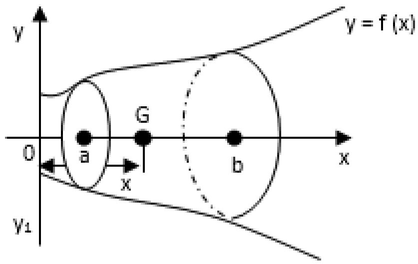
$$= 2\pi \left[\frac{80}{4}+\frac{40}{2}\right]$$

$$= 2\pi\left[20+20\right]$$

$$= 80\pi satuan^3$$

17.5. PUSAT GRAVITASI SUATU BENDA PUTAR (STROUD, 1994:564)

Untuk mencari posisi pusat gravitasi suatu benda yang terbentuk jika bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan koordinat pada $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu x. Jika diambil piringan-piringan elenter dan dijumlahkan momen volumenya terhadap sumbu oy maka dapat dihitung bahwa :



$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx} \qquad \bar{y} = 0$$

Contoh :

Tentukanlah posisi pusat gravitasi dari benda yang terbentuk jika bidang yang dibatasi oleh kurva $x^2 + y^2 = 16$, sumbu x dan koordinat pada $x = 1$ dan $x = 3$ diputar mengelilingi sumbu x.

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy^2 dx}{\int_a^b y^2 dx} = \frac{i_1}{i_2} \qquad x^2 + y^2 = 16, \qquad y^2 = 16 - x^2$$

$$\begin{aligned}
i_1 &= \int_1^3 x\left(16 - x^2\right) dx \\
&= \int_1^3 x\left(16 - x^3\right) dx \\
&= \left[\frac{16}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_1^3 \\
&= \left[8.3^3 - \frac{1}{4}\cdot 3^4\right] - \left[8.1^2 - \frac{1}{4}\cdot 1^4\right] \\
&= \left[72 - \frac{81}{4}\right] - \left[8 - \frac{1}{4}\right] \\
&= [64] - \left[\frac{80}{4}\right] \\
&= 44
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2 &= \int_1^3 x\left(16 - x^2\right) dx \\
&= \left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_1^3
\end{aligned}$$

$$= \left[16.3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3\right] - \left[16.1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right]$$

$$= \left[48 - \frac{27}{3}\right] - \left[16 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left[32 - \frac{26}{3}\right]$$

$$= 23\frac{1}{3}$$

$$\overline{x} = \frac{i_1}{i_2} = \frac{44}{23\frac{1}{3}} = 1,89 \qquad \overline{y} = 0$$

SOAL-SOAL LATIHAN :

1. Carilah volume benda yang terbentuk jika bentuk bidang yang dibatasi oleh $y = 2\,Cos\,2x$, sumbu x, dan koordinat pada $x = 0$ dan $x = \frac{\pi}{4}$ diputar satu putaran penuh mengelilingi sumbu x !
2. Carilah volume benda yang terjadi bila bentuk bidang yang dibatasi oleh kurva $y = 2x^2 + 3$, sumbu x, dan koordinat pada $x = 1$ dan $x = 2$ diputar satu putaran penuh mengelilingi y!
3. Tentukan posisi pusat gravitasi dari benda yang terbentuk jika bidang yang dibatasi kurva $x^2 + y^2 = 25$, sumbu x, dan koordinat pada $x = 1$ dan $x = 5$ diputar mengelilingi sumbu x !

BAB XVIII

FUNGSI – FUNGSI KHUSUS DAN Z TRANSFORM

TUJUAN INSTRUKSIONAL

Mahasiswa memahami dan mengerti tentang fungsi-fungsi khusus dan z transform, serta mempelajari contoh-contoh soal beserta penyelesaiannya baik bentuk I maupun bentuk II.

18.1 PENGERTIAN FUNGSI – FUNGSI KHUSUS DAN Z TRANSFORM

Fungsi–fungsi khusus dan Z transform, hampir sama dengan integral fungsi rasional. perbedaannya pada fungsi rasional yang mana langsung diuraikan penyebutnya menjadi faktor-faktornya, sedangkan pada fungsi-fungsi khusus dan z transform penyebutnya perlu dilengkapi dulu menjadi fungsi kuadrat, kemudian diselesaikan secara integral (Stroud, 2003).

18.2 BENTUK I

Tinjaulah integral berikut :

$$\int \frac{dz}{Z^2 - A^2} \Rightarrow \frac{1}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{(Z-A)(Z+A)} = \frac{1}{(Z-A)} + \frac{1}{(Z+A)}$$
$$= P(Z+A) + Q(Z-A)$$

dalam hal ini, P dan Q adalah konstanta.

Ambil $Z = A$

$$
\begin{aligned}
1 &= P(A+A)+Q(A-A)\\
1 &= P(2A)+Q.0\\
1 &= P(2A)\\
P &= \frac{1}{2A}
\end{aligned}
$$

Ambil $Z = -A$

$$
\begin{aligned}
1 &= P(-A+A)+Q(-A-A)\\
1 &= P(0)+Q(-2A)\\
Q &= -\frac{1}{2A}
\end{aligned}
$$

$$\because \quad \frac{1}{Z^2 - A^2} = \frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{Z-A} - \frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{Z+A}$$

$$\int \frac{1}{Z^2 - A^2}dz = \frac{1}{2A}\int \frac{1}{Z-A}dz - \frac{1}{2A}\int \frac{1}{Z+A}dz$$

$$\int \frac{1}{Z^2 - A^2}dz = \frac{1}{2A}\ln(Z-A) - \frac{1}{2A}\ln(Z+A) + C$$

$$\int \frac{1}{Z^2 - A^2}dz = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{Z-A}{Z+A}\right\} + C$$

a. Contoh 1 :

Hitunglah $\int \frac{1}{Z^2 - 16}\,dz$!

$\frac{1}{Z^2 - 16}$ dapat difaktorkan menjadi $\frac{1}{(Z-4)(Z+4)}$ dalam hal ini harga $A = 4$.

Menurut rumus di atas, soal di atas dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{Z^2 - 16} dz &= \int \frac{1}{Z^2 - 4^2} dz \\ &= \frac{1}{2A} \ln \frac{Z - A}{Z + A} + C \\ &= \frac{1}{2.4} \ln \frac{Z - 4}{Z + 4} + C \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{Z - 4}{Z + 4} + C\end{aligned}$$

b. Contoh 2 :

Hitunglah $\int \frac{1}{x^2 - 5} dx$!

$\frac{1}{x^2 - 5}$ dapat difaktorkan menjadi $\frac{1}{\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)}$ dalam hal ini harga $A = \sqrt{5}$

Berdasarkan rumus di atas, penyelesaian soal di atas menjadi sebagai berikut:

$$\int \frac{1}{Z^2 - A^2} dz = \frac{1}{2A} \ln \frac{Z - A}{Z + A} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 5} dz = \frac{1}{2.\sqrt{5}} \ln \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} + C$$

c. **Contoh 3 :**

Hitunglah $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx$

Sekilas tampaknya bentuk ini tidak ada hubungannya dengan bentuk baku atau contoh yang pernah dikerjakan sebelumnya. Dalam hal ini, penyebutnya $x^2 + 4x + 2$ diubah dulu menjadi fungsi kuadrat.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 2 &= x^2 + 4x + 2 + 2 - 4 \\ &= (x + 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

Dalam hal ini boleh dituliskan konstanta 2 sebagai kuadrat dan akarnya sehingga $\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} dx$

bentuk integral tersebut memang diarahkan untuk menjadi

bentuk:

$\int \frac{1}{Z^2 - a} dz = \frac{1}{2A} \ln \frac{Z - A}{Z + A} + C$ sehingga penyelesaian soal di atas menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dz &= \int \frac{1}{(x+2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left\{ \frac{(x+2) - \sqrt{2}}{(x+2) + \sqrt{2}} \right\} + C \end{aligned}$$

d. Contoh 4 :

Hitunglah $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 4} dx$!

Penyelesaian : $x^2 + 6x + 4 = (x+3)^2 - 5$

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 4} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2 - (\sqrt{5})^2} dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left\{ \frac{(x+3) - \sqrt{5}}{(x+3) + \sqrt{5}} \right\} + C$$

18.3 BENTUK II

Dengan cara yang sama, sekarang bentuk hasil baku yang kedua dengan meninjau $\int \frac{dz}{A^2 - Z^2}$, bentuk ini mirip dengan pembahasan sebelumnya karena hal ini dapat dipecahkan lagi dengan Parsial.

$$\int \frac{dz}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{(A-Z)(A+Z)} = \frac{P}{A-Z} + \frac{Q}{A+Z}$$

$$1 = P(A+Z) + Q(A-Z)$$

Ambil $Z = A$

$$1 = P(A+A) + Q(A-A)$$

$$1 = P(2A) + Q.0$$

$$1 = P(2A)$$

$$P = \frac{1}{2A}$$

Ambil $Z = -A$

$$1 = P(-A+A) + Q(A+A)$$

$$1 = P(0) + Q(-2A)$$

$$Q = -\frac{1}{2A}$$

$$\because \quad \frac{1}{A^2 - Z^2} = \frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{A+Z} - \frac{1}{2A}\cdot\frac{1}{A-Z}$$

$$\int \frac{1}{A^2 - Z^2}\,dz = \frac{1}{2A}\int \frac{1}{A+Z}dz - \frac{1}{2A}\int \frac{1}{A-Z}dz$$

$$\int \frac{1}{A^2 - Z^2}\,dz = \frac{1}{2A}\ln(A+Z) - \frac{1}{2A}\ln(A-Z) + C$$

$$\int \frac{1}{A^2 - Z^2}\,dz = \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$$

a. **Contoh 1 :**

Hitunglah $\int \frac{1}{9 - x^2}\,dx$!

Penyelesaiannya:

$$\int \frac{1}{9 - x^2}\,dx = \int \frac{1}{3^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2A}\ln\left\{\frac{A+Z}{A-Z}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2.3}\ln\left\{\frac{3+x}{3-x}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left\{\frac{3+x}{3-x}\right\} + C$$

b. Contoh 2 :

Hitunglah $\int \frac{1}{5 - x^2}\, dx$!

$$\int \frac{1}{5 - x^2}\, dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{5} + x}{\sqrt{5} - x} \right\} + C$$

c. Contoh 3 :

Hitunglah $\int \frac{1}{3 + 6x - x^2}\, dx$!

Sama seperti hal di atas, untuk menyelesaikan integral di atas harus dilengkapi dulu persamaan tersebut sehingga menjadi bentuk kuadrat.

$$3 + 6x - x^2 = 3 - \left(x^2 - 6x\right)$$

$$= 3 - \left(x^2 - 6x + 9\right) + 9$$

$$= 12 - \left(x - 3\right)^2$$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(x - 3\right)^2$$

Jadi, harga $A = 2\sqrt{3}$ dan harga $Z = \left(x - 3\right)$

$$\int \frac{1}{3 + 6x - x^2}\, dx = \int \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(x - 3\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2A} \ln \left\{ \frac{A + Z}{A - Z} \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2\left(2\sqrt{3}\right)} \ln \left\{ \frac{2\sqrt{3} + (x-3)}{2\sqrt{3} - (x-3)} \right\} + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left\{ \frac{2\sqrt{3} + (x-3)}{2\sqrt{3} - (x-3)} \right\} + C$$

d. Contoh 4 :

Hitunglah $\int \frac{1}{9 - 4x - x^2}\, dx$!

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} 9 - 4x - x^2 &= 9 - \left(x^2 + 4x + 4\right) + 4 \\ &= (9+4) - (x+2)^2 \\ &= 13 - (x-2)^2 \\ &= \left(\sqrt{13}\right)^2 - (x-2)^2 \end{aligned}$$

dalam hal ini $A = \sqrt{13}$, $Z = (x + 2)$

$$\int \frac{1}{9 - 4x - x^2}\, dx = \frac{1}{2A} \ln \left\{ \frac{A+Z}{A-Z} \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{13}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{13} + x + 2}{\sqrt{13} - x + 2} \right\} + C$$

e. Contoh 5 :

Hitunglah $\int \frac{1}{5 + 4x - 2x^2}\, dx$!

Dalam hal ini harus mengubah faktor $2x^2$ menjadi x^2 .

$$\int \frac{1}{5+4x-2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{5}{2}+2x-x^2}\,dx$$

$$\frac{5}{2}+2x-x^2 = \frac{5}{2}-\left(x^2-2x+1\right)+1$$

$$= \frac{7}{2}-\left(x-1\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{3,5}\right)^2-\left(x-1\right)^2$$

Dalam hal ini, $A=\sqrt{3,5}$ dan $Z = (x - 1)$

$$\because \int \frac{1}{5+4x-2x^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3,5}}\ln\left\{\frac{\sqrt{3,5}+x-1}{\sqrt{3,5}-x-1}\right\}+C$$

f. Contoh 6 :

Hitunglah $\int \frac{1}{6-6x-5x^2}\,dx$!

Sama seperti di atas, faktor $5x^2$ diubah dulu menjadi x^2

$$\int \frac{1}{6-6x-5x^2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x-x^2}\,dx$$

$$\frac{6}{5}-\frac{6}{5}x-x^2 = \frac{6}{5}-\left(x^2+\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}\right)+\frac{9}{25}$$

$$= \frac{39}{25}-\left(x+\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{39}{25}}\right)^2-\left(x+\frac{3}{5}\right)$$

Jadi, dalam hal ini $A = \left(\sqrt{\frac{39}{25}}\right)^2$ $dan \quad Z = \left(x + \frac{3}{5}\right)$

$$\because \int \frac{1}{6 - 6x - 5x^2}\, dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{39}{25}}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{\frac{39}{25}} + x + \frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{39}{25}} - x + \frac{3}{5}} \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{39}} \ln \left\{ \frac{\sqrt{39} + 5x + 3}{\sqrt{39} - 5x + 3} \right\} + C$$

18.4 BENTUK BAKU YANG LAIN

Tinjau $\int \frac{dz}{Z^2 + A^2}$

Misal : $Z = Atg\ \theta$

Maka :

$$Z^2 + A^2 = A^2 tg^2\theta + A^2$$

$$= A^2\left(1 + tg^2\theta\right)$$

$$= A^2 \sec^2 \theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = A\sec^2 \theta$$

$$dz = A\sec^2 \theta \quad d\theta$$

$$\int \frac{dz}{Z^2 + A^2} = \int \frac{1}{A^2 \sec \theta} A\sec \theta \ d\theta$$

$$= \int \frac{1}{A} d\theta$$

$$= \frac{1}{A}\theta + C$$

Jadi:

$$Z = Atg\,\theta$$

$$\frac{Z}{A} = tg\,\theta \Rightarrow \theta = arctg\frac{Z}{A}$$

$$\int \frac{1}{Z^2 + A^2} dz = \frac{1}{A} arctg\left\{\frac{x}{4}\right\} + C$$

a. Contoh 1 :

$$\int \frac{1}{x^2 + 16} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$= \frac{1}{4} arctg\left\{\frac{x}{4}\right\} + C$$

b. Contoh 2 :

Hitunglah $\int \frac{1}{x^2 + 10x + 30} dx$!

$$x^2 + 10x + 30 = (x+5)^2 - 25 + 30$$

$$= (x+5)^2 + 5$$

$$= (x+5)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 10x + 30} dx = \int \frac{1}{(x+5)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\left\{\frac{x+5}{\sqrt{5}}\right\} + C$$

c. Contoh 3 :

Hitunglah $\int \frac{1}{2x^2 + 12x + 32} dx$!

Sama seperti kondisi sebelumnya, bilangan $2x^2$ harus diubah dulu menjadi x^2.

$$\int \frac{1}{2x^2+12x+32}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+6x+16}\,dx$$

$$\begin{aligned} x^2+6x+16 &= \left(x^2+6x+9\right)-9+16 \\ &= \left(x+3\right)^2+7 \\ &= \left(x+3\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\because \quad \int \frac{1}{2x^2+12x+32}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\left\{\frac{x+3}{\sqrt{7}}\right\}+C$$

SOAL-SOAL LATIHAN:

1. $\int \frac{1}{x^2+3x-5}\,dx$
2. $\int \frac{1}{2x^2+8x+9}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{9-8x-x^2}\,dx$
4. $\int \frac{1}{x^2+25}\,dx$
5. $\int \frac{1}{x^2-4x+16}\,dx$

DAFTAR PUSTAKA

Martono, Koko. 1991. *Kalkulus*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin Joseph (Ed. 5). 1991. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin Joseph. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Soemartojo, N. (Ed. 2). 1992. *Kalkulus Dasar*. Depok: Penerbit FE. Universitas Indonesia.

Spiegel, Murray Ralph. 1996. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Calculus*. New York: Mc. Graw Hill.

Stroud, Kenneth Arthur (Ed. 3). 1994. *Matematika untuk Teknik*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Stroud, Kenneth Arthur. 1999. *Matematika untuk Teknik*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Yahya, Yusuf. 1990. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Yogyakarta: Ghalia Indonesia.

TENTANG PENULIS

Ir. Renilaili, M.T., lahir di Baturaja pada tanggal 20 Maret 1961. Ayah bernama Selamin (Almarhum) adalah Pensiunan Mayor Polisi yang bertugas di Baturaja Sumatera Selatan dan berasal dari Muaradua Kisam Ogan Komring Ulu, sedangkan ibu bernama Saipah (Almarhuma) adalah seorang ibu rumah tangga biasa yang berasal dari Mentok Bangka. Merupakan anak ke-4, dari 4 bersaudara yang semasa kecil tinggal dan bersekolah di Baturaja, TK Bayangkari (hanya 1 tahun), kemudian melanjutkan di SD Negeri 14 Baturaja dan lulus tahun 1973, setelah itu melanjutkan di SMP Negeri I Baturaja dan lulus tahun 1976. Selanjutnya, bersekolah di SMA Negeri I Baturaja dan lulus tahun 1980.

Pada pertengahan tahun 1980, mengikuti test SNMPTN dan lulus di Unsri mengambil Jurusan Teknik Kimia. Menyelesaikan S-1 Teknik Kimia tahun 1986, kemudian mencoba mengabdikan diri menjadi dosen honorer di Sekolah Tinggi Teknologi Industri

(APRIN) Palembang mulai tahun 1988. Pada tahun 1990, menjadi PNS di Kopertis Wilayah II sebagai tenaga Edukatif dan tetap mengabdikan diri sebagai dosen di STTI-APRIN. Karier jabatan fungsional dosen dimulai dari Asisten Ahli Madya pada tahun 1991, kemudian menjadi Asisten Ahli pada tahun 1993, dan dilanjutkan Lektor Muda pada tahun 1995. Pernah menjadi ketua jurusan Teknik Industri di STTI-APRIN dari tahun 1993-1996.

Pada awal September tahun 1996, dipindahkan di STMIK Bina Darma Palembang untuk mengajar mata kuliah Kalkulus dan Aljabar Linear serta mata kuliah Kimia Dasar. Pada tahun 1999 mendapat jabatan Lektor Madya. Pada tahun 2002 mengambil S-2 di Unsri dengan Program Studi Teknik Kimia dan Konsentrasi Teknologi Energi yang lulus pada Februari 2006. Selain mengajar mata kuliah tersebut, juga mengajar mata kuliah Statistik serta mata kuliah Industri Kimia. Pada 1 September 2006 mendapat jabatan Fungsional Lektor Kepala (IV/b) dan tetap bertugas sebagai dosen di Universitas Bina Darma Palembang sampai dengan sekarang.