**PARAMETER-PARAMETER UNTUK MODEL DISTRIBUSI FUNGSI LOGARITMA PEMBAGIAN**

**Jemakmun**

Jurusan Teknik Informatika Universitas Binadarma Palembang

Jalan Jend A Yani No.12 Palembang (30264)

Email; Jemakmun\_ckp@yahoo.com

***Abstrak:*** Suatu deret bilangan, f(z) = a0+a1z+a2z2+a3z3+...=$\sum\_{x}^{}a\_{x}z^{x}$ , ax >0, z>0 merupakan deret pangkat dengan suku-sukunya terhitung. Apabila f(z) berhingga (Positip) dan terdefrensial, maka bentuk P(x) = $\frac{a\_{x}z^{x}}{f(z)}$, , akan selalu bernilai positip untuk setiap sukunya, sehingga 0$\leq $P(x) $\leq $1 dan $\sum\_{x}^{}P(x)$=1, dimana selanjutnya P(x) disebut distribusi deret pangkat. Pada penelitian ini aplikasi deret pangkat digunakan untuk membentuk distribusi logaritma dan mencari parameter distribusi logaritma, logaritma yang dikemukakan adalah logaritma pembagian; f(z)=log$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ , 0<z<1. Selanjutnya parameter distribusi logaritma pembagian yang dibahas antara lain; Mean(x), Varian(x), fungsi pembangkit moment dan fungsi pembangkit faktorial moment

***Kata kunci:*** *deret pangkat, distribusi, logaritma pembagian, moment dan faktorial moment*

**1. PENDAHULUAN**

Ilmu Statistika pada dasarnya terbagi atas metode statistika, statistika terapan, statistika matematika serta teori peluang yang mana umumnya didukung oleh matematika khususnya analisis dan kalkulus yang banyak ditemui dalam bentuk deret pangkat a0+a1z+a2z2+a3z3+...=$\sum\_{x}^{}a\_{x}z^{x}$ dan banyak digunakan untuk membahas mengenai distribusi deret pangkat atau fungsi distribusi diskrit (Jemakmun, 2003). Hampir semua Fungsi matematika yang bersifat kontiyu, dengan menggunakan deret pangkat dan sifat turunan deret Mclourent dan deret Taylor dapat didekati menjadi suatu fungsi yang bersifat diskrit. Fungsi logaritma tertentu merupakan fungsi yang kontinyu dan dapat didekati menjadi suatu fungsi yang bersifat diskrit. Sehubungan dengan hal ini maka penulis mencoba membahas penelitian dengan tema Penerapan Distribusi Deret Pangkat pada Fungsi Logaritma. Tertariknya penulis untuk melakukan penelitian ini juga adanya hubungan dengan penelitian sebelumnya yang berhubungan deret pangkat.

Masalah yang akan dibahas dalan penelitian ini hanya difokuskan pada distribusi deret pangkat yang berhubungan dengan fungsi logaritma khususnya logaritma pembagian dan parameter-parameternya yang akan dicari antara lain; mean, varian, fungsi pembangkit moment dan fungsi pembangkit faktorial moment.

**2. METODE**

Dalam penelitian ini langkah-langkah kerja yang penulis lakukan adalah dengan menerapkan dan mengaplikasikan definisi-definisi dan teorema-teorema dasar dari statistika dasar dan statistik matematika supaya dapat mendukung dalam proses pembahasan dan pemecahan masalah distribusi logaritma pembagian yang akan dibahas khususnya mengenai parameter-parameternya, definisi dan teorema tersebut antara lain;

*Definisi ;* Suatu deret bilangan; a0+a1z+a2z2+a3z3+...=$\sum\_{x}^{}a\_{x}z^{x}$ , ax >0, z>0 merupakan deret pangkat dengan suku-sukunya terhitung. (1)

*Definisi ;* Jika a bilangan positif yang tidak sama dengan 1, Fungsi Logaritma biasa a adalah fungsi invers eksponen biasa a, dengan urutan padanannya adalah$ $; $y=$ (2)

*Teorema* ; Turunan fungsi logaritma diberikan sebagai berikut; $\frac{}{dx} $=$ \frac{1}{x}$ , dan juga berakibat $\frac{d^{n}\left(\right)}{dx^{n}}=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)!}{x^{n}}, n€N$ (3)

*Definisi* ; Jika himpunan semua kemungkinan nilai variable acak X adalah himpunan countable, hingga x1 , x2 , x3 ,….., xn , atau takhingga x1 , x2 , x3 ,…., maka X, disebut Variabel Acak Diskrit. Maka fungsi f(x) = P(X=x), x = x1 , x2 , x3 ,…, yang dianggap peluang untuk setiap himpunan nilai X, yang akan disebut Fungsi Peluang Densitas Diskrit (4 )

*Teorema ;* Suatu fungsi P(x) adalah suatu fungsi peluang jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut:

 $0\leq P(x)\leq 1$ , untuk semua x

$\sum\_{i=1}^{}P\left(x\_{i}\right)=1, P\left(x\right)=0, $ jika x€(x1, x2 , x3, ….) (5)

*Definisi* ; Jika X variable acak diskrit dengan fungsi distribusi P(x), Nilai Harapan (Mean(X)) dari X didefinisikan dengan; $E\left(X\right)=\sum\_{x}^{}xP(x)$ (6)

*Definisi* ; Jika X variable acak diskrit dengan fungsi distribusi P(x), Moment ke-k (tak terpusat) dari X didefinisikan dengan; $µ\_{k}^{'}=E\left(x^{k}\right)=\sum\_{x}^{}x^{k}P(x)$ (7)

*Teorema ;* Jika x variable acak dan nilai harapannya ada maka ;

Var(X) = E(X2) – (E(X))2 (8)

*Definisi ;* Jika X variable acak diskrit, maka nilai harapan dari, $M\_{x}(t)=E\left(e^{tx}\right)=\sum\_{x}^{}e^{tx}P(x)$ disebut Fungsi Pembangkit Moment dari X, jika nilai harapannya ada untuk semua nilai t pada interval –h<t<h. (9)

*Teorema* ; Jika fungsi pembangkit Moment Mx(t) dari variable acak X ada untuk –h<t<h, maka E(Xk) ada dan $E\left(X^{k}\right)=\frac{d^{k}M\_{x}(t)}{dt^{k}}|\_{t=0}$ (10)

*Definisi ;* Fungsi pembangkit Moment Faktorial untuk variable acak diskrit X didefinisikan; $G\_{x}(t)=E\left(t^{x}\right)=\sum\_{x}^{}t^{x}P\left(x\right)-\infty <t<\infty $ (11)

*Definisi ;* Faktorial moment ke-k, untuk variable acak diskrit X, didefinisikan;

µ[k] = E(Xk) = E(X(X-1)(X-2)….(X-k+1)) = $ \sum\_{x}^{}x^{\left[k\right]}P(x)$ (12)

*Teorema* ; Jika x mempunyai fungsi pembangkit moment faktorial Gx(t) maka;

$\frac{d^{k}G\_{x}(t)}{dt^{k}}|\_{t=1}$= E(X(X-1)(X-2)….(X-k+1)) (13)

**3. HASIL**

Kita ketahui dari kalkulus dan analisis bahwa bentuk fungsi logaritma pembagian ;

f(z) = $log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)$, dengan menerapkan deret pangkat dan sifat turunan deret Mclourent dan deret Taylor maka didapatkan deret ; 2$\left(z+\frac{z^{3}}{3}+\frac{z^{5}}{5}+\frac{z^{7}}{7}+…\right)=2\sum\_{x}^{}\left(\frac{z^{2x+1}}{2x+1}\right)=log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $\left|z\right|<1$, dimana akan selalu bernilai positip untuk setiap suku-suku dari z pada saat $x=0,1,2,3…$, selanjutnya berdasarkan rumus distribusi deret pangkat diatas (5) maka dapat kita bentuk distribusi diskrit yang baru dimana fungsi utamanya adalah fungsi logaritma pembagian; Dari distribusi deret pangkat, P(X=x) = $\frac{a\_{x}z^{x}}{f(z)}$ , menjadi distribusi logaritma pembagian;

 P(X=2x+1) = $\frac{2z^{2x+1}}{\left(2x+1\right)log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}, 0<z<1 , x=0,1,2,3…..$

kemudian dari sini akan didapatkan : $a\_{x}=\frac{2}{2x+1}, $; f(z) = $log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)$, selanjutnya dengan menggunakan sifat-sifat dan rumus–rumus yang berhubungan dengan karakteristik parameter distribusi deret pangkat maka kita dapat mencari parameter-parameter untuk distribusi fungsi logaritma pembagian, antara lain; Mean, Varian, fungsi Pembangkit Moment dan fungsi Pembangkit Faktorial Moment.

**3.1. Fungsi Pembangkit Moment**

Untuk mencari fungsi pembangkit moment dari distribusi logaritma pembagian dengan menggunakan rumus diatas (9), pada distribusi deret pangkat yaitu; Mx(t)=$\frac{e^{t}}{f(z)}\sum\_{x}^{}a\_{x}e^{t\left(x-1\right)}z^{x}$ , maka akan didapatkan bentuk;

 Mx(t)= $\frac{e^{t}}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}\sum\_{x}^{}\frac{2}{\left(2x+1\right)}e^{t\left(x-1\right)}z^{2x+1}$ = $\frac{2e^{t}}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}\sum\_{x}^{}\frac{1}{\left(2x+1\right)}e^{t\left(x-1\right)}z^{2x+1}$

 Mx(t)= $\frac{log\left(\frac{1+ze^{t}}{1-z}\right)}{log\left(\frac{1+ze^{t}}{1-Z}\right)}$ , t<-log z , bentuk ini disebut fungsi pembangkit moment dari distribusi logaritma pembagian.

selanjutnya untuk mendapatkan moment- moment dari fungsi logaritma Pembagian ini kita lakukan penurunan Mx(t) terhadap t, kemudian ganti t = 0 (10).

**3.2. Moment Pertama (Mean) Distribusi Logaritma Pembagian**

Apabila Mx(t) pada distribusi deret pangkat diturunkan terhadap t, kemudian ganti t = 0 didapatkan; $\frac{d M\_{x}(t)}{dt}|\_{t=0}=E\left(x\right)=\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}$, karena diketaui bahwa f(z) = $log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)$ maka apabila kita turunkan terhadap z akan kita dapatkan bentuk f’(z) = $\frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\frac{2}{\left(1-z\right)^{2}}$ = $\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}$ , sehingga dapat dicari

 $\frac{d M\_{x}(t)}{dt}|\_{t=0}=E\left(x\right)=\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}$,

 E(x) = $\frac{z\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}}{log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$ = $\frac{2z}{\left(1-z^{2}\right) log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$

Karena moment pertama adalah Mean(x), maka Meannya adalah Mean(x) = $ \frac{2z}{\left(1-z^{2}\right) log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$

**3.3. Moment Kedua Distribusi Logaritma Pembagian**

Selanjutnya untuk mencari moment kedua dengan melakukan penurun lagi terhadap moment pertama atau turunan kedua dari fungsi distribusi deret pangkat yang ada.

 $\frac{d^{2}M\_{x}(t)}{dt^{2}}|\_{t=0}=E\left(x^{2}\right)=\frac{zf^{'}\left(z\right)+z^{2}f"(z)}{f(z)}$

Karena , f’(z)=$\frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\frac{2}{\left(1-z\right)^{2}}$ = $\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}$, apabila kita turunkan lagi terhadap z maka akan didapatka turunan kedua f”(z), dimana;

 f’(z)=2(1-z2)-1 $→$ f”(z) = 2(-1)(1-z2)-2(-2z) $→$ f”(z) = $\frac{4z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}$

kemudian dengan menggunakan rumus moment kedua dari distribusi deret pangkat didapatkan

 $\frac{d^{2}M\_{x}(t)}{dt^{2}}|\_{t=0}=E\left(x^{2}\right)=\frac{zf^{'}\left(z\right)+z^{2}f"(z)}{f(z)}$

 $\frac{d^{2}M\_{x}(t)}{dt^{2}}|\_{t=0}=E\left(x^{2}\right)=\frac{z\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}+z^{2}\frac{4z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}}{ log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ = $\frac{\frac{1}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}\left(2z\left(1-z^{2}\right)+z^{3}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ = $\frac{\left(2z-2z^{3}+4z^{3}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$

 Moment kedua E(x2) = $\frac{2\left(z+z^{3}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$

**3.4. Varian Distribusi Logaritma Pembagian**

Selanjutnya dengan menerapkan rumus Varian dan moment kedua dalam statistika ( 8), Var(x) = E(x2) – (E(x))2

Var(x) = $\frac{2\left(z+z^{3}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ - $\left(\frac{2z}{\left(1-z^{2}\right) log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}\right)^{2}$

 = $\frac{1}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log^{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\left(2\left(z^{3}+z\right)log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-4z^{2}\right)$

Var(x) = $2z\frac{\left(1-z^{2}\right)log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-2z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log^{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

**3.5. Fungsi Pembangkit Faktorial Moment**

Untuk mencari fungsi pembangkit faktorial moment dari distribusi logaritma pembagian dengan menggunakan rumus diatas (13) pada distribusi deret pangkat yaitu; Gx(t)=$\frac{t}{f(z)}\sum\_{x}^{}a\_{x}t^{\left(x-1\right)}z^{x}$ , maka akan didapatkan bentuk; Gx(t)= $\frac{t}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}\sum\_{x}^{}\frac{2}{\left(2x+1\right)}t^{\left(x-1\right)}z^{2x+1}$ = $\frac{2t}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}\sum\_{x}^{}\frac{1}{\left(2x+1\right)}t^{\left(x-1\right)}z^{2x+1}$

Gx(t)= $\frac{log\left(\frac{1+zt}{1-zt}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ , $\left|t\right|<\frac{1}{z}$, bentuk ini disebut fungsi pembangkit faktorial moment dari distribusi logaritma pembagian. Kemudian untuk mendapatkan moment faktorial- moment faktorial dari fungsi logaritma Pembagian ini kita lakukan penurunan Gx(t) terhadap t, kemudian ganti t=1(13).

**3.6. Moment Faktorial Pertama Distribusi Logaritma Pembagian**

Dari rumus dasar statistik diketahui bahwa ; moment pertama sama dengan moment faktorial pertama sama juga dengan mean(x), sehingga didapatkan;

 $\frac{d G\_{x}(t)}{dt}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[1\right]}\right)=π\_{1}=\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}$

karena diketaui bahwa f(z) = $log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)$ maka apabila kita turunkan terhadap z akan kita dapatkan bentuk f’(z)=$ \frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\frac{2}{\left(1-z\right)^{2}}$ = $\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}$, sehingga dapat dicari $\frac{d G\_{x}(t)}{dt}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[1\right]}\right)=π\_{1}=\frac{zf^{'}(z)}{f(z)}$ = $\frac{z2\left(1-z^{2}\right)^{-1}}{log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)}$

 $\frac{d G\_{x}(t)}{dt}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[1\right]}\right)=π\_{1}$ = $\frac{2z}{\left(1-z^{2}\right) log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$

**3.7. Moment Faktorial Kedua Distribusi Logaritma Pembagian**

 Dengan cara yang sama didapatkan $ \frac{d^{2}G\_{x}(t)}{dt^{2}}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[2\right]}\right)=π\_{2}=\frac{z^{2}f^{"}(z)}{f(z)}$, pada distribusi deret pangkat, karena , f’(z) = $\frac{1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}\frac{2}{\left(1-z\right)^{2}}$ = $\frac{2}{\left(1-z^{2}\right)}$, apabila kita turunkan lagi terhadap z maka akan didapatkan turunan kedua f”(z), dimana

 f’(z)=2(1-z2)-1 $→$ f”(z) = 2(-1)(1-z2)-2(-2z)

 f” (z) = $\frac{4z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}$

kemudian dengan menggunakan rumus moment faktorial kedua dari distribusi deret pangkat didapatkan

 $\frac{d^{2}G\_{x}(t)}{dt^{2}}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[2\right]}\right)=\frac{z^{2}f"(z)}{f(z)}$ = $\frac{z^{2}\left(\frac{4z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

 E(x[2]) = $\frac{4z^{3}}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

**3.8. Moment Faktorial Ketiga Distribusi Logaritma Pembagian,**

Dengan cara yang sama didapatkan $\frac{d^{3}G\_{x}(t)}{dt^{3}}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[3\right]}\right)=π\_{3}=\frac{z^{3}f^{'''}(z)}{f(z)}$ , pada distribusi deret pangkat (13), karena, f”(z) = $\frac{4z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}}$, apabila kita turunkan lagi terhadap z maka akan didapatka turunan ketiga f’’’(z), dimana f’’’(z) = $\frac{4\left(1+3z^{2}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{3}}$ , kemudian dengan menggunakan rumus moment faktorial ketiga dari distribusi deret pangkat didapatkan ;

 $\frac{d^{3}G\_{x}(t)}{dt^{3}}|\_{t=1}=E\left(x^{\left[3\right]}\right)=π\_{3}=\frac{z^{3}f^{'''}(z)}{f(z)}$ = $\frac{z^{3}\left(\frac{4\left(1+3z^{2}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{3}}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

 E(x[3]) = $\frac{4z^{3}\left(1+3z^{2}\right)}{\left(1-z^{2}\right)^{3}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

1. **KESIMPULAN**
2. Jika fungsi logaritma pembagian f(z) = $log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)$, maka didapatkan distribusi logaritma pembagianya adalah P(X=2x+1)=$\frac{2z^{2x+1}}{\left(2x+1\right)log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}, 0<z<1 , x=0,1,2,3…..$
3. Dari distribusi logaritma pembagian maka didapatkan Mean E(x) = $\frac{2z}{\left(1-z^{2}\right) log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ dan Variannya Var(x) = $2z\frac{\left(1-z^{2}\right)log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-2z}{\left(1-z^{2}\right)^{2}log^{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$
4. Dari distribusi logaritma pembagian maka didapatkan fungsi pembangkit momentnya

Mx(t)= $\frac{log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ , t<-log z

1. Dari distribusi logaritma pembagian maka didapatkan fungsi pembangkit faktorial momentnya Gx(t)= $\frac{log\left(\frac{1+zt}{1-zt}\right)}{log\left(\frac{1+z}{1-Z}\right)}$ , $\left|t\right|<\frac{1}{z}$

**DAFTAR RUJUKAN**

[1] Bain, L. J. and Engelhardt, M., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Calipornia. Duxbury Press

[2] Dudewicz, E. Dan Mishra, S., 1995, *Statistika Matematika Modern( Terjemahan).* Penerbit ITB. Bandung.

[3] Gupta, R. C., Ram C,. Tripathi and Guptha, Puspha L,. 1995, “Inflated Modified Power Series Distributions With Applications”. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *24(9),* 2355-2374.

[4] Jemakmun, 2003, “Karakteristik Parameter Distribusi Fungsi Trigonometri Invers Sinus(z) (sin-1Z)”, *Jurnal MIPA 32*, 15-22.

[5] Kreyszig,E., 1993, *Matematika Teknik Lanjutan (Terjemahan).Edisi Ke-6*. Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

[6] Papathanasiou,V., 1993, “Characterissatioan of Power Series Distributions and Factorial Series Distributions”. *Sankhya A*, 55, 164-168